10 MINUTE SCHOOL

উচ্চতর গণিত

শর্ট সিলেবাস

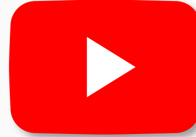
HSC 2021



সাজন চক্রবর্তী
আবু সাদাত সায়েম
মোঃ রফিকুজ্জামান রাফি

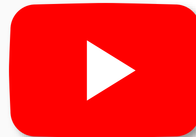
Higher Math 1st Paper

এইচ এস সি ২১ শর্ট সিলেবাসের উচ্চতর গনিত ১ম পত্রের ক্লাস গুলো পেতে নিচের বাটনে ক্লিক করো



Higher Math 2nd Paper

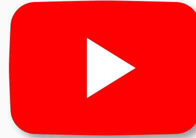
এইচ এস সি ২১ শর্ট সিলেবাসের উচ্চতর গনিত ২য় পত্রের ক্লাস গুলো পেতে নিচের বাটনে ক্লিক করো





Higher Math 1st Paper

এইচ এস সি ২১ শর্ট সিলেবাসের উচ্চতর গনিত ১ম পত্রের ক্লাস গুলো পেতে নিচের বাটনে ক্লিক করো







DOWNLOAD THE APP

10 MINUTE SCHOOL

সূচিপত্র

এইচ এস সি ২১ শর্ট সিলেবাসের উচ্চতর গনিত ১ম পত্রের ক্লাস গুলো পেতে নিচের বাটনে ক্লিক করো





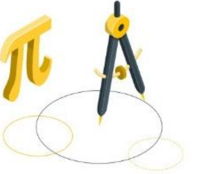

ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক





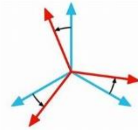


অন্তরীকরণ



সরলরেখা






যোগজীকরণ






মডেল টেস্ট এবং সলিউশন







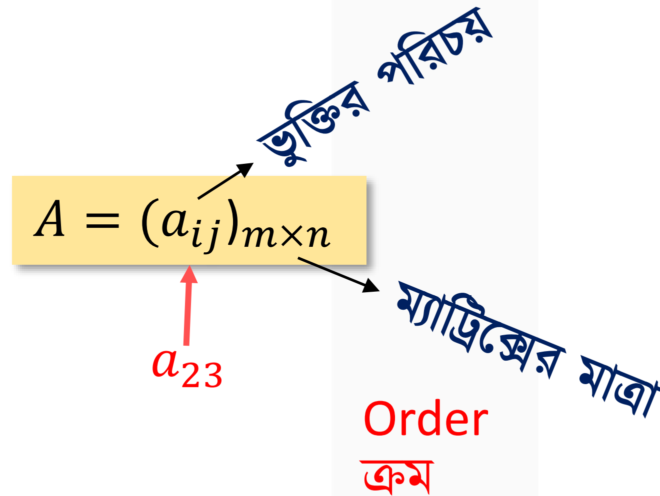

ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক

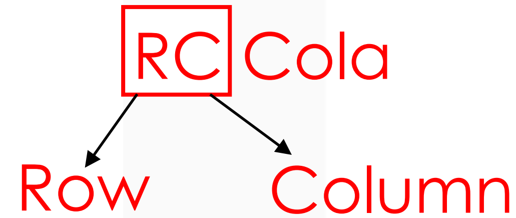




ম্যাট্রিক্স (Matrix)

কতগুলো সংখ্যাকে সারি এবং কলাম আকারে সাজানোর ফলে আয়তাকার বা বর্গাকার বিন্যাস/সজ্জা পাওয়া যায় তাকে ম্যাট্রিক্স বলে। ম্যাট্রিক্সে আনুভূমিক বরাবর উপাদান গুলোকে সারি এবং উলম্ব বরাবর উপাদান গুলোকে কলাম বলে। আগে উপাদান বলা হত, বর্তমানে বলা হয় ভুক্তি। উপাদান কথাটি শুধুমাত্র সেটের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।





$m = p \Rightarrow$ বর্গ

$m \neq p \Rightarrow$ আয়তাকার

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

3 x 3

ম্যাট্রিক্স (Matrix)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

গৌণ কর্ণ

মুখ্য কর্ণ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

মুখ্যপদঃ প্রধান কর্ণের মানগুলোর গুণফলকে মুখ্যপদ বলে।

অর্থাৎ, মুখ্যপদ $= a_{11}a_{22}a_{33}$ $\quad 45 = 1 \times 5 \times 9$

গৌণপদঃ গৌণ কর্ণের মানগুলোর গুণফলকে গৌণপদ বলে।

গৌণপদ $= a_{13}a_{22}a_{31}$ $\quad 105 = 7 \times 5 \times 3$

***

ট্রেস/নাভী/ Trace: মুখ্যকর্ণেরর মানগুলোর যোগফলকে ট্রেস বা নাভী বলে।

নাভী $= a_{11} + a_{22} + a_{33}$ $= 15 = 1 + 5 + 9$

ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ (Type of Matrices)

❖ **সারি ম্যাট্রিক্স (Row Matrix):** একটি মাত্র সারিবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সকে সারি ম্যাট্রিক্স বা সারি ভেক্টর (Row vector) বলে।

উদাহরণ: $[m \quad n \quad o \quad p]$ একটি সারি ম্যাট্রিক্স যার ক্রম: ? 1 x 4

❖ **কলাম ম্যাট্রিক্স (Column Matrix):** একটি মাত্র কলামবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সকে কলাম ম্যাট্রিক্স বা কলাম ভেক্টর (Column Vector) বলা হয়।

উদাহরণ: $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ একটি কলাম ম্যাট্রিক্স যার ক্রম: ? 3 x 1

DOWNLOAD THE APP

10 MINUTE SCHOOL

ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ (Type of Matrices)

❖ **বর্গ ম্যাট্রিক্স (Square Matrix):** যে ম্যাট্রিক্স এর সারি ও কলামের সংখ্যা সমান হয় তাকে বর্গ ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

উদাহরণ: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স যার ক্রম $[3 \times 3]$

∴উপরের বর্গ ম্যাট্রিক্সের ১ম সারি, ও ১ম কলামের সাধারণ পদ (Common entry) বরাবর কর্ণকে মূখ্য কর্ণ বলে।

ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ (Type of Matrices)

❖ **ত্রিভুজাকৃতি ম্যাট্রিক্স (Triangular Matrix):** কোন বর্গ ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের নিম্নস্থ সবগুলো ভুক্তি শূন্য হলে তাকে উর্ধ্ব ত্রিভুজাকৃতি (Upper Triangular Matrix) ম্যাট্রিক্স বলা হয়। অপরদিকে প্রধান কর্ণের উপরের সবগুলো ভুক্তি শূন্য হলে তাকে নিম্ন ত্রিভুজাকার (Lower Triangular Matrix) ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

উদাহরণ: $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ একটি উর্ধ্ব ত্রিভুজাকৃতি ম্যাট্রিক্স যার ক্রম $[3 \times 3]$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ একটি নিম্ন ত্রিভুজাকৃতি ম্যাট্রিক্স যার ক্রম $[3 \times 3]$

ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ (Type of Matrices)

❖ **কর্ণ ম্যাট্রিক্স (Diagonal Matrix):** কোন বর্গ ম্যাট্রিক্সের মুখ্য বা প্রধান কর্ণের ভুক্তি ব্যতীত অপর সকল ভুক্তি শূন্য হলে তাকে কর্ণ ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

উদাহরণ: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ একটি কর্ণ ম্যাট্রিক্স

❖ **স্কেলার ম্যাট্রিক্স (Scalar Matrix):** কোন কর্ণ ম্যাট্রিক্সের অশূণ্য উপাদানগুলো সমান হলে তাকে স্কেলার ম্যাট্রিক্স বলে।

উদাহরণ: $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ একটি স্কেলার ম্যাট্রিক্স

ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ (Type of Matrices)

*** 200%

❖ **একক বা অভেদক ম্যাট্রিক্স (Unit or Identity Matrix):** স্কেলার ম্যাট্রিক্সের অশূন্য উপাদানগুলো 1 (এক) হলে ম্যাট্রিক্সটিকে একক বা অভেদক ম্যাট্রিক্স বলে। n ক্রমের একক ম্যাট্রিক্সে I_n দিয়ে সূচিত করা হয়।

Keno The way?

$X.X^{-1} = 1 \quad X.1 = X$

উদাহরণ: $I_1 = [1]$, $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$AB = I$

$B = A^{-1}$

$A^{-1}.A = A.A^{-1} = IA.I = A$

❖ **শূন্য ম্যাট্রিক্স (Zero Matrix):** শূন্য ম্যাট্রিক্সের সারি এবং কলামের সকল উপাদান শূন্য (0)।

$\frac{1}{A^{-1}} = A^{-1}$ (crossed out) Wrong

উদাহরণ: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ একটি 3×2 ক্রমের শূন্য ম্যাট্রিক্স

ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ (Type of Matrices)

*** ক

❖ **ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স(Singular Matrix):** একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A কে ব্যাতিক্রমী ম্যাট্রিক্স বলা হয় যখন $|A| = 0$

বিদেশী

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 14 & 8 \end{bmatrix} = (7 \times 8) - (14 \times 4) = 56 - 56 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

❖ **অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স:** একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A কে অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স বলা হয় যখন $|A| \neq 0$

$$\sqrt{-2} = \sqrt{2}i$$

A একটি বাস্তব ম্যাট্রিক্স এবং $A = \begin{bmatrix} k\sqrt{k} & 2 \\ 2 & \sqrt{k} \end{bmatrix}$

k এর মান কত হলে A বিদেশী?

ক. 2 খ. -2 গ. ± 2 ঘ. $\sqrt{2}$

$$k\sqrt{k}\sqrt{k} - 4 = 0$$
$$\rightarrow k.k - 4 = 0$$
$$\rightarrow k^2 = 4$$
$$\therefore k = \pm 2$$

*** ক

ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ (Type of Matrices)

❖ **সমঘাতি ম্যাট্রিক্স: (Idempotent Matrix):** একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স এ কে সমঘাতি ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $A^2 = A$ হয়।

উদাহরণ: $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ এখানে $A^2 = A$ তাই A একটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ (Type of Matrices)

❖ **শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স (Nilpotent Matrix):** একটি বর্গাকার ম্যাট্রিক্স A কে শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $A^n = 0$ হয়, যেখানে $n \in \mathbb{N}$ যদি সর্বনিম্ন ধনাত্বক পূর্ণসংখ্যা n এর জন্য $A^n = 0$ হয়, তবে ম্যাট্রিক্স A কে সূচক (index) n এর শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

উদাহরণ: $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, এখানে $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = 0$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Null Matrix

সুতরাং, A একটি শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স। একইভাবে $A^3 = 0, A^4 = 0$ ইত্যাদি। সুতরাং A হলো সূচক 2 এর শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স।

❖ **উদঘাতিক ম্যাট্রিক্স (Involutory Matrix):** একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A কে অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $A^2 = I$ হয়।

অভেদক

উদাহরণ: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, এখানে $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ (Type of Matrices)

❖ **বিম্ব ম্যাট্রিক্স (Transpose of a Matrix):** কোন ম্যাট্রিক্স এর সারিকে কলামে এবং কলামকে সারিতে পরিবর্তন করলে আদি ম্যাট্রিক্সের বিম্ব ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায়। A ম্যাট্রিক্স এর বিম্ব ম্যাট্রিক্সকে A^T বা A' দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ: $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

এর বিম্ব ম্যাট্রিক্স $A^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$ 3 x 3

$(2 \times 3)^t = 3 \times 2$

RC

t

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

DOWNLOAD THE APP

ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ (Type of Matrices)

10 MINUTE SCHOOL

$(A')' = A$

$(AB)^t = B^tA^t$ / A^tB^t

বিম্ব ম্যাট্রিক্স এর গুণাবলিঃ

ক. যে কোন A ম্যাট্রিক্সের বিম্ব ম্যাট্রিক্স A' হলে, $(A')' = A$.

খ. A ও B দুটি গ্রহনযোগ্য ম্যাট্রিক্স হলে, $(A \pm B)' = A' \pm B'$ অর্থাৎ দুইটি ম্যাট্রিক্সের যোগফল বা বিয়োগফলের বিম্ব, তাদের বিম্বদয়ের যোগফল বা বিয়োগফলের সমান হবে।

গ. দুইটি ম্যাট্রিক্স A ও B এর গুণফলের বিম্ব, বিম্বদয়ের গুণফলের সমান হবে, যদি গুণনের ক্রম উল্টা হয়। অর্থাৎ $(AB)' = B'A'$

ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ (Type of Matrices)

*** ক

❖ **প্রতিসম ম্যাট্রিক্স (Symmetric of a Matrix):** কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স ও তার বিম্ব ম্যাট্রিক্স একই হলে অর্থাৎ $A = A^T$ হলে তাকে প্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলা হয়

$a_{ij} = a_{ji}$

উদাহরণ: $A = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & p \\ c & p & q \end{bmatrix}$ হলে $A^T = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & p \\ c & p & q \end{bmatrix}$ অর্থাৎ $A = A^T$

a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{31}

সুতরাং A প্রতিসম ম্যাট্রিক্স

ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ (Type of Matrices)

❖ **বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স (Skew Symmetric of a Matrix):** একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স $A = (a_{ij})_{n\times n}$ কে বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $A^T = -A$ হয়, অর্থাৎ $a_{ij} = -a_{ji}$ হয়।

উদাহরণ: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ হলে $A^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix} = -A$

a_{12} a_{23} a_{21} a_{32}

অর্থাৎ, $A^T = -A$ সুতরাং A হলো একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স। উল্লেখ্য যে, প্রত্যেক বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের ভুক্তিসমূহ শূন্য, অর্থাৎ $a_{ij} = 0$ যখন $i = j$ ।

$i = j$

a_{11}
a_{22}
a_{33}

$m \times n$

ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ (Type of Matrices)

❖ **উপ-ম্যাট্রিক্স (Sub Matrix):** যেকোনো ম্যাট্রিক্সের কলাম ও সারির ভুক্তি বাদ দিয়ে গঠিত অপর একটি ম্যাট্রিক্সকে মূল ম্যাট্রিক্সের উপ-ম্যাট্রিক্স বলা হয়। যেমন,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

ম্যাট্রিক্সের উপ-ম্যাট্রিক্স $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

কিছু বিশেষ ম্যাট্রিক্স

- **লম্ব (Orthogonal) ম্যাট্রিক্সঃ** একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A ম্যাট্রিক্স হবে যদি $A.A^T = A^T.A = I$ হয়। অর্থাৎ, যদি $A^T = A^{-1}$ হয়।

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

সমঘাতি

- **একক্ষম (Idempotent) ম্যাট্রিক্সঃ** কোন A ম্যাট্রিক্স একক্ষম হবে, যদি $A^2 = A$ হয়।

শূন্যঘাতি

- **অক্ষম বা বিনাশক (Nilpotent) ম্যাট্রিক্সঃ** P একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে, যদি $A^p = 0$ (শূন্য ম্যাট্রিক্স) হয়, তবে A একটি বিনাশক ম্যাট্রিক্স।

- **উদঘাতিক (Involuntary) ম্যাট্রিক্সঃ** কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর ক্ষেত্রে $A^2 = I$ হলে A একটি উদঘাতিক ম্যাট্রিক্স।

কিছু বিশেষ ম্যাট্রিক্স

জটিল

- **অনুবন্ধী(Conjugate) ম্যাট্রিক্সঃ** কোন A ম্যাট্রিক্সের ভুক্তি(উপাদান) জটিল সংখ্যা হলে, প্রত্যেক জটিল সংখ্যার স্থানে তার অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা বসিয়ে প্রাপ্ত ম্যাট্রিক্সকে অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স বলা হয় এবং $\bar{A}$ দ্বারা সূচিত করা হয়।যেমনঃ

$i \to i, \; i \to -i$

$$Im_1 \times Im_2 = R$$

জটিল

$$A = \begin{bmatrix} 1+2i & i & 2-3i \\ 5 & -i & 4 \\ 53-5i & 7 & 5+2i \end{bmatrix}$$ হলে

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1-2i & -i & 2+3i \\ 5 & i & 4 \\ 53+5i & 7 & 5-2i \end{bmatrix}$$

$$i \times i = i^2 = -i$$

$$i(-i) = 1$$

সহগ সমীকৃত

$x + 2y = ax + by$

$a = 2$

$b = 3$

❖ ম্যাট্রিক্সের সমতাঃ $\begin{bmatrix} x+2y & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & x+y \\ a & -b \end{bmatrix}$ হলে, $x + 2y - a + b?$

$8 - 2 + 3 = 9$ *Ans*

❖ ম্যাট্রিক্সের স্কেলার গুণনঃ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ হলে, $3A = ?$

$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$

❖ ম্যাট্রিক্সের যোগ-বিয়োগঃ

শর্তঃ সমমাত্রিক হতে হবে

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

3×1

ক) $A + B = ?$ $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$

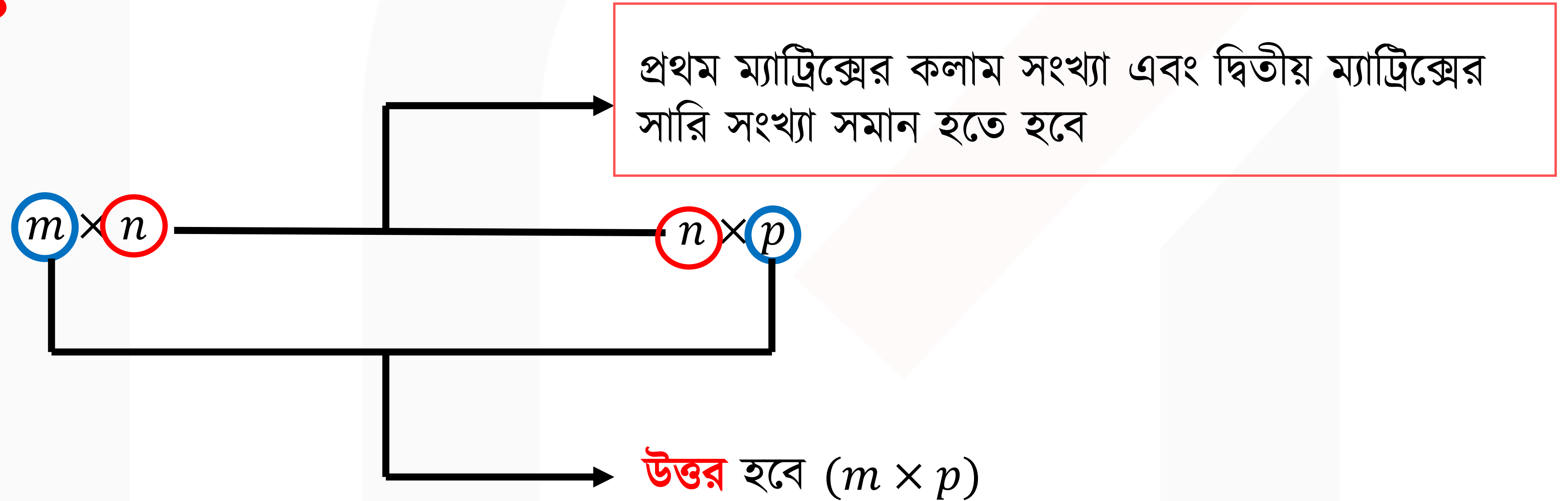
খ) $3A - 2B = ?$

2×2

গ) $5A - 3B + 2I = ?$

ঘ) $A - C = ?$ সম্ভব না মাত্রা একই নয়

❖ ম্যাট্রিক্সের গুণনঃ



2 × 3
2 × 3
m × n
n × p
প্রথম ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা এবং দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যা সমান হতে হবে
উত্তর হবে (m × p)

❖ ম্যাট্রিক্সের গুণনঃ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$

নির্ণয় যোগ্যতা যাচাই কর?

1. AB $2 \times 2 \quad 2 \times 3$ 2×3 ✓

2. BA $2 \times 3 \quad 2 \times 2$ X

3. AC $2 \times 2 \quad 3 \times 1$ X

4. CA $3 \times 1 \quad 2 \times 2$ X

5. BC $2 \times 3 \quad 3 \times 1$ 2×1 ✓

6. CB $3 \times 1 \quad 2 \times 3$ X

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

ক) $f(x) = x^2 - 3x + 5$ হলে $f(A) = ?$

খ) দেখাও যে, $(AB)C = A(BC)$

$f(x) = x^2 - 3x + 5$

$f(A) = A^2 - 3A + 5I$

Twist

AB

BC

$(AB)C$ $A(BC)$

$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1+0 & -1-2 \\ 0+0 & 0+4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

সামনে যাবো

নিচে নামবো

VVI





১. A এর মাত্রা $(m \times n), B$ এর মাত্রা $(n \times p)$ হলে AB এর মাত্রা $(m \times n).(n \times p) = (m \times p)$

২. A এর মাত্রা $(m \times n), B$ এর মাত্রা $(n \times m)$ হলে AB এর মাত্রা $(m \times m)$, BA এর মাত্রা $(n \times n)$

VVI

৩. A, B, C যোগ ও গুনযোগ্য হলে,

$$A(B+C) = AC + BC,$$ → বণ্টন

$$(A+B)C = AC + BC,$$

$$A(BC) = (AB)C$$ → সহযোজন

A, B, C, বণ্টন বিধি মেনে চলে

৪. সাধারণত i) $AB \neq BA$

ii) $AB = 0$ হলে $A = 0$ অথবা $B = 0$ নাও হতে পারে

A ও B বিনিময় মেনে চলে

Concentration Test

১. যদি ম্যাট্রিক্স $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ হয় এবং I একটি 3×3 ইউনিট ম্যাট্রিক্স হয় তাহলে AI=?

২. $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$ হলে যোগফল কত?

৩.$(xy)^t = ?$

৪. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix}$ এর ট্রেস কত?

৫. বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স এর বিশেষ বৈশিষ্ট্য কি?

৬. আজকের ক্লাসে নতুন কি কি শিখলে?

Concentration Test (Solve)

১. যদি ম্যাট্রিক্স $A = [-2 \quad -1 \quad 3]$ হয় এবং I একটি 3×3 ইউনিট ম্যাট্রিক্স হয় তাহলে AI=?

২. $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ এবং $B = [2 \quad 3]$ হলে যোগফল কত?

৩. $(xy)^t = ?$

৪. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix}$ এর ট্রেস কত?

৫. বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স এর বিশেষ বৈশিষ্ট্য কি?

৬. আজকের ক্লাসে নতুন কি কি শিখলে?

1. A
2. সম্ভব না
3. $y^t x^t$
4. $1 + 5 - 9 = -3$
5. মুখ্য কর্ণের ভুক্তি ০

Correction

❖ **সমঘাতি ম্যাট্রিক্স: (Idempotent Matrix):** একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স এ কে সমঘাতি ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $A^2 = A$ হয়।

উদাহরণ: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ এখানে $A^2 = A$ তাই A একটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স।

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

[সামনে যাবো, নিচে নামবো]

$$= \begin{bmatrix} 4-2 & 2-1 \\ -4+2 & -2+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= A$$

❖ অনুরাশি (Minor):

নির্ণায়কের প্রতিটি ভুক্তির একটি করে অনুরাশি আছে। কোন ভুক্তির অনুরাশি বের করতে হলে ঐ ভুক্তিটি যে কলাম এবং যে সারিতে অবস্থিত তা বাদ দিয়ে যে ভুক্তিগুলো অবশিষ্ট থাকে, তাদের নিয়ে গঠিত নির্ণায়ককে ঐ উপাদানটির অনুরাশি বলে।

❖ সহগুণক (Co-factor):

নির্ণায়কের প্রতিটি ভুক্তির একটি করে সহগুণক আছে। কোন ভুক্তির সহগুণক বের করতে হলে ঐ ভুক্তির অনুরাশির আগে ঐ ভুক্তির অবস্থানের যথাযথ চিহ্ন বসালেই সহগুণক পাওয়া যায়।

সহগুণক= $(-1)^{r+c}$ × অনুরাশি

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

a_{11} এর অনুরাশি= $\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

a_{32} এর অনুরাশি= $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix}$

a_{11} এর সহগুণক $= +\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ (জোড় হলে +)

a_{32} এর সহগুণক $= -\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix}$ (বিজোড় হলে -)

❖ নির্ণায়কের মানঃ

নির্ণায়কের

যে কোন সারি বা কলামে প্রতিটি ভুক্তি ও তার সহগুনকের গুণফলের সমষ্টিকে ঐ ম্যাট্রিক্সের মান বলে।

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -7 & 8 \end{vmatrix}$$

[প্রথম সারি বরাবর বিস্তার করে]

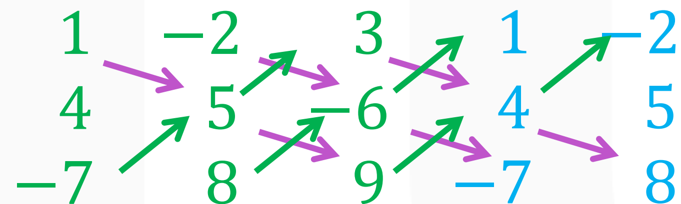
$$= 282$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= -(-2)\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}$$ [২য় কলাম বরাবর বিস্তার করে]

$= 282$

Sarrus Diagram:



$$= 45 + (-84) + 96 - (-105) - (-48) - (-72)$$

$$= 282$$

DOWNLOAD THE APP

10 MINUTE SCHOOL

ক্যালকুলেটর এর লীলাখেলা

সংবিধিবদ্ধ সতর্কীকরণঃ শর্টকাট সৃজনশীলের জন্য ক্ষতিকর।
নাম্বারহানীতে স্যার বা কর্তৃপক্ষ দায়ী নহে।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

1. A^2

2. AB

3. $(AB)C$

4. BC

5. $|A|$

6. A^{-1}

DOWNLOAD THE APP

ক্যালকুলেটর এর লীলাখেলা

10 MINUTE SCHOOL

MS Series:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 1} \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

MODE MODE MODE

2 Press

EQN	MAT	VCT
1	2	3

2 Press

এরপর Press চেপে Matrix Mode এ নিতে হবে। এরপর

SHIFT

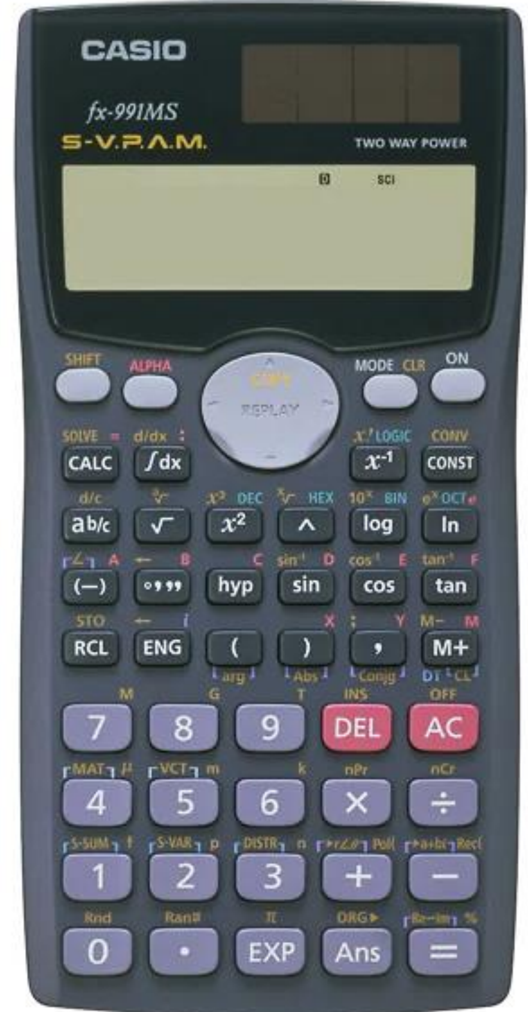
4 Press

Dim	Edit	MAT
1	2	3

1 Press

A	B	C
1	2	3

1 Press



ক্যালকুলেটর এর লীলাখেলা

ES Series:

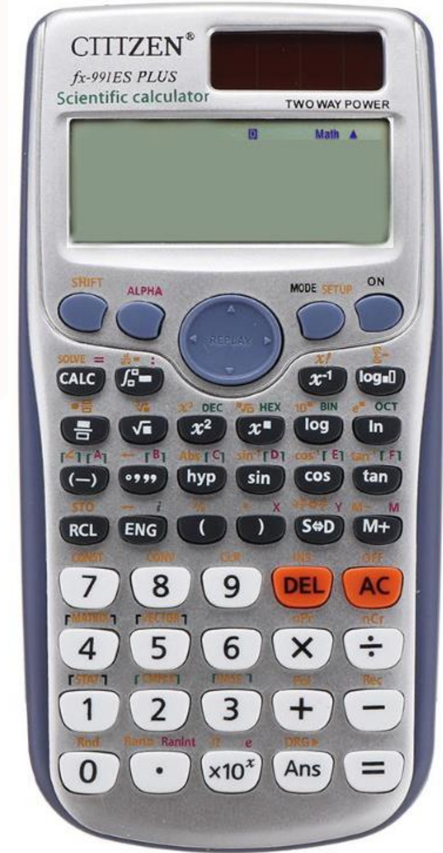
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

MODE
Press

1.COMP	2.CMPLX
3.STAT	4.BASE-N
5.EQN	6.MATRIX
7.TABLE	8.VECTOR

6
Press

AC



SHIFT

4
Press

1.Dim	2.Data
3.MAT A	4.MAT B
5.MAT C	6.MAT Ans
7.Det	8.Trn

1
Press

MATRIX ?
1 : MatA 2 : MatB
3 : Matc

1
Press

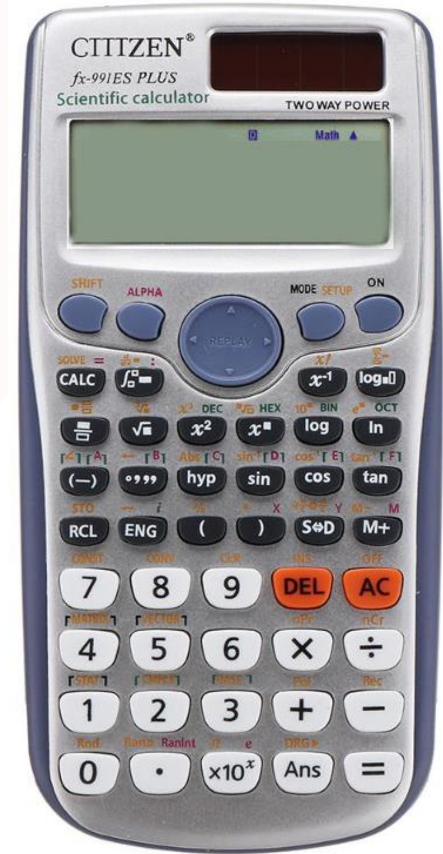
ক্যালকুলেটর এর লীলাখেলা

ES Series:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 1} \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$Mat\ A\ (m \times n)\ \ m \times n = ?$$

1 : 3x3	2 : 3x2
3 : 3x1	4 : 2x3
5 : 2x2	6 : 2x1



যেহেতু A Matrix টির Dimension আকারের তাই 4 এ Press করতে হবে।

A 

Matrix টির ফাকা স্থানগুলো পূরণ করতে হবে।

DOWNLOAD THE APP

10 MINUTE SCHOOL

Solve

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$

$C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$

1. $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

2. $AB = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

3. $(AB)C = \begin{bmatrix} 3 \\ 16 \end{bmatrix}$

4. $BC = \begin{bmatrix} 11 \\ 8 \end{bmatrix}$

5. $|A| = 2$

6. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$

❖ পর্যায়বৃত্ত ম্যাট্রিক্সঃ

A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং $A^{p+1} = A,\ p \in N$ হয় তবে তাকে পর্যায়বৃত্ত ম্যাট্রিক্স এবং p কে পর্যায় কাল বলে।

উদাহরণ: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

$A^2 = ?$

$A^3 = ?$

$A^4 = ?$

$A^5 = ?$

<u>*HW*</u>

Assignment

1. যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ হয়, তবে AB এবং BA নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, $AB \neq BA$

2. যদি $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$ হয়, তবে দেখাও যে $AB = I_3 = BA$, যেখানে, I_3 হলো 3 ক্রমের একক ম্যাট্রিক্স।

3. যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ হয়, তবে $(AB)C$ নির্ণয় কর।

এবং, দেখাও যে, $(AB)C = A(BC)$।

4. যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ হয়, তবে A^2 এবং A^3 নির্ণয় কর।

এবং, দেখাও যে $A^2 + 2A - 11I = 0$, যেখানে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$।

Assignment

5. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \\ 4 & -7 & 5 \end{bmatrix}$ হলে $f(A)$ নির্ণয় কর। যেখানে $f(x) = 3x^2 + 5x$

6. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = A^t$ এবং $f(x) = x^2 - 4x$ হলে $f(B)$ নির্ণয় কর।

7. দেখাও যে, $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ একটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স।

8. যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ হয়, তবে দেখাও যে, $(AB)' = B'A'$ ।

বিপরীত ম্যাট্রিক্স (Inverse Matrix)

কোন ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স বের করতে হলে, সংশ্লিষ্ট ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক বের করে এর সঙ্গে প্রত্যেকটি উপাদানের সহগুণক সারি বরাবর বের করে কলাম বরাবর লিখে যে ম্যাট্রিক্স (Adjoint Matrix) পাওয়া যায় তা গুণ করতে হয়।

যদি A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স হয় তাহলে, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} . Adj(A)$

সহগুণক= $(-1)^{r+c} \times$ অনুরাশি

$$adj\ (A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^t$$

বিদেহী মান
শূন্য
ব্যতিক্রমী
Singular

বিপরীত ম্যাট্রিক্স (Inverse Matrix)

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, হলে $A^{-1} = ?$

$|A| = -4 - 12$

$= -16 \neq 0$ বিপরীত যোগ্য

$A_{11} = +(-2) = -2$

$A_{12} = -(4) = -4$

$A_{21} = -(3) = -3$

$A_{22} = +(2) = 2$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-16}\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{16} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

বিপরীত ম্যাট্রিক্স (Inverse Matrix)

Shortcut: (2×2) ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রেঃ

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ হলে, $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

VVI

A ও B অব্যতিক্রমী হলে,

$AB = I$

$XX^{-1} = I$

১. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

২. $A^{-1} = X,\ A^{-1} = Y$ হলে $X = Y$

৩. $(A^{-1})^{-1} = A$

৪. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

*** ৫. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ → CQ

$\frac{1}{A} = A^{-1}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}[\ ]^t$

Problems

$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

ধরি,

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |M| = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 2(2-0) - 1(-1-0) + 1(0-6)$$

$$= 4 + 1 - 6$$

$= -1 \neq 0$ বিপরীত যোগ্য

এখন,

$$M_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2$$

$$M_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(-1-0) = 1$$

$$M_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (0-6) = -6$$

$$M_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1-0) = -1$$

$$M_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (2-3) = -1$$

$$M_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -(-0-3) = 3$$

$$M_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (0-2) = -2$$

$$M_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -(0+1) = -1$$

$$M_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (4+1) = 5$$

সুতরাং, M ম্যাট্রিক্সের সহগুণক ম্যাট্রিক্স $= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ -1 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

2	1	1	2	1
-1	2	0	-1	2
3	0	1	3	0
2	1	1	2	1
-1	2	0	-1	2

এখন,

$$adj(M) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ -1 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}^T$$

$|M| = -1$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -6 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ -1 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

অতএব, বিপরীত ম্যাট্রিক্স $= \frac{1}{|M|} adj(M)$

$$= \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -6 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

Ans

ক্রেমারের পদ্ধতিতে মান নির্ণয়

***

(ক) $AX = B$ আকারে প্রকাশ কর?

(খ) A^{-1} বের কর? H.W

(গ) ক্রেমারের পদ্ধতিতে x, y, z এর মান নির্ণয় কর।

$$2x - 3y + z = 2,$$
$$3x - y - 3z = 5,$$
$$x + y + z = -3$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

A (X) B

$$2x - 3y + z = 2,$$
$$3x - y - 3z = 5,$$
$$x + y + z = -3$$

$$x = \frac{D_x}{D}$$

$$X = \frac{D_x}{D}, \quad Y = \frac{D_y}{D}, \quad Z = \frac{D_z}{D}$$

$$y = \frac{D_y}{D}$$

$$z = \frac{D_z}{D}$$

মনে রাখতে হবে,

D এর ক্ষেত্রে, x, y, z এর সহগ.

D_x এর ক্ষেত্রে, x এর স্থলে ধ্রুবপদ.

D_y এর ক্ষেত্রে, y এর স্থলে ধ্রুবপদ.

D_z এর ক্ষেত্রে, z এর স্থলে ধ্রুবপদ.

ক্রেমারের পদ্ধতিতে মান নির্ণয়

$2x - 3y + z = 2,$

$3x - y - 3z = 5,$

$x + y + z = -3$

$$\therefore D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 2(-1+3) - (-3)(3+3) + 1(3+1)$

$= 4 + 18 + 4$

$= 26 \neq 0$ নির্ণয় যোগ্য

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 2(-1+3) - (-3)(5-9) + 1(5-3)$

$= 4 - 12 + 2$

$= -6$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

$= 2(5-9) - 2(3+3) + 1(-9-5)$

$= -8 - 12 - 14$

$= -34$

ক্রেমারের পদ্ধতিতে মান নির্ণয়

$$2x - 3y + z = 2,$$

$$3x - y - 3z = 5,$$

$$x + y + z = -3$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -38$$

$$D = 26$$

$$D_x = -6$$

$$D_y = -34$$

$$D_z = -38$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-6}{26} = -\frac{3}{13};$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-34}{26} = -\frac{17}{13};$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-38}{26} = -\frac{19}{13};$$

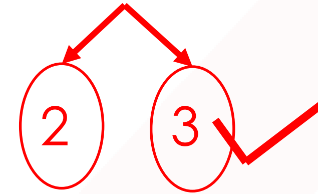
MS →

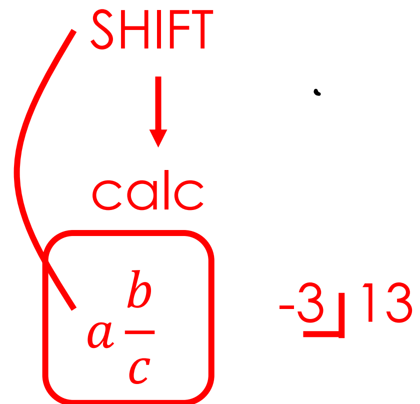
$$2x - 3y + z = 2,$$

$$3x - y - 3z = 5,$$

$$x + y + z = -3$$

MODE → EQN → Unknown





-3⌋13

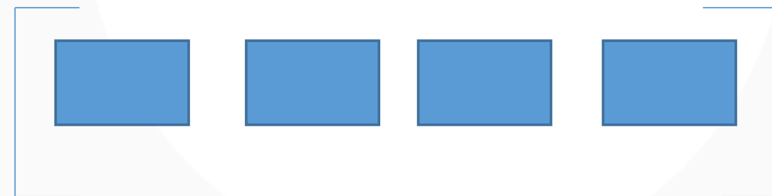
SHIFT ↓ $a\frac{b}{c}$

$2 = -3 = 1 = 2 =$

$3 = -1 = -3 = 5 =$

$1 = 1 = 1 = -3 =$

ES → EQN → $ax_n + by_n + c_n = \mathrm{d_n}$



নির্ণায়কের ধর্মাবলি

১. নির্ণায়কের যে কোনো সারি বা কলাম ভুক্তি শূন্য হলে নির্ণায়কটির মান শূন্য হবে।

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

[১ম কলামের মাধ্যমে বিস্তৃতি]

$$[a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}]$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

[৩য় সারির মাধ্যমে বিস্তৃতি]

নির্ণায়কের ধর্মাবলি

২. কোনো নির্ণায়কের সারিকে কলাম বা কলামকে সারিতে রূপান্তরিত করলে ঐ নির্ণায়কের মানের কোন পরিবর্তন হবে না।

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

নির্ণায়কের ধর্মাবলি

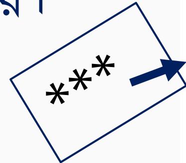
৩. নির্ণায়কের যেকোন দুইটি পাশাপাশি সারি বা কলাম পরস্পর স্থান বিনিময় করলে নির্ণায়কের চিহ্ন পরিবর্তিত হয়, কিন্তু সংখ্যমান অপরিবর্তিত থাকে।

VVI

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

নির্ণায়কের ধর্মাবলি

৪. নির্ণায়কের কোনো সারি বা কলামের প্রত্যেকটি ভূক্তিকে কোনো স্থির সংখ্যা দ্বারা গুণ করা হলে, নির্ণায়কের মানকেও সেই স্থির সংখ্যা দ্বারা গুণ করা হয়।



$$(|2A|)^{-1} = \frac{1}{2^{\text{মাত্রা}} \times |A|} = \frac{1}{56} \quad \text{Ans}$$



$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \therefore mD = m\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ma_1 & b_1 & c_1 \\ ma_2 & b_2 & c_2 \\ ma_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ma_1 & mb_1 & mc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

VVI

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$|A| = 7$ A $\frac{2 \times 2}{3 \times 3}$ ম্যাট্রিক্স

$$mA = \begin{bmatrix} ma & mb \\ mc & md \end{bmatrix}$$

$$|mA| = \begin{vmatrix} ma & mb \\ mc & md \end{vmatrix} = m \times m \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$(|2A|)^{-1} = \frac{1}{m^{\text{মাত্রা}} \times |A|}$$

$$= \frac{1}{2^2 \times 7}$$

$$= \frac{1}{28} \quad \text{Ans}$$

নির্ণায়কের ধর্মাবলি

৫. নির্ণায়কের যেকোনো দুইটি সারি বা কলাম অভিন্ন হলে, নির্ণায়কের মান শূন্য হবে।

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ বা, } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

নির্ণায়কের ধর্মাবলি

৬. নির্ণায়কের কোনো সারি বা কলামের ভুক্তিগুলি অন্য একটি সারি বা কলামের অনুরূপ ভুক্তিগুলির m গুণের সমান হলে, নির্ণায়কের মান শূন্য হবে।

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & ma_1 & c_1 \\ a_2 & ma_2 & c_2 \\ a_3 & ma_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$m \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

SAME

নির্ণায়কের ধর্মাবলি

৭. যদি কোনো নির্ণায়কের কোনো সারি বা কলামের প্রতিটি ভুক্তি একাধিক পদ নিয়ে গঠিত হয় তবে নির্ণায়কটিকে একাধিক নির্ণায়কের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যাবে।

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

১ম　　　　২য়

প্রমাণ

মনে করি, $\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এবং $\begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ – কে

যথাক্রমে, D_1, D_2, D_3 দ্বারা সূচিত করা হলো।

তাহলে, প্রত্যেকটি নির্ণায়কের প্রথম কলামের ভুক্তিগুলির সহগুণকগুলি একই হবে। এখন প্রথম কলামের সহগুণকগুলিকে যথাক্রমে A_1, A_2, A_3 দ্বারা সূচিত করলে

$$D_1 = (a_1+\alpha_1)A_1 + (a_2+\alpha_2)A_2 + (a_3+\alpha_3)A_3$$

$$D_2 = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 \qquad D_3 = \alpha_1A_1 + \alpha_2A_2 + \alpha_3A_3$$

$$\therefore D_1 = (a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3) + (\alpha_1A_1 + \alpha_2A_2 + \alpha_3A_3)$$

$$\therefore D_1 = D_2 + D_3 \text{ (প্রমাণিত)}$$

ম্যাট্রিক্সের যোগ বিয়োগ আর নির্ণায়কের যোগ বিয়োগ এক নয়!!!

নির্ণায়কের ধর্মাবলি

৮. নির্ণায়কের কোনো সারি বা কলামের প্রতিটি ভুক্তিকে অন্য একটি সারি বা কলামের অনুরূপ ভুক্তির একই গুনিতক দ্বারা বৃদ্ধি বা হ্রাস করা হলে নির্ণায়কের মানের কোনে পরিবর্তন হয় না।

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

নির্ণায়কের ধর্মাবলি

৯. কোনো নির্ণায়কের কোনো সারি বা কলামের প্রত্যেকটি ভুক্তির সাথে এ নির্ণায়কের অপর কোনো সারি বা কলামের (অনুরূপ) ভুক্তিসমূহ যোগ বা বিয়োগে করলে নির্ণায়কের মানের কোনো পরিবর্তন হবে না।

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \pm b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 \pm b_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 \pm b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad [c_1' = c_1 \pm c_2]$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \pm a_2 & b_1 \pm b_2 & c_1 \pm c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad [r_1' = r_1 \pm r_2]$$

নির্ণায়কের ধর্মাবলি

১০. কোনো নির্ণায়কের কোনো সারি বা কলামের ভুক্তিগুলিকে তাদের নিজ নিজ সহগুণক দ্বারা গুণ করে গুণফলগুলির সমষ্টি নিলে নির্ণায়কের মান পাওয়া যায়।

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1$$

Problems

প্রশ্ন ১- $\begin{vmatrix} 1 & -\omega & \omega^2 \\ -\omega & \omega^2 & 1 \\ (\omega)^2 & 1 & -\omega \end{vmatrix}$ এর মান নির্ণয় কর ।

[BUET: '10-11;কু.বো:'১০]

Solution

$$\begin{vmatrix} 1 & -\omega & \omega^2 \\ -\omega & \omega^2 & 1 \\ (\omega)^2 & 1 & -\omega \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+\omega^3 & -0 & \omega^2 \\ -\omega+\omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2-\omega^2 & 1 & -\omega \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -\omega & \omega^2 \\ 0 & \omega^2 & 1 \\ 0 & 1 & -(1) \end{vmatrix} \qquad [\because \omega^3 = 1]$$

$$= 2\begin{vmatrix} \omega^2 & 1 \\ 1 & -\omega \end{vmatrix}$$

$$= 2(-\omega^3 - 1)$$

$$= 2(-1-1) \quad = -4$$

Answer

Problems

প্রশ্ন ২- $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3$

[CUET:'11-12,'03-04; সি.বো.'১৬ '১৩,'১০। 'য.বো,চ.বো.'১৬; দি.বো.'১৪; রা.বো.'০৯]

$$\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$[c_1' = c_1 - bc_3; c_2' = c_2 + ac_3]$

Solution

$$\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2+2b^2 & 2ab-2ab & -2b \\ 2ab-2ab & 1-a^2+b^2+2a^2 & 2a \\ 2b-b+a^2b+b^3 & -2a+a-a^3-ab^2 & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$$ $[c_1' = c_1 - bc_3; c_2' = c_2 + ac_3]$

$$= \begin{vmatrix} 1+a^2+b^2 & 0 & -2b \\ 0 & 1+a^2+b^2 & 2a \\ b(1+a^2+b^2) & -a(1+a^2+b^2) & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$$= (1+a^2+b^2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2b \\ 0 & 1 & 2a \\ b & -a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$$= (1+a^2+b^2)^2\{1-a^2-b^2+2a^2+0+2b(-b)\}$$ [১ম কলামের মাধ্যমে বিস্তৃতি]

$$= (1+a^2+b^2)^2(1-a^2-b^2+2a^2+2b^2)$$

$$= (1+a^2+b^2)^3$$

$=$ R.H.S. **[Proved]**

Problems

প্রশ্ন ৩- $$\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$$

[BIT: '98-99; কু.বো:"১২,০৪"]

Solution

$$\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a(b^2+c^2) & ab^2 & c^2a \\ a^2b & b(c^2+a^2) & bc^2 \\ ca^2 & b^2c & c(a^2+b^2) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} 0 & ab^2 & c^2a \\ -2bc^2 & b(c^2+a^2) & bc^2 \\ -2b^2c & b^2c & c(a^2+b^2) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-2bc\cdot b\cdot c}{abc}\begin{vmatrix} 0 & ab & ac \\ c & c^2+a^2 & bc \\ b & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-2bc}{a}\cdot a\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ c & c^2+a^2 & bc \\ b & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$$

$$= -2bc\{-c(a^2b+b^3-bc^2)+b(b^2c-c^3-ca^2)\}$$

$$= -2bc\{-a^2bc-b^3c+bc^3+b^3c-bc^3-a^2bc\}$$

$$= -2bc(-2a^2bc)$$

$$= 4a^2b^2c^2$$

$$= R.H.S.$$

[Proved]

Problems

প্রশ্ন ৪- $$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b^2) \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$$ [কু.বো:'০৩]

Solution

$$L.H.S = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b^2) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2-(b+c)^2 & a^2-(b+c)^2 \\ b^2 & (c+a)^2-b^2 & 0 \\ c^2 & 0 & (a+b)^2-c^2 \end{vmatrix} \quad [c_2' = c_2 - c_1, c_3' = c_3 - c_1]$$

$$= \begin{vmatrix} (b+c)^2 & (a+b+c)(a-b-c) & (a+b+c)(a-b-c) \\ b^2 & (c+a+b)(c+a-b) & 0 \\ c^2 & 0 & (a+b+c)(a+b-c) \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} (b+c)^2 & (a-b-c) & (a-b-c) \\ b^2 & (c+a-b) & 0 \\ c^2 & 0 & (a+b-c) \end{vmatrix}$$

Solution

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} (b+c)^2 & (a-b-c) & (a-b-c) \\ b^2 & (c+a-b) & 0 \\ c^2 & 0 & (a+b-c) \end{vmatrix}$$

$[r_1' = r_1 - r_2 - r_3]$

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 2bc & -2c & -2b \\ b^2 & (c+a-b) & 0 \\ c^2 & 0 & (a+b-c) \end{vmatrix}$$

[২য় কলামকে b এবং ৩য় কলামকে c দ্বারা গুন করে]

$$= \frac{2(a+b+c)^2}{bc} \begin{vmatrix} bc & -bc & -bc \\ b^2 & bc+ab-b^2 & 0 \\ c^2 & 0 & ca+bc-c^2 \end{vmatrix}$$

$[c_2' = c_2 + c_1, c_3' = c_3 + c_1]$

$$= \frac{2(a+b+c)^2}{bc} \begin{vmatrix} bc & 0 & 0 \\ b^2 & bc+ab & b^2 \\ c^2 & c^2 & ca+bc \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2(a+b+c)^2}{bc} . bc \begin{vmatrix} b(c+a) & b^2 \\ c^2 & c(a+b) \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c)^2 \begin{vmatrix} c+a & b \\ c & a+b \end{vmatrix}$$

$$= 2bc(a+b+c)^2(ca+bc+a^2+ab-bc)$$

$$= 2bc(a+b+c)^2 \cdot a(a+b+c)$$

$$= 2abc(a+b+c)^3$$

$$= R.H.S.$$

[Proved]

Problems

প্রশ্ন ৫- প্রমান করঃ $\begin{vmatrix} \log x & \log y & \log z \\ \log 2x & \log 2y & \log 2z \\ \log 3x & \log 3y & \log 3z \end{vmatrix} = 0$

[CUET:'09-10; KUET:'07-08; RUET:'11-12; BIT:'00-01 ব.বো.'১৩]

Solution

$$\begin{vmatrix} \log x & \log y & \log z \\ \log 2x & \log 2y & \log 2z \\ \log 3x & \log 3y & \log 3z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \log x & \log y & \log z \\ \log 2x - \log x & \log 2y - \log y & \log 2z - \log z \\ \log 3x - \log x & \log 3y - \log y & \log 3z - \log z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \log x & \log y & \log z \\ \log(2x/x) & \log(2y/y) & \log(2z/z) \\ \log(3x/x) & \log(3y/y) & \log(3z/z) \end{vmatrix} \quad [r_2' = r_2 - r_1, r_3' = r_3 - r_1]$$

$$= \begin{vmatrix} \log x & \log y & \log z \\ \log 2 & \log 2 & \log 2 \\ \log 3 & \log 3 & \log 3 \end{vmatrix}$$

$$= \log 2 . \log 3 \begin{vmatrix} \log x & \log y & \log z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \log 2 \log 3 \times 0$$

[যেহেতু দুইটি সারি একই]

$$= 0 \quad = R.H.S.$$

[Proved]

Problems

প্রশ্ন ৬- $\begin{vmatrix} 1 & \cos 2\alpha & \sin\alpha \\ 1 & \cos 2\beta & \sin\beta \\ 1 & \cos 2\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix} = 2(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)(\sin\gamma - \sin\alpha)$

[ব.বো.'০৩]

Solution

$$\text{L.H.S} = \begin{vmatrix} 1 & \cos 2\alpha & \sin\alpha \\ 1 & \cos 2\beta & \sin\beta \\ 1 & \cos 2\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \cos 2\alpha - \cos 2\beta & \sin\alpha - \sin\beta \\ 0 & \cos 2\beta - \cos 2\gamma & \sin\beta - \sin\gamma \\ 1 & \cos 2\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix} \quad \begin{bmatrix} r_1' = r_1 - r_2 \\ r_2' = r_2 - r_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos 2\alpha - \cos 2\beta & \sin\alpha - \sin\beta \\ \cos 2\beta - \cos 2\gamma & \sin\beta - \sin\gamma \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 - 2\sin^2\alpha - 1 + 2\sin^2\beta & \sin\alpha - \sin\beta \\ 1 - 2\sin^2\beta - 1 + 2\sin^2\gamma & \sin\beta - \sin\gamma \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta & \sin\alpha - \sin\beta \\ -2\sin^2\beta + 2\sin^2\gamma & \sin\beta - \sin\gamma \end{vmatrix}$$

Solution

$$= \begin{vmatrix} -2(\sin^2\alpha - \sin^2\beta) & \sin\alpha - \sin\beta \\ -2(\sin^2\beta - \sin^2\gamma) & \sin\beta - \sin\gamma \end{vmatrix}$$

$$= -2(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)\begin{vmatrix} \sin\alpha + \sin\beta & 1 \\ \sin\beta + \sin\gamma & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)(\sin\alpha + \sin\beta - \sin\beta - \sin\gamma)$$

$$= -2(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)(\sin\alpha - \sin\gamma)$$

$$= 2(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)(\sin\gamma - \sin\alpha)$$

$$= R.H.S.$$

[Proved]

Problems

প্রশ্ন ৭- $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} = -4\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}$

[BIT: ‘02-03]

Solution

$$\text{L.H.S} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdot 1 \\ \sin\alpha - \sin\beta & \sin\beta - \sin\gamma & \sin\gamma \\ \cos\alpha - \cos\beta & \cos\beta - \cos\gamma & \cos\gamma \end{vmatrix} \quad [c_1' = c_1 - c_2 C_2' = c_2 - c_3]$$

$$= 1. \begin{vmatrix} \sin\alpha - \sin\beta & \sin\beta - \sin\gamma \\ \cos\alpha - \cos\beta & \cos\beta - \cos\gamma \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} & 2\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2} \\ 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2} & 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\beta}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} & 2\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2} \\ -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} & -2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2} \end{vmatrix}$$

Solution

$$= -4\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\begin{vmatrix}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} & \cos\frac{\beta+\gamma}{2}\\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2} & \sin\frac{\beta+\gamma}{2}\end{vmatrix}$$

$$= -4\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\left(\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$= -4\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$= -4\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}$$

$= R.H.S.$ **[Proved]**

Problems

প্রশ্ন ৮- বিস্তার না করে প্রমাণ কর, $\begin{vmatrix} xy(x+y) & yz(y+z) & zx(z+x) \\ xy & yz & zx \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = xyz\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ 1 & 1 & 1 \\ z & x & y \end{vmatrix}$

[সি.বো; ২০১৯]

Solution

$$\text{L.H.S} = \begin{vmatrix} xy(x+y) & yz(y+z) & zx(z+x) \\ xy & yz & zx \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{xyz}\begin{vmatrix} xyz(x+y) & xyz(y+z) & xyz(z+x) \\ xyz & xyz & xyz \\ z & x & y \end{vmatrix} \quad \begin{bmatrix} c',= c_1 z \\ c_2' = c_2 x \\ c_3' = c_3 y \end{bmatrix}$$

$$= \frac{(xyz)(xyz)}{xyz}\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ 1 & 1 & 1 \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$= xyz\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ 1 & 1 & 1 \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$= R.H.S.$ **[Proved]**

Problems

প্রশ্ন ৯- বিস্তার না করে প্রমাণ কর, $D = \begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix} = 0$

[KUET:'09-10; ঢা.বো.'০৯; রা.বো.'০৭,০৩; য.বো.'১৩;]

Solution

মনে করি, $D = \begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix}$

[এখন ১ম, ২য় ও ৩য় সারিকে যথাক্রমে a,b,c দ্বারা গুন করে পাই]

$$D = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a & abc & abc(b+c) \\ b & abc & abc(c+a) \\ c & abc & abc(a+b) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{abc \times abc}{abc}\begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$= abc\begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$= abc\begin{vmatrix} a & 1 & a+b+c \\ b & 1 & a+b+c \\ c & 1 & a+b+c \end{vmatrix} \quad [C_3' = C_3 + C_1]$$

$$= abc(a+b+c)\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 = R.H.S.$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix} = 0$$

[Proved]

Problems

VVI

প্রশ্ন ১০- $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3-1 & y^3-1 & z^3-1 \end{vmatrix} = (xyz-1)(x-y)(y-z)(z-x)$

[ঢা.বো.,সি.বো.',দি.বো. য.বো.''১৮; দি।বো.'১৬,১৫,০৮; সি.বো.'১৫,১৪,১১; ঢা.বো,'১৪,১১,০৬,০৩; রা.বো,'০৬;য.বো,'০৬;]

Solution

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3-1 & y^3-1 & z^3-1 \end{vmatrix}$$

$$= xyz\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$ [২য় নির্ণায়কে ২য় ও ৩য় সারিকে পরস্পর স্থান বিনিময় করে]

$$= xyz\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$ [২য় নির্ণায়কে ১ম ও ২য় সারিকে পরস্পর স্থান বিনিময় করে]

Solution

$$= (xyz-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

$$= (xyz-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x-y & y-z & z \\ x^2-y^2 & y^2-z^2 & z^2 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} c_1' = c_1 - c_2 \\ c_2' = c_2 - c_3 \end{bmatrix}$$

$$= (xyz-1)\begin{vmatrix} x-y & y-z \\ x^2-y^2 & y^2-z^2 \end{vmatrix}$$

$$= (xyz-1)(x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x+y & y+z \end{vmatrix}$$

$$= (xyz-1)(x-y)(y-z)(y+z-x-y)$$

$$= (xyz-1)(x-y)(y-z)(z-x) \quad = R.H.S.$$

[Proved]

Problems

VVI

প্রশ্ন ১১- $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$

[দি.বো.'১১,০৯; য.বো.'১৫,০৭; মা.বো.'০৮;]

Solution

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2a+2b+2c & a & b \\ 2a+2b+2c & b+c+2a & b \\ 2a+2b+2c & a & c+a+2b \end{vmatrix} \quad [c_1' = c_1 + c_2 + c_3]$$

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & -(a+b+c) & 0 \\ 0 & a+b+c & -(a+b+c) \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix} \quad [r_1' = r_1 - r_2; r_2' = r_2 - r_3]$$

Solution

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} -(a+b+c) & 0 \\ a+b+c & -(a+b+c) \end{vmatrix}$$ [১ম কলামের মাধ্যমে বিস্তৃতি করে]

$$= 2(a+b+c)\{(a+b+c)^2 - 0\}$$

$$= 2(a+b+c)^3$$

= R.H.S.

[Proved]

Problems

VVI

প্রশ্ন ১২-
$$\begin{vmatrix} a^2 & bc & ca+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ca \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$$

[ঢা.বো.'১৬; রা.বো.'১৫,১৩; দি.বো.'১৫; য.বো.'০৮,০৪;]

Solution

$$\text{L.H.S} = \begin{vmatrix} a^2 & bc & ca + c^2 \\ a^2 + ab & b^2 & ca \\ ab & b^2 + bc & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= abc \begin{vmatrix} a & c & a + c \\ a + b & b & a \\ b & b + c & c \end{vmatrix}$$

$$= abc \begin{vmatrix} 0 & c & a + c \\ 2b & b & a \\ 2b & b + c & c \end{vmatrix} \quad [c_1' = c_1 + c_2 - c_3]$$

$$= 2b \times abc \begin{vmatrix} 0 & c & a + c \\ 1 & b & a \\ 1 & b + c & c \end{vmatrix}$$

$$= 2ab^2c \begin{vmatrix} 0 & c & a + c \\ 0 & -c & a - c \\ 1 & b + c & c \end{vmatrix} \quad [r_2' = r_2 - r_3]$$

$$= 2ab^2c \begin{vmatrix} c & a + c \\ -c & a - c \end{vmatrix}$$ [১ম কলামের মাধ্যমে বিস্তৃতি করে]

$$= 2ab^2c^2 \begin{vmatrix} 1 & a + c \\ -1 & a - c \end{vmatrix}$$

$$= 2ab^2c^2(a - c + a + c)$$

$$= 2ab^2c^2(2a)$$

$$= 4a^2b^2c^2$$

$$= R.H.S.$$

[Proved]

CQ

এই অধ্যায় থেকে সৃজনশীলে যে ধরণের প্রশ্ন আসতে পারে–

ক. $Definition\ with\ example,$ যোগ-বিয়োগ, বিস্তার না করে প্রমাণ

খ. $Proof \longrightarrow a, b, c$

p, q, r

l, m, n

x, y, z

গ. $AX = B,$ ক্রেমারের সূত্র ব্যবহার করে সমাধান, A^{-1} ***

3×3

CQ

ঢাকা বোর্ড - ২০১৯

$$A = \begin{bmatrix} a & a+1 \\ -a+1 & -a \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ এবং $$C = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ক. $a = 5$ হলে দেখাও যে, a একটি অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স।

খ. B^T এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

গ. $BX = C$ হলে, ক্রেমারের সূত্র ব্যবহার করে সমাধান কর।

Solution

(ক)

দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} a & a+1 \\ -a+1 & -a \end{bmatrix}$ এবং, $a = 5$ $\therefore A = \begin{bmatrix} 5 & 5+1 \\ -5+1 & -5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 25-24 & 30-30 \\ -20+20 & -24+25 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

অতএব, A ম্যাট্রিক্সটি অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স [দেখানো হলো]

Solution

(খ)

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

এখন,

$$|B^T| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 2(0-8) - 1(-5-12) + 3(2-0)$$

$$= -16 + 17 + 6$$

$$= 7 \neq 0$$

[বিপরীতযোগ্য]

$$B^T_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = (0-8) = -8$$

$$B^T_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -(-5-12) = 17$$

$$B^T_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (2-0) = 2$$

$$B^T_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -(-5-6) = 11$$

$$B^T_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -(-5-6) = 11$$

Solution

$$B^T_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(4-3) = -1$$

$$B^T_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = (4-0) = 4$$

$$B^T_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(8-3) = -5$$

$$B^T_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (0-1) = -1$$

সুতরাং, সহগুণক ম্যাট্রিক্স $= \begin{bmatrix} -8 & 17 & 2 \\ 11 & -19 & -1 \\ 4 & -5 & -1 \end{bmatrix}$

$$\therefore adj(B^T) = \begin{bmatrix} -8 & 17 & 2 \\ 11 & -19 & -1 \\ 4 & -5 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -8 & 11 & 4 \\ 17 & -19 & -5 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

অতএব, B^T এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স $= \frac{1}{|B^T|} adj(B^T)$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -8 & 11 & 4 \\ 17 & -19 & -5 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Answer

Solution

(গ) $BX = C$

বা, $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

বা, $2x + y + 3z = 4$

$x + 0 + 2z = 0$

$3x + 4y - 5z = 2$

$\therefore D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix}$

$= 2(0-8) - 1(-5-6) + 3(4-0)$

$= -16 + 11 + 12$

$= 7$

$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix}$

$= 4(0-8) - 1(0-4) + 3(0-0)$

$= -32 + 4$

$= -28$

$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}$

$= 2(0-4) - 4(-5-6) + 3(2-0)$

$= -8 + 44 + 6$

$= 42$

Solution

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(0-0) - 1(2-0) + 4(4-0)$$

$$= -2 + 16$$

$$= 14$$

$$\therefore x = \frac{D_x}{D} = \frac{-28}{7} = -4; \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{42}{7} = 6; \qquad z = \frac{D_z}{D} = \frac{14}{7} = 2$$

নির্ণেয় সমাধান, (x, y, z)=(-4, 6, 2);

CQ

যশোর বোর্ড - ২০১৯

$$A = \begin{bmatrix} 3+x & 4 & 2 \\ 4 & 2+x & 3 \\ 2 & 3 & 4+x \end{bmatrix}$$

ক. $B + 2I = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ হলে B নির্ণয় কর।

খ. $|A| = 0$ হলে সমাধান সেট নির্ণয়।

গ. $\mathrm{x} = -1$ হলে, A^{-1} নির্ণয় কর।

Solution

(ক)

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 2I$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \left[\because I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4-2 & 3-0 \\ 2-0 & 5-2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Answer

Solution

(খ)
$$A = \begin{bmatrix} 3+x & 4 & 2 \\ 4 & 2+x & 3 \\ 2 & 3 & 4+x \end{bmatrix}$$

এখন, $|A| = 0$

বা, $\begin{vmatrix} 3+x & 4 & 2 \\ 4 & 2+x & 3 \\ 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$

বা, $\begin{vmatrix} 3+x+4+2 & 4 & 2 \\ 4+2+x+3 & 2+x & 3 \\ 2+3+4+x & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$ $[c_1' = c_1 + c_2 + c_3]$

বা, $\begin{vmatrix} x+9 & 4 & 2 \\ x+9 & 2+x & 3 \\ x+9 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$

Solution

$$\text{বা,} (x+9)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2+x & 3 \\ 1 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{বা,} (x+9)\begin{vmatrix} 0 & 2-x & -1 \\ 0 & x-1 & -1-x \\ 1 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{bmatrix} r_1' = r_1 - r_2 \\ r_2' = r_2 - r_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{বা,} (x+9)\begin{vmatrix} -(x-2) & -1 \\ x-1 & -(1+x) \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{বা,} (x+9)\{(x-2)(x+1) + f(x-1)\} = 0$$

$$\text{বা,} (x+9)(x^2 + x - 2x - 2 + x - 1) = 0$$

$$\text{বা,} (x+9)(x^2 - 3) = 0$$

$\therefore x = -9$

অথবা, $x^2 = 3$

$\therefore x = \pm\sqrt{3}$

$\therefore x = -9, \pm\sqrt{3}$

Solution

(গ)

$$A = \begin{bmatrix} 3+x & 4 & 2 \\ 4 & 2+x & 3 \\ 2 & 3 & 4+x \end{bmatrix}$$

$x = -1$ হলে, $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

$$\therefore |A| = 2(3-9) - 4(12-6) + 2(12-2)$$
$$= -12 - 24 + 20$$
$$= -16 \neq 0$$

$\therefore A^{-1}$ নির্ণয়যোগ্য।

Solution

যশোর বোর্ড-২০১৯

এখন,

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 3\\3 & 3\end{vmatrix} = (3-9) = -6$

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4 & 3\\2 & 3\end{vmatrix} = -(12-6) = -6$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4 & 1\\2 & 3\end{vmatrix} = 12-2 = 10$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}4 & 2\\3 & 3\end{vmatrix} = -(12-6) = -6$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & 2\\2 & 3\end{vmatrix} = (6-4) = 2$

$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & 4\\2 & 3\end{vmatrix} = -(6-8) = 2$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}4 & 2\\1 & 3\end{vmatrix} = (12-2) = 10$

$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & 2\\4 & 3\end{vmatrix} = -(6-8) = 2$

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & 4\\4 & 1\end{vmatrix} = (2-16) = -14$

$$\therefore adj(A) = \begin{bmatrix}-6 & -6 & 10\\-6 & 2 & 2\\10 & 2 & -14\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}-6 & -6 & 10\\-6 & 2 & 2\\10 & 2 & -14\end{bmatrix}$$

$$= -2\begin{bmatrix}3 & 3 & -5\\3 & -1 & -1\\-5 & -1 & 7\end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{adjA}{|A|}$$

$$= \frac{1}{-16} \times (-2)\begin{bmatrix}3 & 3 & -5\\3 & -1 & -1\\-5 & -1 & 7\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix}3 & 3 & -5\\3 & -1 & -1\\-5 & -1 & 7\end{bmatrix}$$

Answer

CQ

সিলেট বোর্ড - ২০১৯

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(t) = t^2 - 3t + 2$$

সমীকরণ জোটঃ

$$x + y + z = 6$$
$$x - 2y + 2z = 3$$
$$2x + y - z = 1$$

ক. বিস্তার না করে প্রমাণ কর যে,

$$\begin{vmatrix} xy(x+y) & yz(y+z) & zx(z+x) \\ xy & yz & zx \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = xyz\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ 1 & 1 & 1 \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

খ. $f(A)$ নির্ণয় কর।

গ. সমীকরণ জোটটি বিপরীত ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে সমাধান কর।

Solution

(ক)

$$L.H.S = \begin{vmatrix} xy(x+y) & yz(y+z) & zx(z+x) \\ xy & yz & zx \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{xyz}\begin{vmatrix} xyz(x+y) & xyz(y+z) & xyz(z+x) \\ xyz & xyz & xyz \\ z & x & y \end{vmatrix} \qquad \begin{bmatrix} c',= c_1 z \\ c' = c_2 x \\ c_3' = c_3 y \end{bmatrix}$$

$$= \frac{(xyz)(xyz)}{xyz}\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ 1 & 1 & 1 \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$= xyz\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ 1 & 1 & 1 \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$= R.H.S.$$

[Proved]

Solution

(খ) $f(t) = t^2 - 3t + 2$

$\therefore f(A) = A^2 - 3A + 2I$

$$\therefore A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2.2 + 3.2 + (-1).1 & 2.3 + 3.0 + (-1).(-2) & 2.(-1) + 3.2 - 1.0 \\ 2.2 + 0.2 + 2.1 & 2.3 + 0.0 + 2(-2) & 2(-1) + 0.2 + 2.0 \\ 1.2 + 2(-2) + 0.1 & 1.3 + (-2).0 + 0.(-2) & 1(-1) + (-2).2 + 0.0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 + 6 - 1 & 6 + 0 + 2 & -2 + 6 - 0 \\ 4 + 0 + 26 & 6 + 0 - 4 & -2 + 0 + 0 \\ 2 - 4 + 0 & 3 - 0 - 0 & -1 - 4 - 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 8 & 4 \\ 6 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Solution

$$\therefore f(A) = A^2 - 3A + 2I$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 8 & 4 \\ 6 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -5 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 8 & 4 \\ 6 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -9 & 3 \\ -6 & 0 & -6 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & -6 & +2 & 8-9+0 & 4+3+0 \\ 6 & -6 & +0 & 2+0+2 & -2-6+0 \\ -2 & -3 & +0 & 3+6+0 & -5-0+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 0 & 4 & -8 \\ -5 & 9 & -3 \end{bmatrix}$$

Answer

Solution

(গ) প্রদত্ত সমীকরণ জোটটি নিম্নরূপঃ

$$x + y + z = 6$$
$$x - 2y + 2z = 3$$
$$2x + y - z = 1$$

ম্যাট্রিক্স আকারে লিখে পাই,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$\therefore X = A^{-1}B \ldots\ldots\ldots..(i)$$

এখানে,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= 1(2 - 2) - 1(-1 - 4) + 1(1 + 4)$$

$$= 0 + 5 + 5$$

$$= 10 \neq 0$$

$\therefore A^{-1}$ বিদ্যমান

Solution

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 4) = 5$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1 + 4) = 5$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 1) = 2$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1 - 2) = -3$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 2) = 1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = (2 + 2) = 4$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 1) = -1$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2 - 1) = -3$$

$$\therefore \text{adj}\, A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$$

$$= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Solution

(i) হতে পাই,

$$X = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0+6+4 \\ 30-9-1 \\ 30+3-3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3$

সুতরাং, নির্ণয় সমাধানঃ $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ **Answer**

CQ

HSC-2018 (ঢাকা, যশোর, সিলেট ও দিনাজপুর)

দৃশ্যকল্প-১ : $f(x) = 3x^2 + 5x$

দৃশ্যকল্প-২ : $B = \begin{bmatrix} l & m & n \\ l^2 & m^2 & n^2 \\ l^3 - 1 & m^3 - 1 & n^3 - 1 \end{bmatrix}$

ক. যদি $\begin{pmatrix} x & 2 \\ x & 2 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হয় তবে x এর মান নির্ণয় কর।

খ. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \\ 4 & -7 & 5 \end{bmatrix}$ হলে $f(A)$ নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রমাণ কর যে, $|B| = (lmn - 1)(l - m)(m - n)(n - l)$

Solution

HSC-2018 (ঢাকা, যশোর, সিলেট ও দিনাজপুর)

(ক)

$\begin{bmatrix} x & 2 \\ x & 2 \end{bmatrix}$ ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হবে যদি,

$\begin{bmatrix} x & 2 \\ x & 2 \end{bmatrix} = 0$ হয়

$2x - 2x = 0$

অতএব, x এর সকল বাস্তব মানের জন্য প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হবে

অর্থাৎ $x \in \mathbb{R}$

Answer

Solution

(খ)

HSC-2018 (ঢাকা, যশোর, সিলেট ও দিনাজপুর)

দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \\ 4 & -7 & 5 \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \\ 4 & -7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \\ 4 & -7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-1+20 & 2+4-35 & 10+3+25 \\ -2-4+12 & -1+16-21 & -5+12+15 \\ 8+7+20 & 4-28-25 & 20-21+25 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 23 & -29 & 38 \\ 6 & -6 & 22 \\ 35 & -59 & 24 \end{bmatrix}$$

Solution

HSC-2018 (ঢাকা, যশোর, সিলেট ও দিনাজপুর)

দেওয়া আছে, $f(x) = 3x^2 + 5x$

$$\therefore f(A) = 3A^2 + 5A$$

$$= 3\begin{bmatrix} 23 & -29 & 38 \\ 6 & -6 & 22 \\ 35 & -59 & 24 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \\ 4 & -7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 69 & -87 & 114 \\ 18 & -18 & 66 \\ 105 & -177 & 72 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 5 & 25 \\ -5 & 20 & 15 \\ 20 & -35 & 25 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 69+10 & -87+5 & 114+25 \\ 18-5 & -18+20 & 66+15 \\ 105+20 & -177-35 & 72+25 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 79 & -82 & 139 \\ 13 & 2 & 81 \\ 125 & -212 & 97 \end{bmatrix}$$

Answer

Solution

HSC-2018 (ঢাকা, যশোর, সিলেট ও দিনাজপুর)

(গ)

$$B = \begin{bmatrix} l & m & n \\ l^2 & m^2 & n^2 \\ l^3-1 & m^3-1 & n^3-1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |B| = \begin{bmatrix} l & m & n \\ l^2 & m^2 & n^2 \\ l^3-1 & m^3-1 & n^3-1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} l & m & n \\ l^2 & m^2 & n^2 \\ l^3 & m^3 & n^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l & m & n \\ l^2 & m^2 & n^2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= lmn\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l & m & n \\ l^2 & m^2 & n^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} l & m & n \\ l^2 & m^2 & n^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= lmn\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l & m & n \\ l^2 & m^2 & n^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l & m & n \\ 1 & 1 & 1 \\ l^2 & m^2 & n^2 \end{vmatrix}$$

$$= lmn\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l & m & n \\ l^2 & m^2 & n^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l & m & n \\ l^2 & m^2 & n^2 \end{vmatrix}$$

$$= (\mathrm{lmn}-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l & m & n \\ l^2 & m^2 & n^2 \end{vmatrix}$$

$$= (lmn-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ l-m & m-n & n \\ l^2-m^2 & m^2-n^2 & n^2 \end{vmatrix} \quad \begin{bmatrix} c_1' = c_1 - c_2 \\ c_2' = c_2 - c_3 \end{bmatrix}$$

$$= (\mathrm{lm}n-1)(l-m)(m-n)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & n \\ l+m & m+n & n^2 \end{vmatrix}$$

$$= (\mathrm{lm}n-1)(l-m)(m-n)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ l+m & m+n \end{vmatrix}$$

$$= (\mathrm{lm}n-1)(l-m)(m-n)(m+n-l-m)$$

$$= (\mathrm{lm}n-1)(l-m)(m-n)(n-l)$$

[Proved]

CQ

যশোর বোর্ড - ২০১৭

$x + y + z = 1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. (i)$

$lx + my + nz = k \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. (ii)$

$l^2x + m^2y + n^2z = k^2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. (iii)$

ক. $2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + F = I_2$ হলে, F ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর; যেখানে I_2 একটি অভেদ ম্যাট্রিক্স।

খ. সমীকরণগুলোকে $AX = B$ আকারে প্রকাশ করে দেখাও যে, $\det(A) = (l - m)(m - n)(n - l)$

গ. x, y, z এর সহগ নিয়ে গঠিত A একটি ম্যাট্রিক্স। A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর; যেখানে $l = 1$, $m = 2, n = -1$.

Solution

(ক)

$$2\begin{bmatrix}1 & -2\\2 & -1\end{bmatrix} + F = I_2$$

$$\text{বা, }\begin{bmatrix}2 & -4\\4 & -2\end{bmatrix} + F = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \quad \therefore I_2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\therefore F = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & -4\\4 & -2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1-2 & 0-(-4)\\0-4 & 1-(-2)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-1 & 4\\-4 & 3\end{bmatrix}$$

Answer

Solution

যশোর বোর্ড - ২০১৭

(খ)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l & m & n \\ l^2 & m^2 & n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ k^2 \end{bmatrix}$$

এখন, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l & m & n \\ l^2 & m^2 & n^2 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l & m & n \\ l^2 & m^2 & n^2 \end{bmatrix}$$

$$= (l - \mathrm{m})(\mathrm{m} - \mathrm{n}) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \mathrm{n} \\ l + \mathrm{m} & \mathrm{m} + \mathrm{n} & \mathrm{n}^2 \end{vmatrix}$$

$$= (l - \mathrm{m})(\mathrm{m} - \mathrm{n})1\,.(\mathrm{m} + \mathrm{n} - l - \mathrm{m})$$

$$= (l - \mathrm{m})(\mathrm{m} - \mathrm{n})(\mathrm{n} - l)$$

$\therefore \det(A) = (l - m)(m - n)(n - l)$ [দেখানো হলো]

Solution

(গ)

$L=1, m=2, n=-1$ বসিয়ে,

প্রদত্ত সমীকরণ, $x+y+z=1$

$x+2y-z=\mathrm{k}$

$x+4y+z=\mathrm{k}^2$

প্রদত্ত সমীকরণত্রয় থেকে প্রাপ্ত ম্যাট্রিক্স,

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 4 & 1\end{bmatrix} [\because l=1 m=2 n=-1]$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 4 & 1\end{vmatrix}$$

$$=1(2+4)-1(1+1)+1(4-2)$$

$$=6-2+2=6$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=(2+4)=6$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-(1+1)=-2$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=4-2=2$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-(1-4)=3$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=(1-1)=0$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 4\end{vmatrix}=(4-1)=-3$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-(-1-2)=-3$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-(-1-1)=2$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=(2-1)=1$$

Solution

A এর সহগুনক ম্যাট্রিক্স $= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

এখন,

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

অতএব, A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স,

$$\therefore A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|}$$

$$= \frac{1}{6} \times \begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Answer

Problems

প্রশ্ন নং-15 : একটি দোকানের পরপর তিন দিনে তিন প্রকারের কলম বিক্রয় নিম্নের তালিকায় দেওয়া হলোঃ

	কলমের ডজন সংখ্যা		
	I প্রকারের কলম	II প্রকারের কলম	III প্রকারের কলম
১ম দিন	1	2	3
২য় দিন	1	3	5
৩য় দিন	1	5	12
প্রতি ডজনে লাভ (টাকায়)	14	10	8

A ও B যথাক্রমে কলমের ডজন সংখ্যা ম্যাট্রিক্স ও লাভ ম্যাট্রিক্স সূচিত।

(ক) A ও B ম্যাট্রিক্স দুইটি নির্ণয় করে ঐ তিন দিনের মোট লাভ নির্ণয় কর।

(খ) A^2 নির্ণয় কর।

(গ) A^{-1} নির্ণয় কর।

Solution

(ক)

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 5\\1 & 5 & 12\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}14\\10\\8\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 5\\1 & 5 & 12\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}14\\10\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14+20+24\\14+30+40\\14+50+96\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}58\\84\\160\end{bmatrix}$$

তিন দিনের মোট লাভ $= 58+84+160$

$= 302$ টাকা

Solution

(খ)

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+2+3 & 2+6+15 & 3+10+36 \\ 1+3+5 & 2+9+60 & 3+15+60 \\ 1+5+12 & 2+15+60 & 3+25+144 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 23 & 49 \\ 9 & 36 & 78 \\ 18 & 77 & 172 \end{bmatrix}$$

Answer

Solution

(গ)

$$|A| = 1(36-25) - 2(12-5) + 3(5-3) = 11 - 14 + 6 = 3 \neq 0$$

$|A|$ সহগুণকগুলি, $A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = -7$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = -7,$ $A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = -9,$ $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = 9$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -3,$ $A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -2,$ $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$

$$\text{Adj}\,(A) = \begin{bmatrix} 11 & -7 & 2 \\ -9 & 9 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}\,(A)$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 11 & -7 & 2 \\ -9 & 9 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Answer

Problems

প্রশ্ন নং-14: রনি, জনি ও মনি বাজার হতে যথাক্রমে 7 টাকা, 16 টাকা ও 22 টাকা নিয়ে তিন প্রকারের দ্রব্য কিনে আনল। যাদের একক মূল্য যথাক্রমে x , y, z টাকা। রনি প্রতিটি দ্রব্যের 1টি করে, জনি দ্রব্য তিনটির যথাক্রমে 1টি, 2টি ও 3টি এবং মনি দ্রব্য তিনটির যথাক্রমে 1টি, 3টি ও 4টি করে কিনে।

(ক) উপরের বর্ণনা অনুযায়ী একটি সরল সমীকরণ জোট গঠন কর।

(খ) উদ্দীপকে বর্ণিত x, y, z দ্বারা গঠিত সমীকরণ জোট তিনটির সহগ দ্বারা নির্ণীত ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

(গ) x, y, z –এর মান নির্ণয় কর।

Solution

(ক) সরল সমীকরণ জোটটি নিম্নরূপঃ

$$x + y + z = 7$$
$$x + 2y + 3z = 16$$
$$x + 3y + 4z = 22$$

(খ) নিজে করো

(গ) নিজে করো

MCQ

(১) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ একটি- [সি.বো.'১৯]

(ক) কর্ণ ম্যাট্রিক্স

(খ) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স ✔

(গ) স্কেলার ম্যাট্রিক্স

(ঘ) ব্যাতিক্রম ম্যাট্রিক্স

MCQ

Solve: **কর্ণ ম্যাট্রিক্স :** যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের উপাদান গুলো অশূন্য এবং অন্য সব উপাদান শূন্য তাকে কর্ণ ম্যাট্রিক্স বলে। $A=(a_{ij})_{m\times n}$ $a_{ij}=0, i\neq j$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$a=b=c$ হলে স্কেলার ম্যাট্রিক্স

$a=b=c=1$ অভেদক ম্যাট্রিক্স

প্রতিসম ম্যাট্রিক্স : একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং এর ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স পরস্পর সমান হলে তাকে প্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলে।

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^t \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ব্যাতিক্রম ম্যাট্রিক্স : যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান শূন্য তাকে ব্যাতিক্রমী ম্যাট্রিক্স বলে।

MCQ

(২) a-এর মান কত হলে $\begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & a \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি প্রতিসম হবে? [চ.বো'১৭]

(ক) -4

(খ) -2

(গ) 0

(ঘ) 4 ✔

Solve:

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & a \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}^t \rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ -2 & a & 0 \end{bmatrix}$$

MCQ

(৩) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি একটি-

i) বর্গ ম্যাট্রিক্স

ii) অভেদক ম্যাট্রিক্স

iii) স্কেলার ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক? [সকল বোর্ড'১৮]

(ক) i ও ii

(খ) i ও iii ✓

(গ) ii ও iii

(ঘ) i, ii ও iii

MCQ

(৪) $A+B=\begin{bmatrix}2 & -3\\4 & -1\end{bmatrix}$ এবং $A-B=\begin{bmatrix}4 & 5\\-2 & 7\end{bmatrix}$ হলে নিচের কোনটি B ম্যাট্রিক্স? **[ব.বো'১৯]**

(ক) $\begin{bmatrix}-1 & -4\\3 & -4\end{bmatrix}$ ✔

(খ) $\begin{bmatrix}-1 & 1\\3 & 3\end{bmatrix}$

(গ) $\begin{bmatrix}6 & 2\\2 & 6\end{bmatrix}$

(ঘ) $\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 3\end{bmatrix}$

Solve: ম্যাট্রিক্সের যোগ-বিয়োগ এর শর্তঃ মাত্রা বা আকার একই হবে

$$(A+B)-(A-B)=\begin{bmatrix}2 & -3\\4 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & 5\\-2 & 7\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2B=\begin{bmatrix}-2 & -8\\6 & -8\end{bmatrix} \quad \therefore B=\begin{bmatrix}-1 & -4\\3 & -4\end{bmatrix}$$

MCQ

(৫) $A=\begin{bmatrix}3 & 5 & 1\\4 & 0 & 2\\1 & 6 & 4\end{bmatrix}$ এবং $A-2I=$? [রা.বো'১৭]

(ক) $\begin{bmatrix}5 & 5 & 1\\4 & 2 & 2\\1 & 6 & 6\end{bmatrix}$

(খ) $\begin{bmatrix}1 & 5 & 1\\4 & -2 & 2\\1 & 6 & 2\end{bmatrix}$ ✔

(গ) $\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\4 & 0 & 2\\1 & 6 & 4\end{bmatrix}$

(ঘ) $\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\2 & -2 & 0\\-1 & 4 & 2\end{bmatrix}$

Solve: $A\text{-}2I=\begin{bmatrix}3 & 5 & 1\\4 & 0 & 2\\1 & 6 & 4\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1 & 5 & 1\\4 & -2 & 2\\1 & 6 & 2\end{bmatrix}$

MCQ

(৬) নিচের কোন নির্ণায়কের মান শূন্য? [ব.বো'১৭]

(ক) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

(খ) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

(গ) ✔ $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

(ঘ) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix}$

Solve: দুটি কলাম বা দুটি সারি একই হলে মান শূন্য।

MCQ

(৭) A ম্যাট্রিক্সের $p \times n$ এবং B ম্যাট্রিক্সের ক্রম $n \times m$ হলে AB ম্যাট্রিক্সের ক্রম কোনটি? [রা.বো.'১৯]

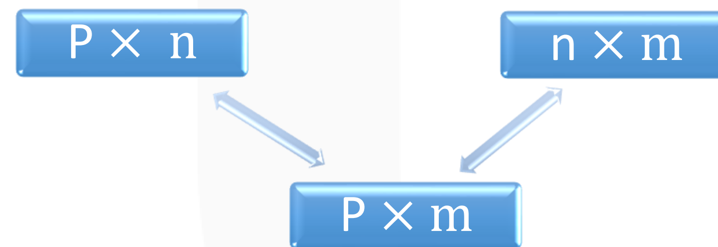
(ক) $p \times m$ ✔

(খ) $n \times p$

(গ) $m \times n$

(ঘ) $m \times p$

Solve: ম্যাট্রিক্সের গুণের শর্ত



MCQ

(৮) A এবং B ম্যাট্রিক্সের ক্রম যথাক্রমে 4×5 এবং 5×4 হলে AB ম্যাট্রিক্সের ক্রম- **[চ.বো'১৯, রা.বো'১৭]**

(ক) 5×4

(খ) 5×5

(গ) 4×5

(ঘ) 4×4 ✔

(৯) $P=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ এবং $Q=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ হলে PQ এর ক্রম কত? **[কু.বো,'১৯]**

(ক) 1×2

(খ) 2×1 ✔

(গ) 4×1

(ঘ) 4×4

MCQ

(১০) $P=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ এবং $Q=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$ হলে, PQ এর মান কত- [য.বো,'১৯]

(ক) $[8]$ ✔

(খ) $[1476]$

(গ) $\begin{bmatrix}0\\2\\6\end{bmatrix}$

(ঘ) $\begin{bmatrix}0 & 2 & 6\end{bmatrix}$

Solve: $(1\times 3) \quad (3\times 1)$

$=(1\times 1)$

$$PQ=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$=[0+2+6]$$

$$=[8]$$

MCQ

(১১) A,B এবং C ম্যাট্রিক্সগুলির মাত্রা যথাক্রমে $4\times 3, 3\times 4$ এবং 7×4 হলে $(B+A^T)C^T$ ম্যাট্রিক্সের মাত্রা কত? [ব.বো,'১৯]

(ক) 3×4

(খ) 3×7 ✔

(গ) 4×3

(ঘ) 4×7

Solve: $A=4\times 3 \Rightarrow A^T=3\times 4$

$B=3\times 4$

$C=7\times 4 \Rightarrow C^T=4\times 7$

$\therefore (3\times 4)(4\times 7)$

$=3\times 7$

MCQ

(১২) $A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির $(2, 3)$ তম সহগুণক কোনটি? **[সকল বোর্ড'১৮]**

(ক) -8 ✔

(খ) -3

(গ) 8

(ঘ) 17

Solve: সহগুণক$= (-1)^{r+c} \times$ অনুরাশি

MCQ

(১৩) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & x \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির $(1, 2)$ তম অনুরাশি -3 হলে, x এর মান- **[য.বো'১৮]**

(ক) -12

(খ) -3

(গ) 3 ✔

(ঘ) 12

Solve: ম্যাট্রিক্সের পরিচয়ঃ $A=(a_{ij})_{m\times n}$

ভুক্তির পরিচয়

Order/মাত্রা

$\begin{vmatrix} 0 & x \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 \quad \Rightarrow -x = -3 \quad \therefore x = 3$

DOWNLOAD THE APP

MCQ

10 MINUTE SCHOOL

(১৪) কর্ণ ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে-

i) $a_{ij} \neq 0, i = j$

ii) $a_{ij} = 0, i > j$

iii) $a_{ij} = 0, i < j$

নিচের কোনটি সঠিক? [ঢা.বো'১৯]

(ক) i ও ii

(খ) i ও iii

(গ) ii ও iii

(ঘ) i, ii ও iii

MCQ

(১৫) k এর মান কত হলে $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & k \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যাতিক্রমী হবে? **[সি.বো'১৯]**

(ক) -10

(খ) 0

(গ) 3

(ঘ) 10 ✔

Solve: ব্যাতিক্রমী ম্যাট্রিক্সঃ $3k-30 = 0$

$\therefore k = 10$

MCQ

(১৬) $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ হলে, $Adj(A)=?$ [য.বো'১৯]

(ক) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

(খ) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(গ) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ ✔

(ঘ) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

Solve: $A_{11} = 1,\quad A_{12}=(-)(4) = -4$

$A_{21} = (-)3,\quad A_{22}= (2) = 2$

$\therefore Adj=\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

MCQ

(১৭) $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 5 & -3\end{bmatrix}$ হলে, নিচের কোনটির মান A^{-1}? [ঢা.বো'১৯]

(ক) $\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 5 & 2\end{bmatrix}$

(খ) $\begin{bmatrix}-3 & -1\\ -5 & -2\end{bmatrix}$

(গ) $\begin{bmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{bmatrix}$ ✔

(ঘ) $\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -5 & -2\end{bmatrix}$

Solve : Shortcut,

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

MCQ

(১৮) $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}$ এর A^{-1} কোনটি? [রা.বো'১৯]

(ক) $\dfrac{1}{\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}}$

(খ) $\dfrac{1}{24}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}$

(গ) $24\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}$

(ঘ) ✔ $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\0 & \frac{1}{3} & 0\\0 & 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$

Solve :

$$\begin{matrix}2 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 4\end{matrix}$$

কর্ণ ম্যাট্রিক্সের মূখ্যকর্ণ বরাবর ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যা থাকলে ইনভার্স ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে মূখ্যকর্ণ বরাবর ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যাগুলো উল্টিয়ে দিলেই হবে।

MCQ

(১৯) $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ হলে-

i) $|A|$ এর মান -7

ii) $(1, 2)$ তম ভুক্তির সহগুণক 5

iii) $(2, 1)$ তম ভুক্তির অনুরাশি 3

নিচের কোনটি সঠিক? **[সি.বো'১৯]**

(ক) i ও ii

(খ) i ও iii ✔

(গ) ii ও iii

(ঘ) i, ii ও iii

MCQ

(২০) $A=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির-

i) মান 0

ii) (2, 3) তম ভূক্তির অনুরাশি 5

iii) (2, 1) তম ভূক্তির সহগুণক 0

নিচের কোনটি সঠিক? **[রা.বো'১৯]**

(ক) i ও ii

(খ) ii ও iii

(গ) i ও iii ✔

(ঘ) i, ii ও iii

MCQ

(২১) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}$ একটি-

i) বর্গ ম্যাট্রিক্স

ii) ব্যাতিক্রমী ম্যাট্রিক্স

iii) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক? **[কু.বো'১৯]**

(ক) i ও ii

(খ) ii ও iii

(গ) i ও iii ✔

(ঘ) i, ii ও iii

MCQ

** উদ্দীপকের আলোকে (২২ ও ২৩) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix} \quad D=\begin{bmatrix}x & 0 & 0\\ 2 & 4 & 1\\ 3 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

(২২) x এর কোন মানের জন্য |A| = |D| হবে? [চ.বো'১৯]

(ক) -5 (খ) -1 (গ) 1 (ঘ) 5

(২৩) $A^{-1}=?$ [চ.বো'১৯]

(ক) $\frac{1}{10}\begin{bmatrix}2 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}$ (খ) $\frac{1}{10}\begin{bmatrix}2 & -2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ (গ) $\frac{1}{10}\begin{bmatrix}3 & 2\\ -2 & 2\end{bmatrix}$ (ঘ) $\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix}$

MCQ

** নিচের তথ্যের আলোকে (২৪ ও ২৫) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$ একটি ম্যাট্রিক্স-

(২৪) A একটি-

i) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স

ii) স্কেলার ম্যাট্রিক্স

iii) কর্ণ ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক? **[ঢা.বো'১৯]**

(ক) i ও ii (খ) i ও iii ✔ (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

MCQ

** নিচের তথ্যের আলোকে (২৪ ও ২৫) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ একটি ম্যাট্রিক্স-

(২৫) নিচের কোনটি A^{-1}?

(ক) $\frac{1}{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}$

(খ) $\frac{1}{60}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

(গ) $60\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

✔ (ঘ) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

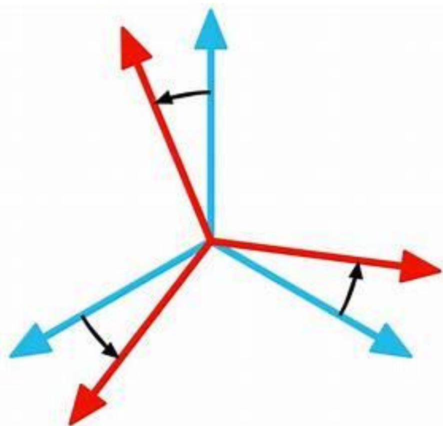
কর্ণ ম্যাট্রিক্সের মূখ্যকর্ণ বরাবর ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যা থাকলে ইনভার্স ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে মূখ্যকর্ণ বরাবর ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যাগুলো উল্টিয়ে দিলেই হবে।





সরলরেখা

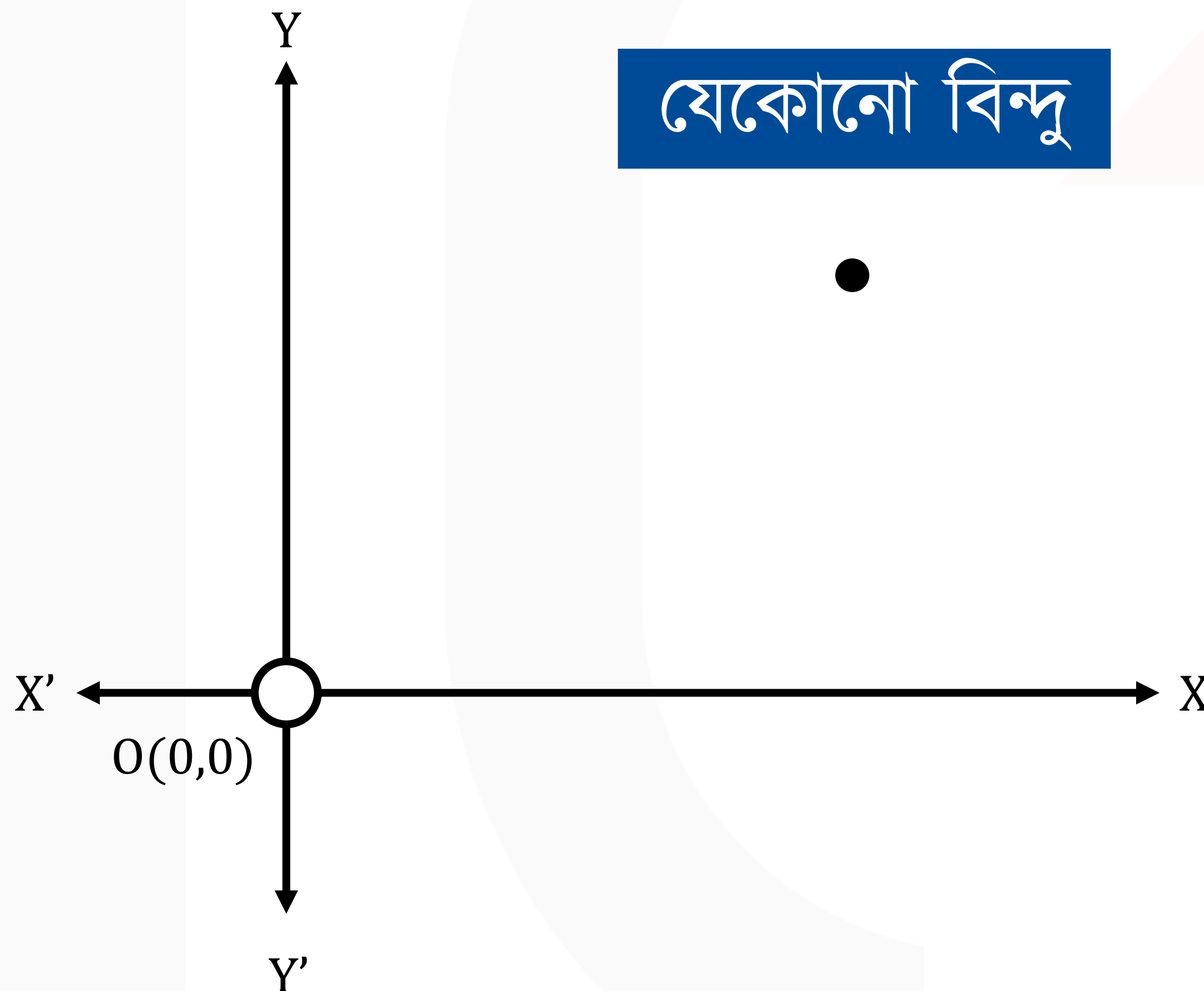
Chapter-3



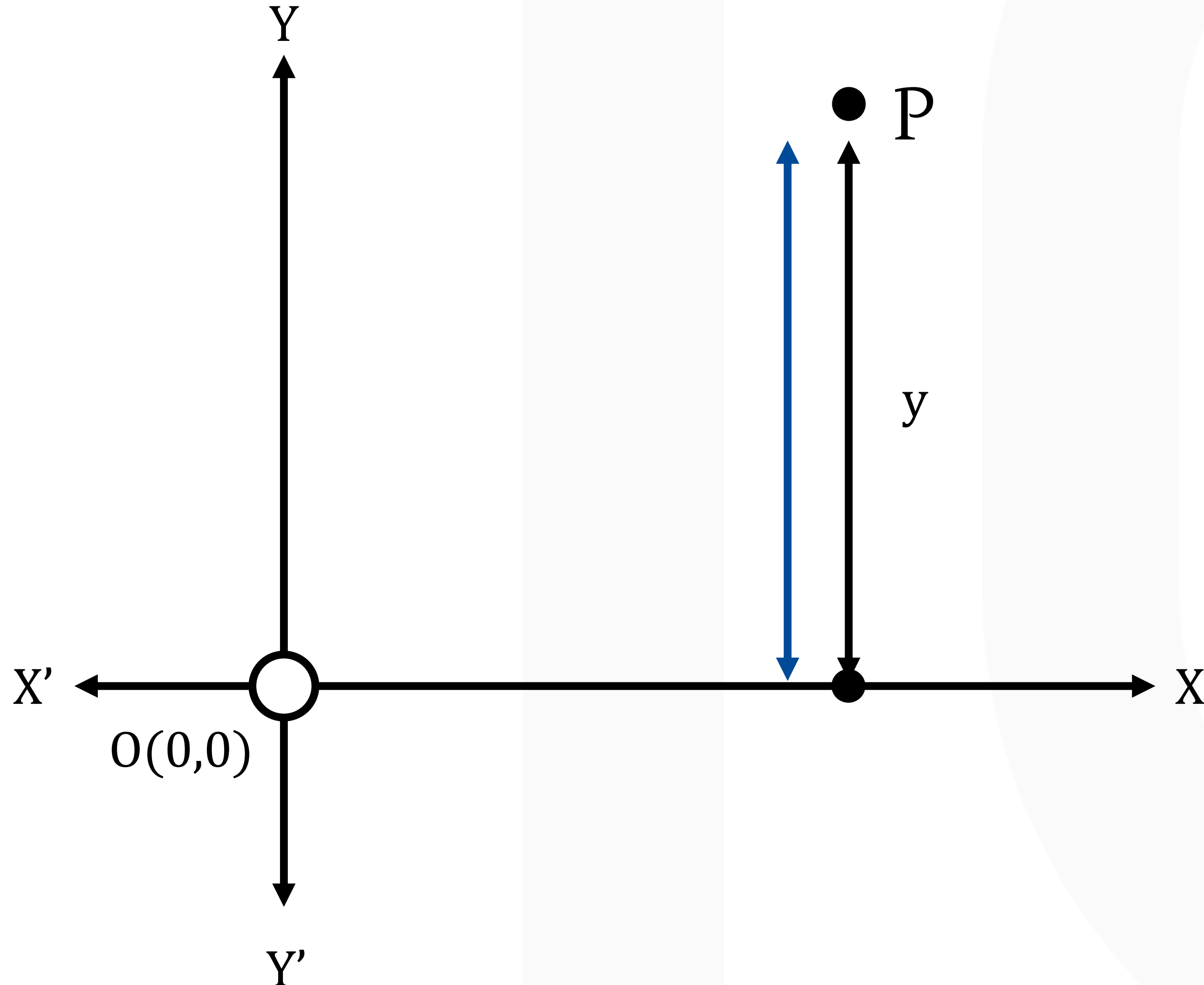




সরলরেখা

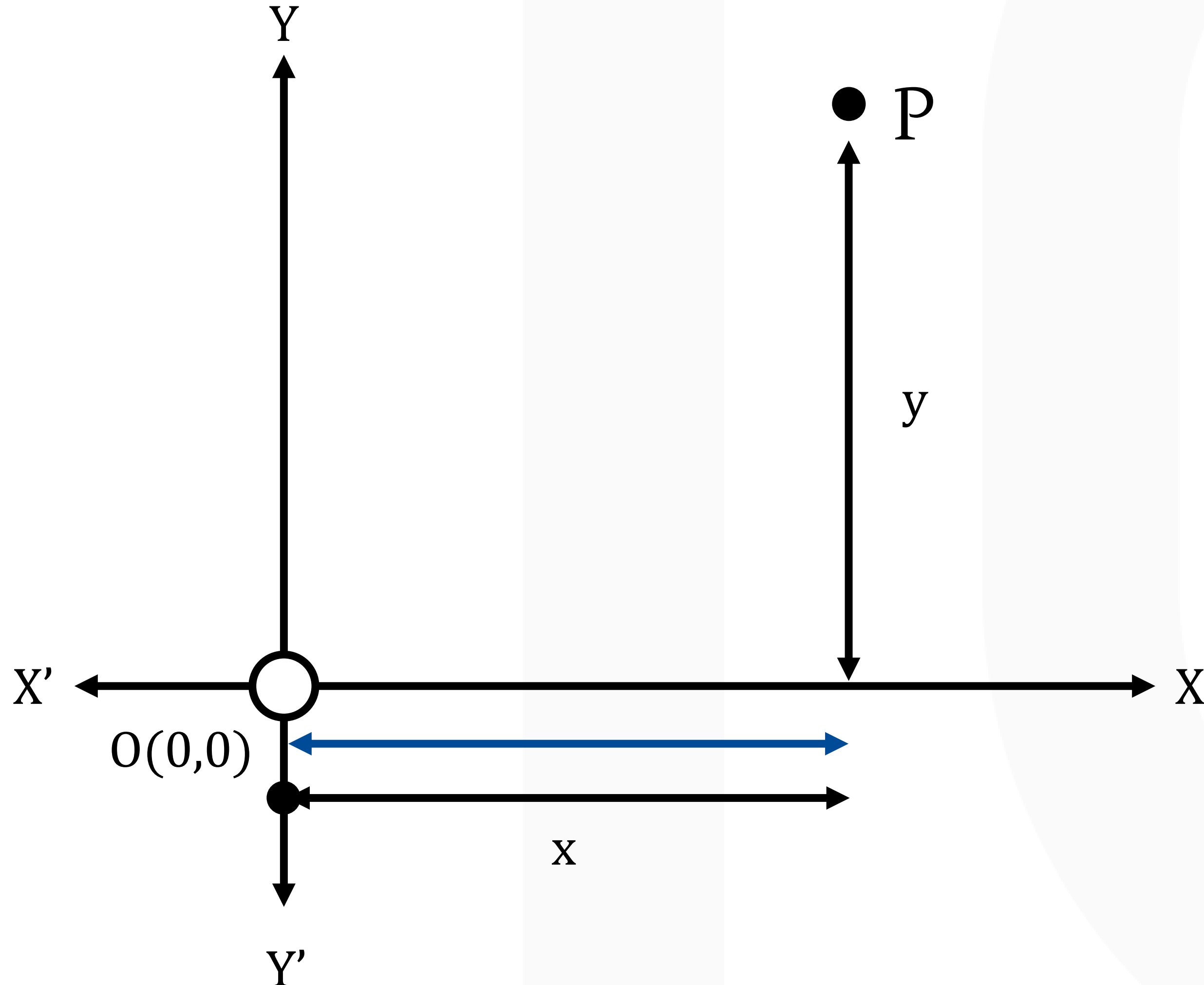


সরলরেখা



X অক্ষ থেকে
P এর দূরত্ব $|y|$

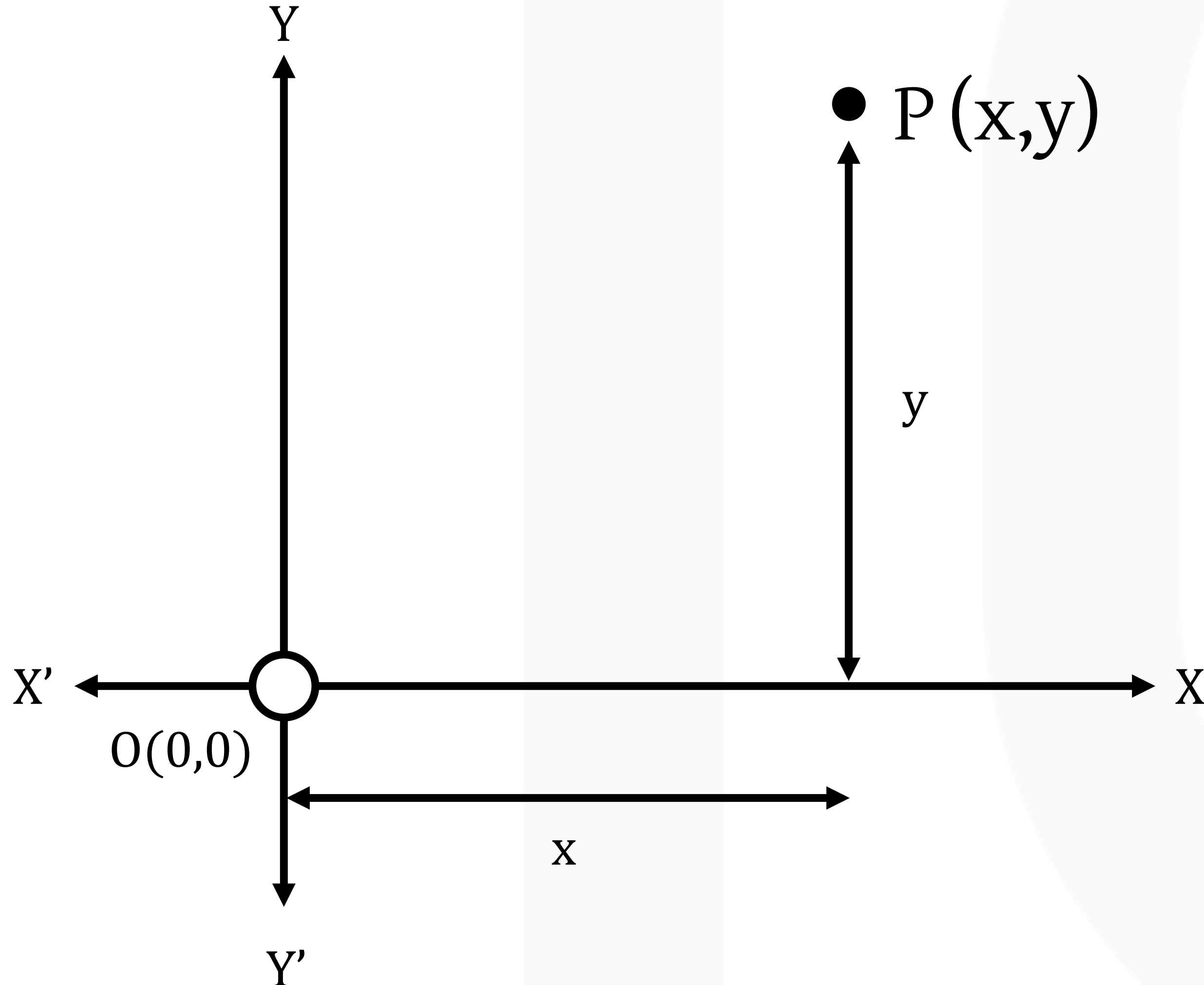
সরলরেখা



X অক্ষ থেকে P এর দূরত্ব $|y|$

Y অক্ষ থেকে P এর দূরত্ব $|x|$

সরলরেখা



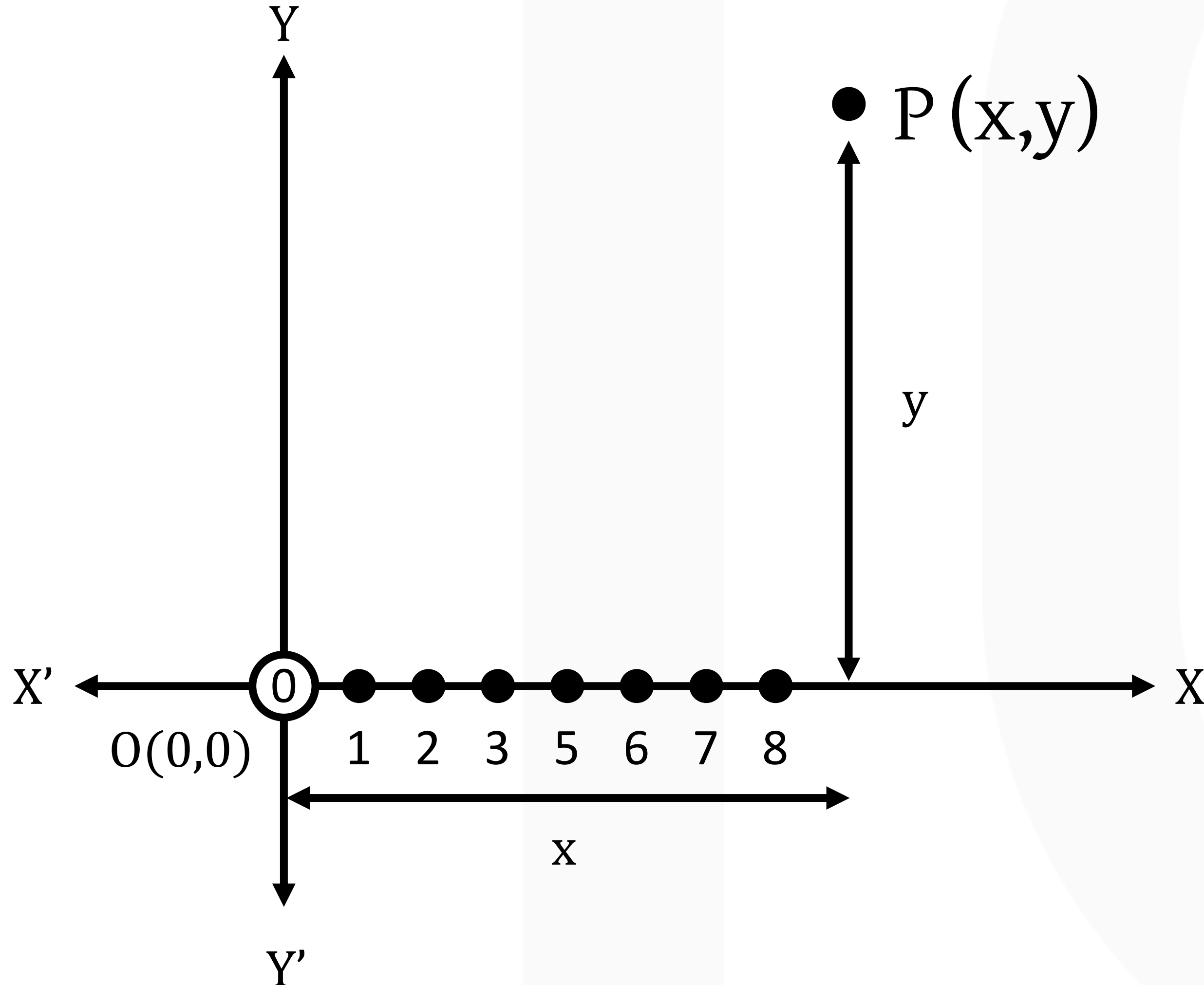
X অক্ষ থেকে P এর দূরত্ব |y|

Y অক্ষ থেকে P এর দূরত্ব |x|

X অক্ষের উপর প্রতিটি বিন্দুর

কোটি শুন্য

সরলরেখা



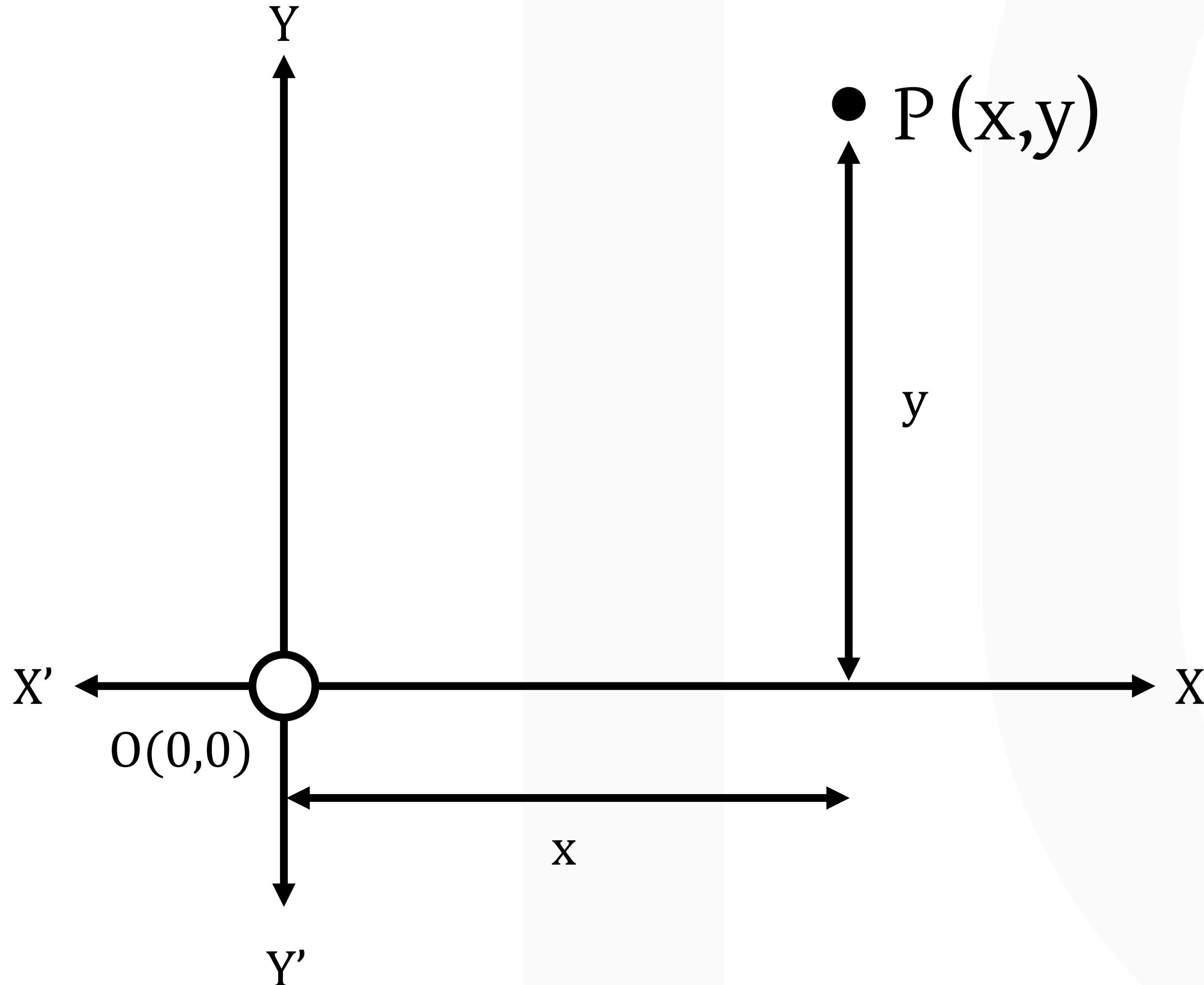
X অক্ষ থেকে P এর দূরত্ব |y|

Y অক্ষ থেকে P এর দূরত্ব |x|

X অক্ষের উপর প্রতিটি বিন্দুর

কোটি শুন্য

সরলরেখা



X অক্ষ থেকে P এর দূরত্ব |y|

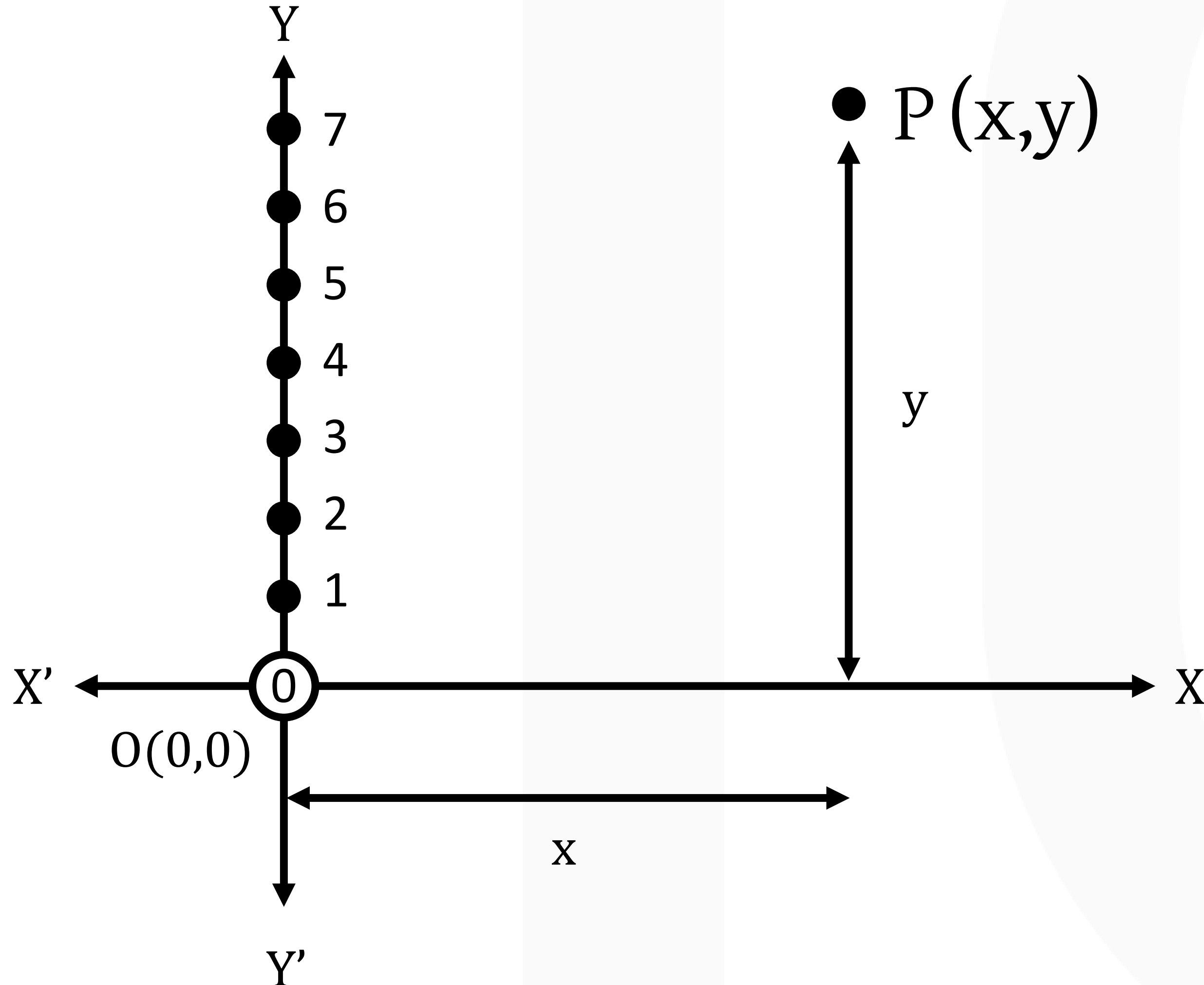
Y অক্ষ থেকে P এর দূরত্ব |x|

X অক্ষের উপর প্রতিটি বিন্দুর কোটি শুন্য

Y অক্ষের উপর প্রতিটি বিন্দুর

ভূজ শুন্য

সরলরেখা



X অক্ষ থেকে P এর দূরত্ব |y|

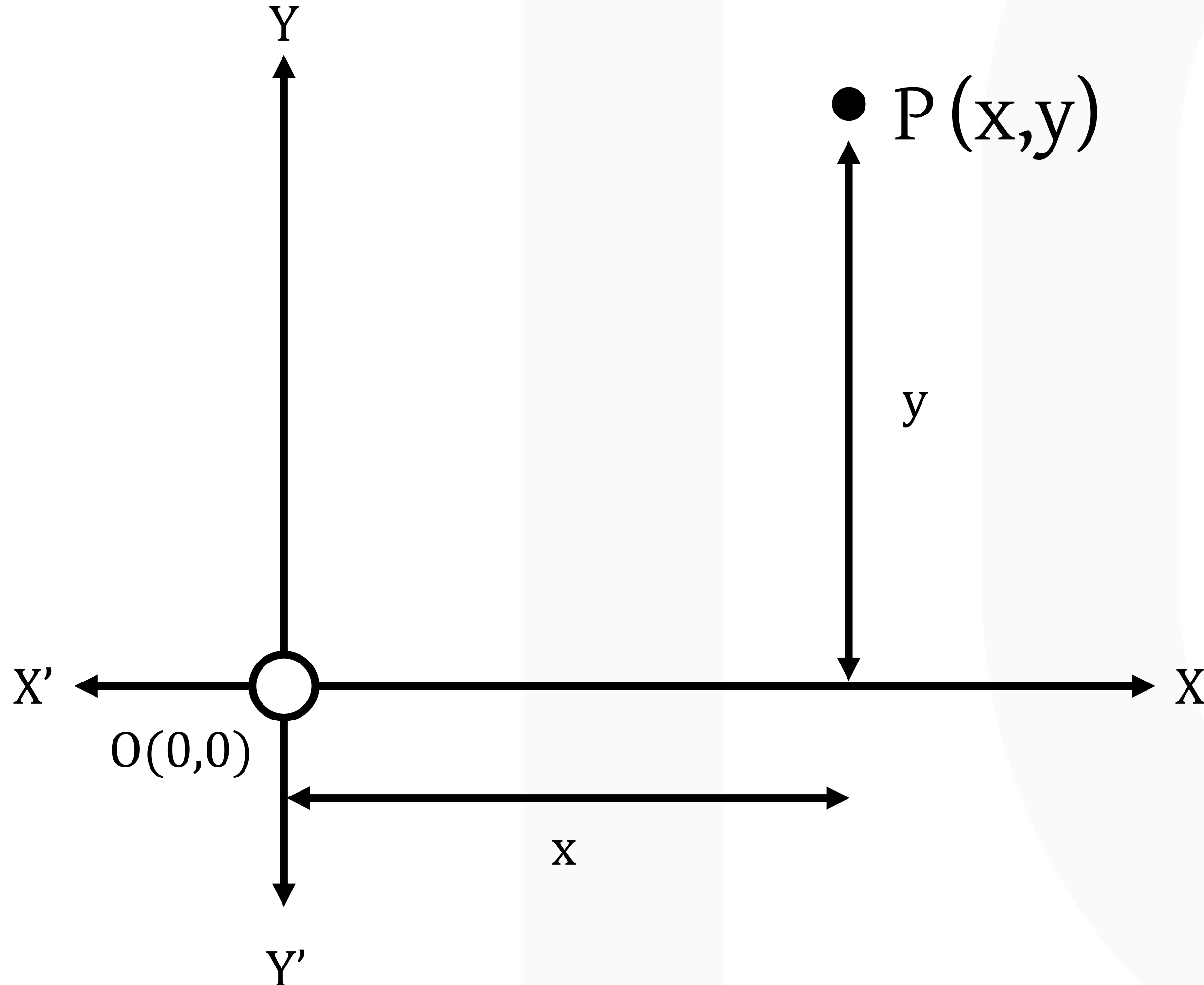
Y অক্ষ থেকে P এর দূরত্ব |x|

X অক্ষের উপর প্রতিটি বিন্দুর কোটি শুন্য

Y অক্ষের উপর প্রতিটি বিন্দুর

ভূজ শুন্য

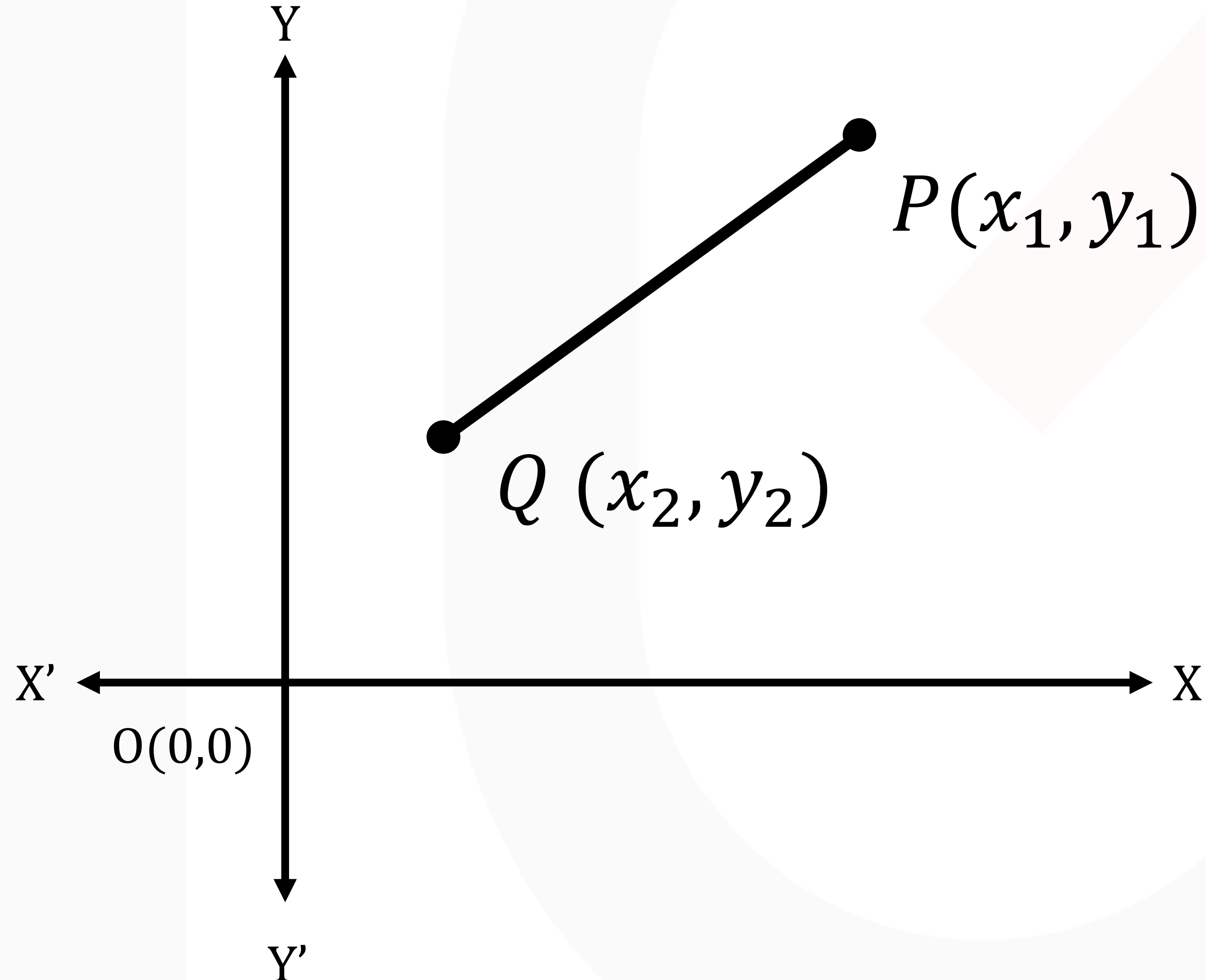
সরলরেখা



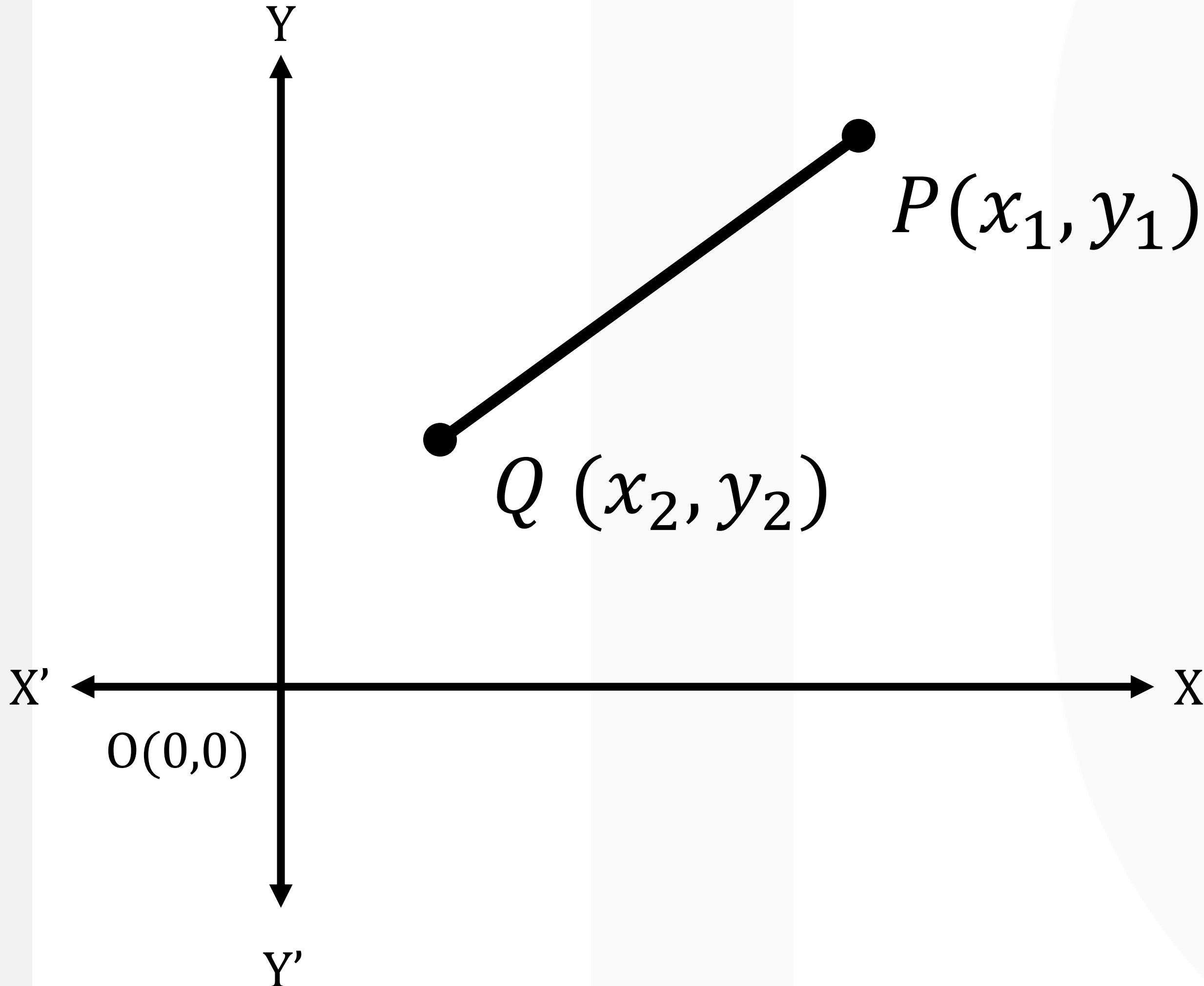
$$\frac{\text{X অক্ষ থেকে P এর দূরত্ব } |y|}{\text{Y অক্ষ থেকে P এর দূরত্ব } |x|}$$

$$\frac{\text{X অক্ষের উপর প্রতিটি বিন্দুর কোটি শুন্য}}{\text{Y অক্ষের উপর প্রতিটি বিন্দুর ভূজ শুন্য}}$$

দুটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব



দুটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব



$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

দুটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\text{দুইটি বিন্দুর দূরত্ব} = \sqrt{(\text{ভুজদ্বয়ের বিয়োগফল})^2 + (\text{কোটিদ্বয়ের বিয়োগফল})^2}$$

দুটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\text{দুইটি বিন্দুর দূরত্ব} = \sqrt{(\text{ভুজদ্বয়ের বিয়োগফল})^2 + (\text{কোটিদ্বয়ের বিয়োগফল})^2}$$

দুটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব

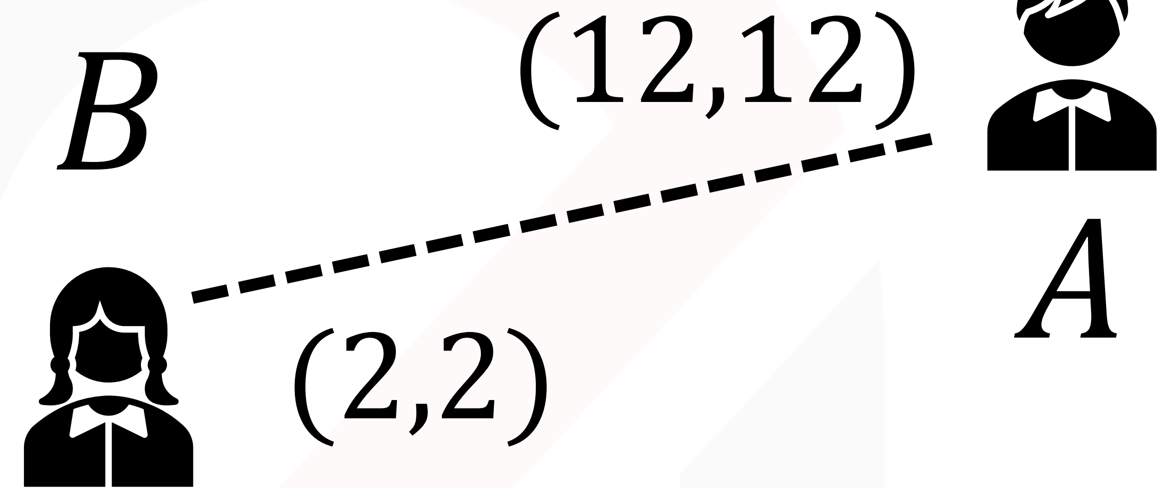
$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\text{দুইটি বিন্দুর দূরত্ব} = \sqrt{(\text{ভুজদ্বয়ের বিয়োগফল})^2 + (\text{কোটিদ্বয়ের বিয়োগফল})^2}$$

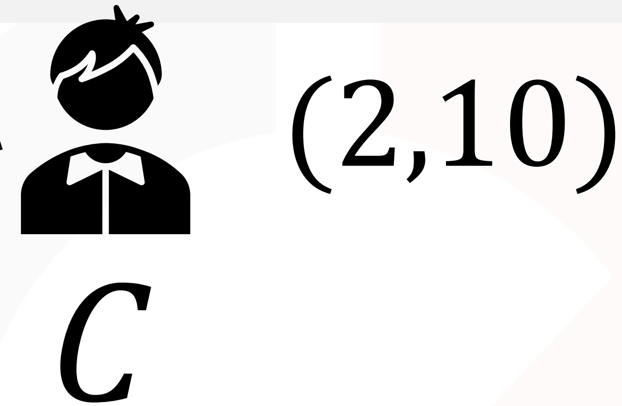
দুটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব

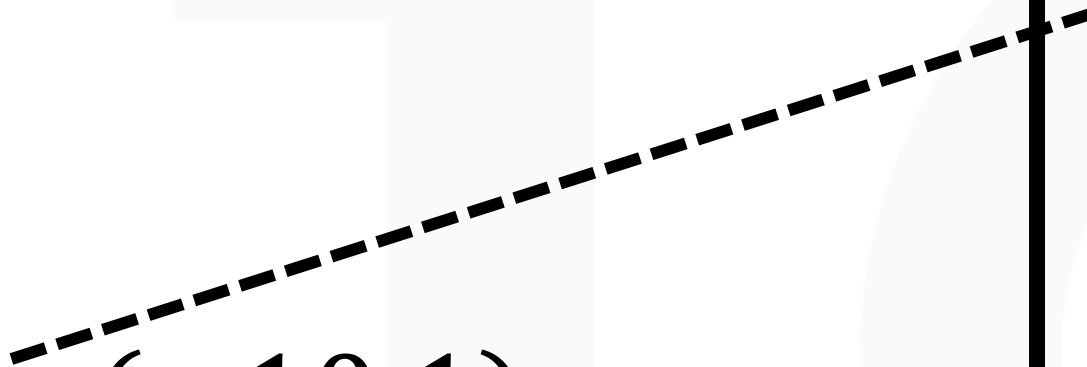
$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

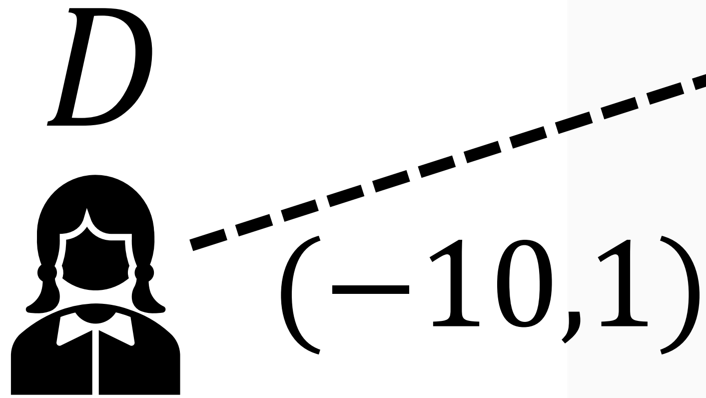
$$\text{দুইটি বিন্দুর দূরত্ব} = \sqrt{(\text{ভুজদ্বয়ের বিয়োগফল})^2 + (\text{কোটিদ্বয়ের বিয়োগফল})^2}$$



$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(2 - 12)^2 + (2 - 12)^2}$$
$$= \sqrt{(-10)^2 + (-10)^2}$$
$$= \sqrt{100 + 100}$$
$$= \sqrt{200} \approx 14.14$$

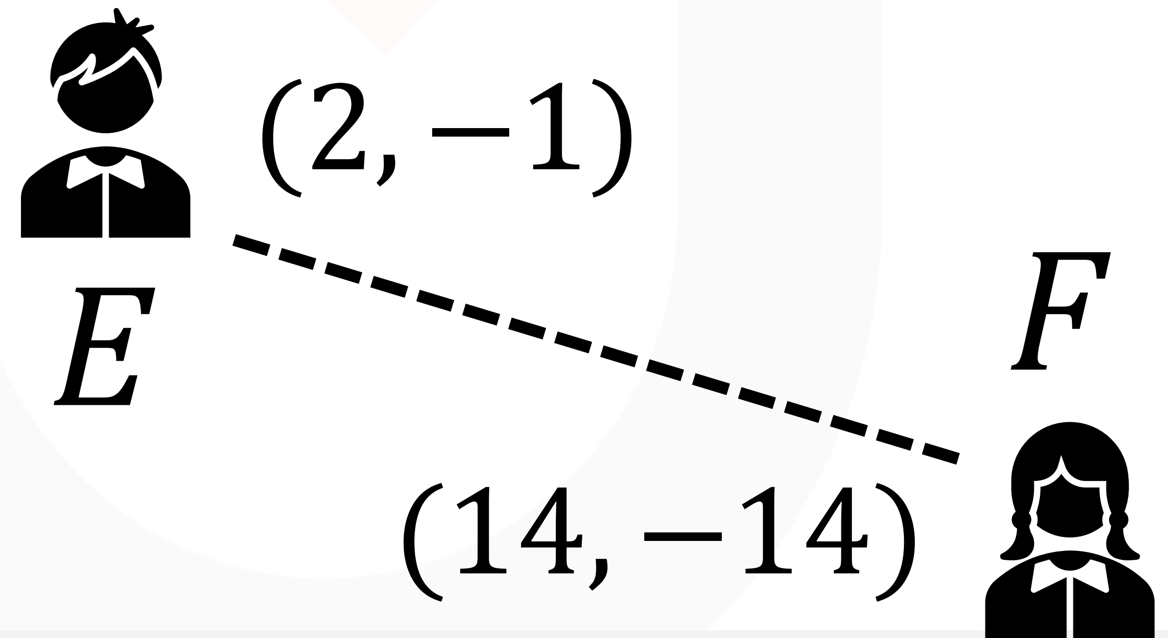






$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(-10 - 2)^2 + (1 - 10)^2}$$
$$= \sqrt{(-8)^2 + (-9)^2}$$
$$= \sqrt{64 + 81}$$
$$= \sqrt{145} \approx 14.04$$

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(14 - 2)^2 + (-14 - (-1))^2}$$
$$= \sqrt{(12)^2 + (-13)^2}$$
$$= \sqrt{144 + 169}$$
$$= \sqrt{313} \approx 17.69$$



সমীকরণ দেখে আকৃতি চেনার উপায়

xy সম্বলিত পদ না থাকলে

সমীকরণ দেখে আকৃতি চেনার উপায়

সরলরেখা

xy সম্বলিত পদ না থাকলে

যদি x ও y উভয়ই **একঘাত** বিশিষ্ট হয়, তাহলে সেটি **সরলরেখা (Straight Line)**।



সমীকরণ দেখে আকৃতি চেনার উপায়

সরলরেখা

xy সম্বলিত পদ না থাকলে



যেমনঃ

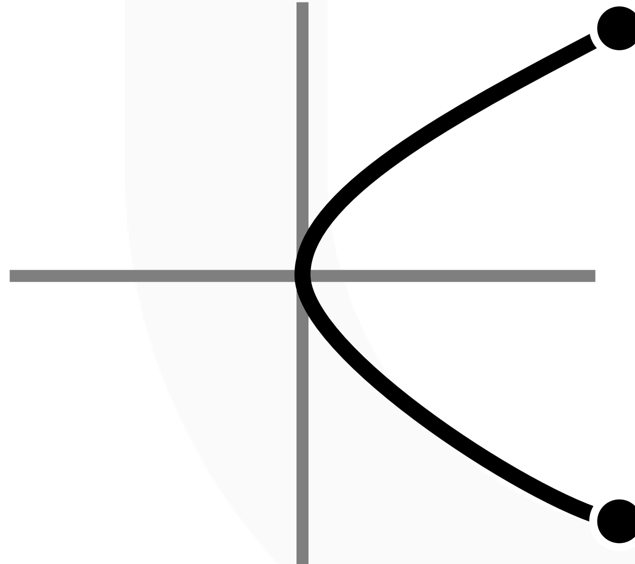
$$2x + 3y = 4$$

$$3x - 2y = 3$$

সমীকরণ দেখে আকৃতি চেনার উপায়

পরাবৃত্ত

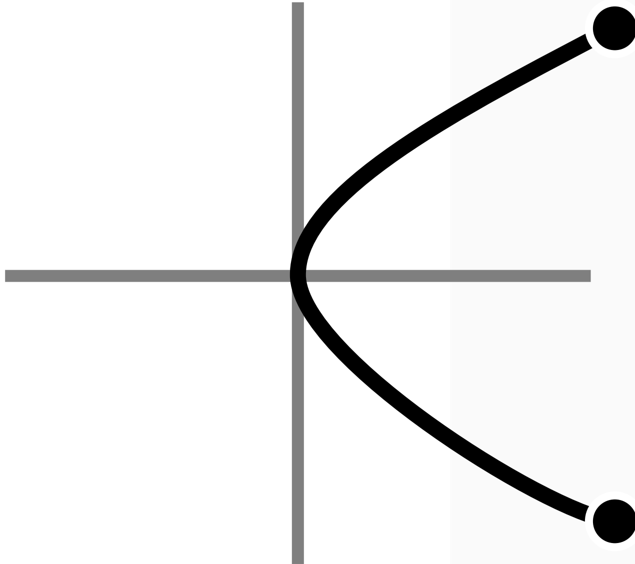
যদি x বা y এর মধ্যে **যেকোনো একটি একঘাত** এবং **অপরটি দ্বিঘাত** বিশিষ্ট হয়, তাহলে সেটি **পরাবৃত্ত (Parabola)**।



সমীকরণ দেখে আকৃতি চেনার উপায়

পরাবৃত্ত

যদি x বা y এর মধ্যে **যেকোনো একটি একঘাত** এবং **অপরটি দ্বিঘাত** বিশিষ্ট হয়, তাহলে সেটি **পরাবৃত্ত (Parabola)**।



যেমনঃ

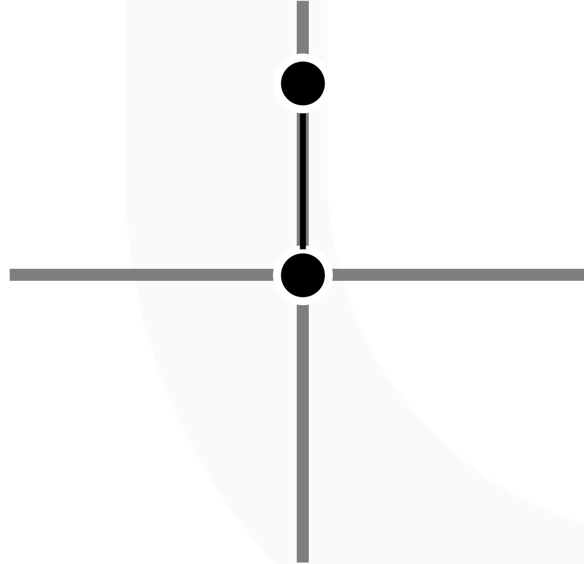
$$y^2 = 4ax$$

$$x^2 = 4ay$$

সমীকরণ দেখে আকৃতি চেনার উপায়

বৃত্ত

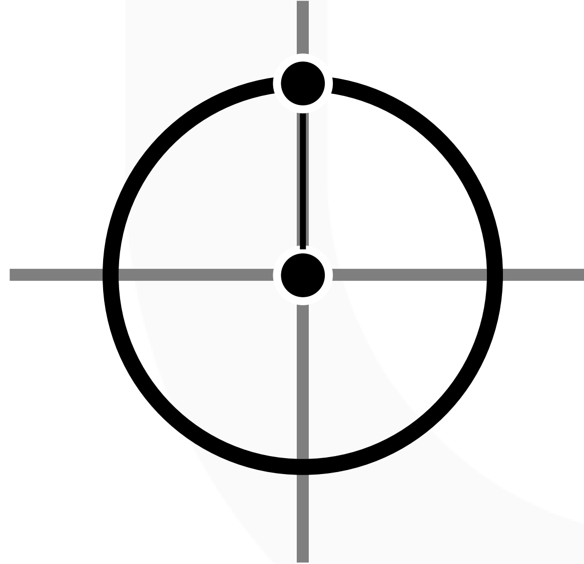
যদি x এবং y **উভয়ই দ্বিঘাত** হয় এবং এদের **সহগ একই চিহ্নবিশিষ্ট** এবং একই হয়, তবে সেটি **বৃত্ত(Circle)**।



সমীকরণ দেখে আকৃতি চেনার উপায়

বৃত্ত

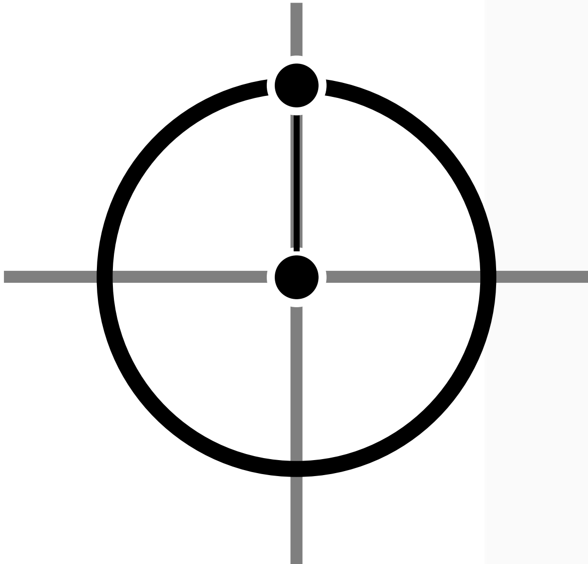
যদি x এবং y **উভয়ই দ্বিঘাত** হয় এবং এদের **সহগ একই চিহ্নবিশিষ্ট** এবং একই হয়, তবে সেটি **বৃত্ত(Circle)**।



সমীকরণ দেখে আকৃতি চেনার উপায়

বৃত্ত

যদি x এবং y **উভয়ই দ্বিঘাত** হয় এবং এদের **সহগ একই চিহ্নবিশিষ্ট** এবং একই হয়, তবে সেটি **বৃত্ত(Circle)**।



যেমনঃ

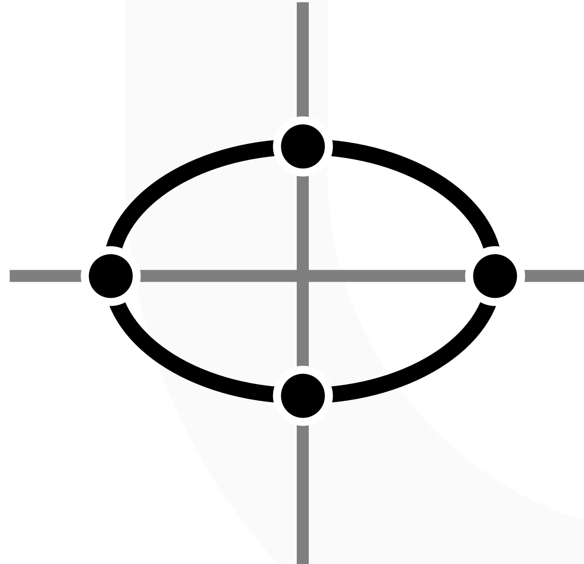
$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 6 = 0$$

$$-2x^2 - 2y^2 + 6x + 7 = 0$$

সমীকরণ দেখে আকৃতি চেনার উপায়

উপবৃত্ত

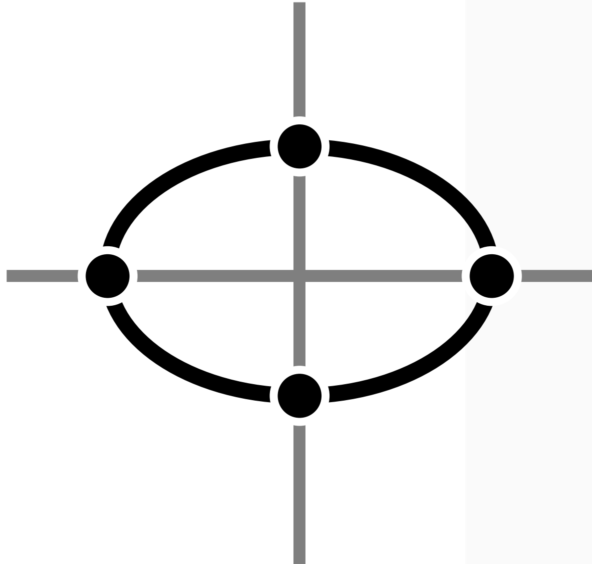
যদি x ও y **উভয়ই দ্বিঘাত হয়** এবং এদের **সহগ একই চিহ্নবিশিষ্ট কিন্তু সহগ ভিন্ন** হয়, তবে সেটি **উপবৃত্ত (Ellipse)**।



সমীকরণ দেখে আকৃতি চেনার উপায়

উপবৃত্ত

যদি x ও y **উভয়ই দ্বিঘাত হয়** এবং এদের **সহগ একই চিহ্নবিশিষ্ট কিন্তু সহগ ভিন্ন** হয়, তবে সেটি **উপবৃত্ত (Ellipse)** ।

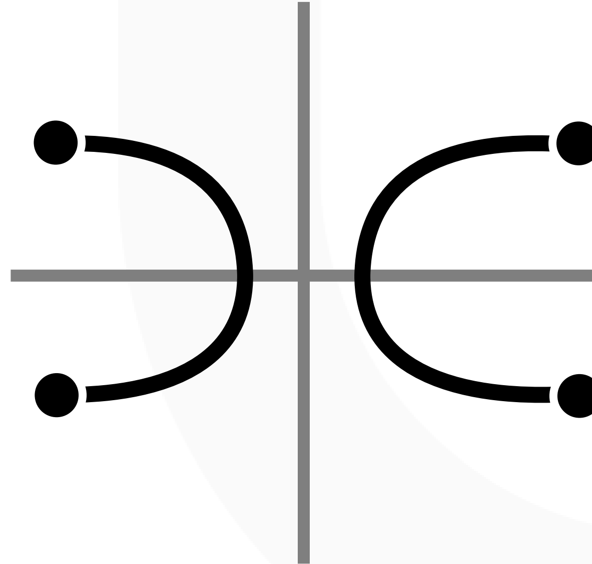


যেমনঃ $$3x^2 + 4y^2 - 6x + 4y + 2 = 0$$

সমীকরণ দেখে আকৃতি চেনার উপায়

অধিবৃত্ত

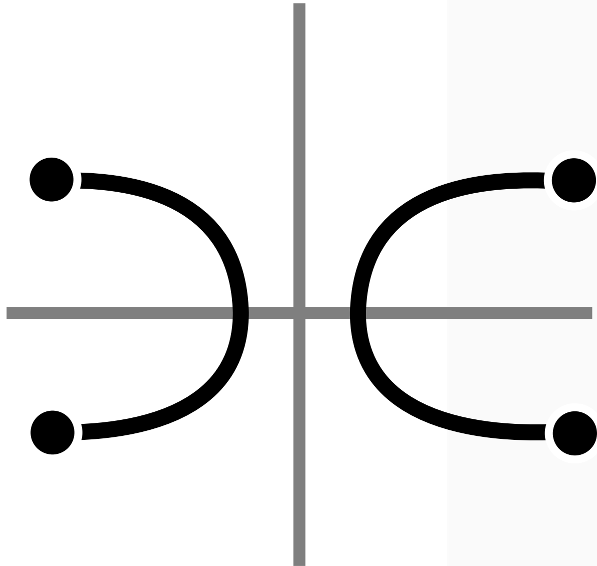
যদি x ও y **উভয়ই দ্বিঘাত** এবং এদের **সহগের চিহ্ন বিপরীত (সহগ সমানও হতে পারে, অসমানও হতে পারে)** হলে, সেটি **অধিবৃত্ত (Hyperbola)**।



সমীকরণ দেখে আকৃতি চেনার উপায়

অধিবৃত্ত

যদিx ও y **উভয়ই দ্বিঘাত** এবং এদের **সহগের চিহ্ন বিপরীত (সহগ সমানও হতে পারে, অসমানও হতে পারে)** হলে, সেটি **অধিবৃত্ত (Hyperbola)**।

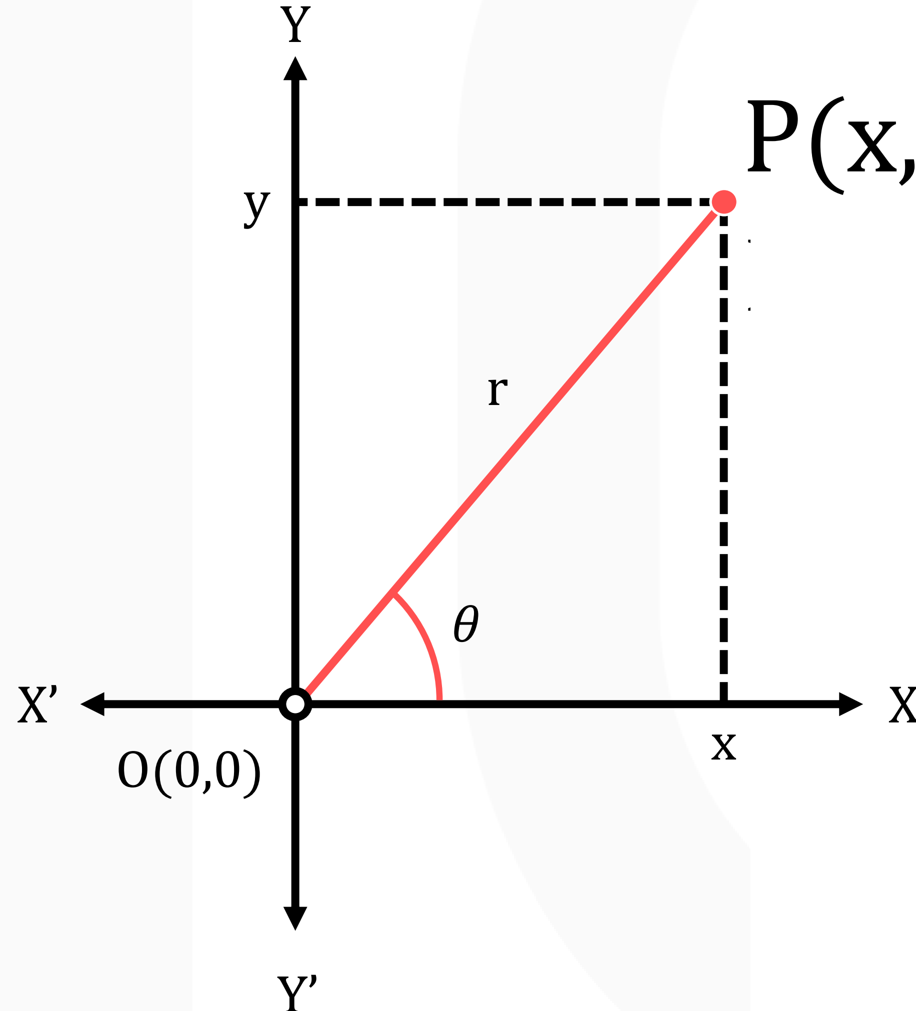


যেমনঃ

$$x^2 - y^2 + 4x + 6 - 0$$

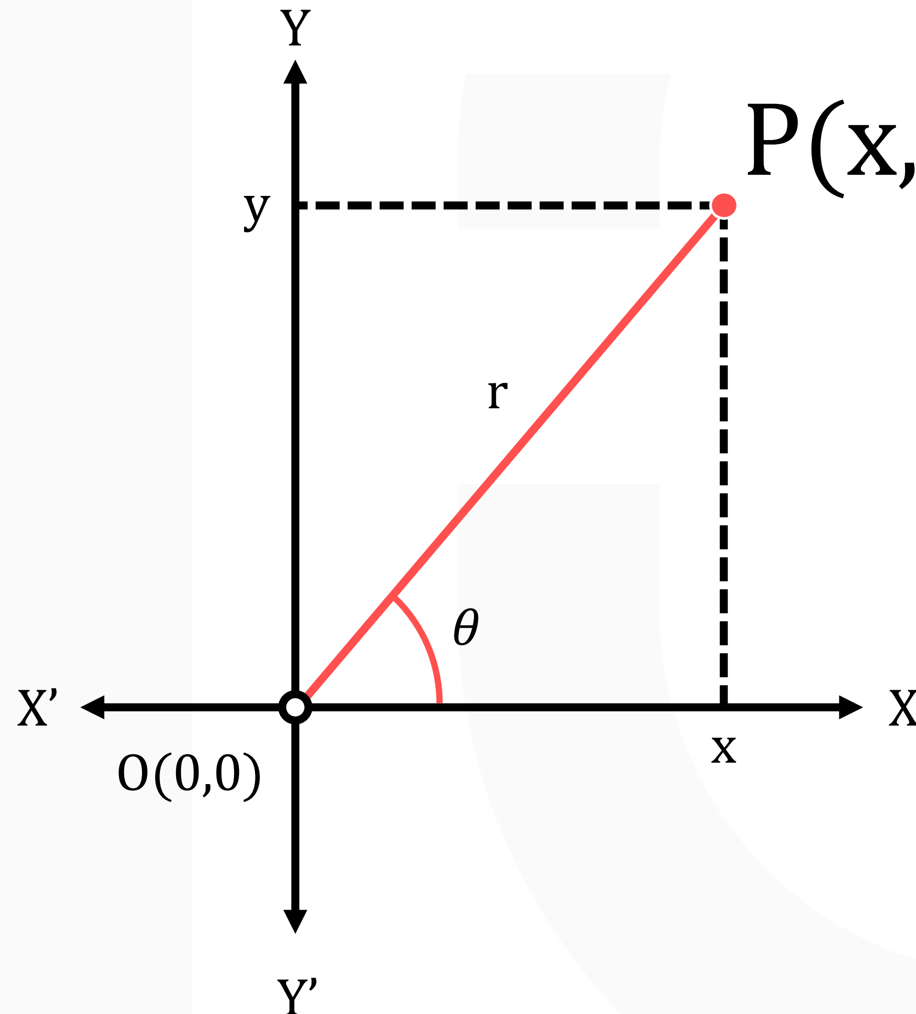
$$y^2 - x^2 = 6$$

কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাংক



Cartesian

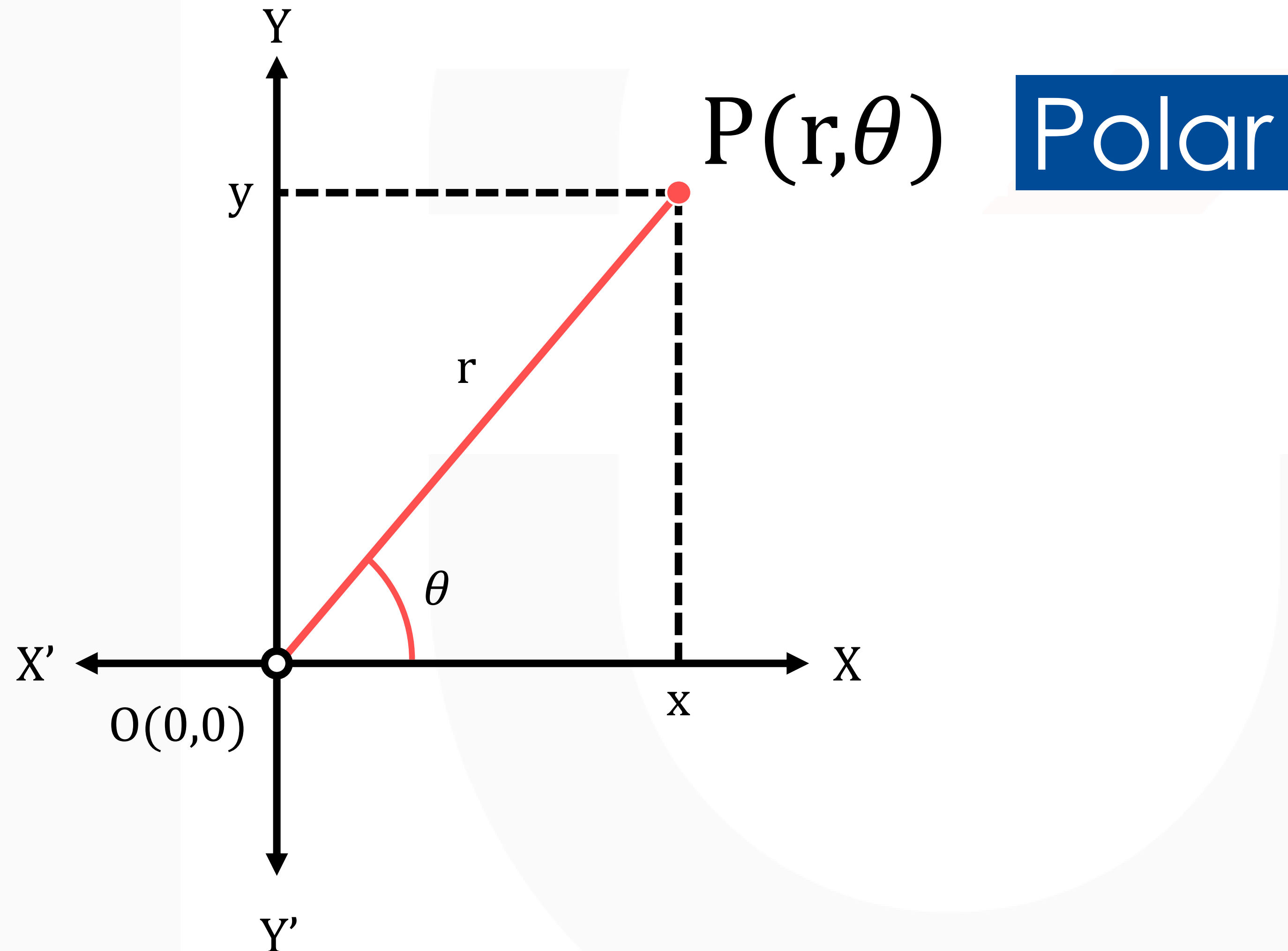
কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাংক



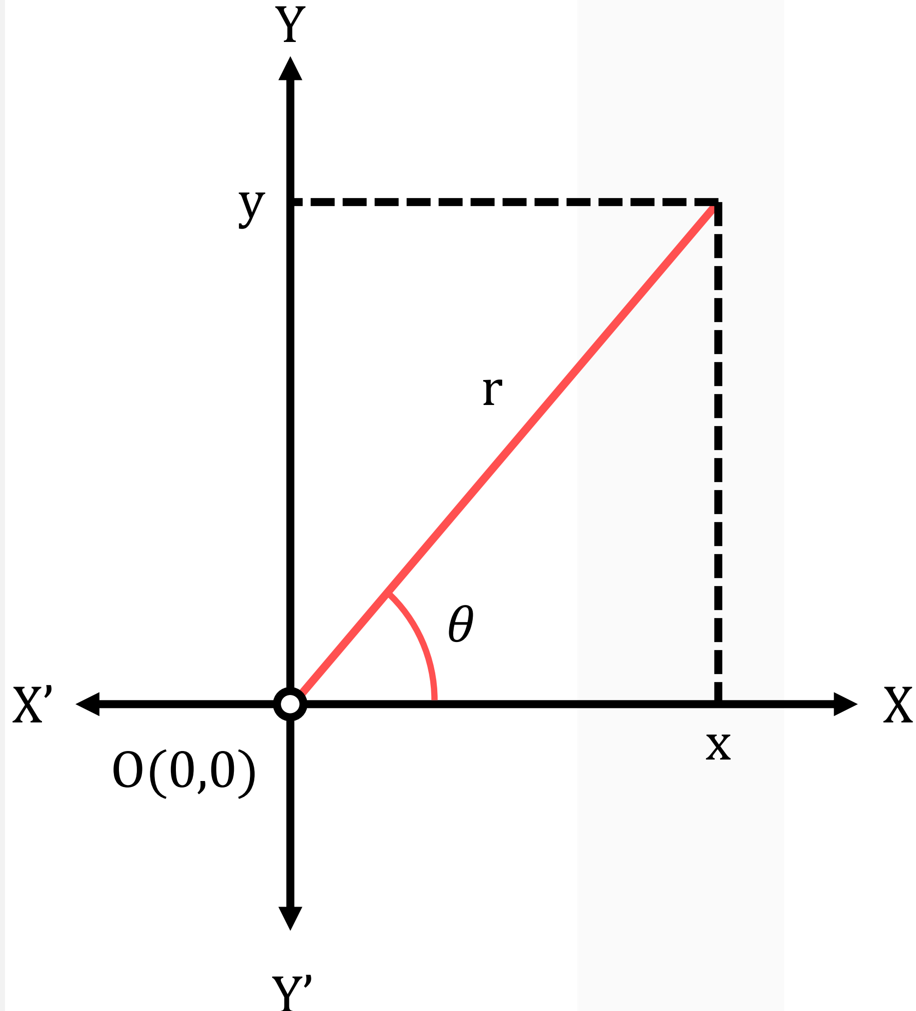
P(x,y)

Cartesian

কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাংক



কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাংক



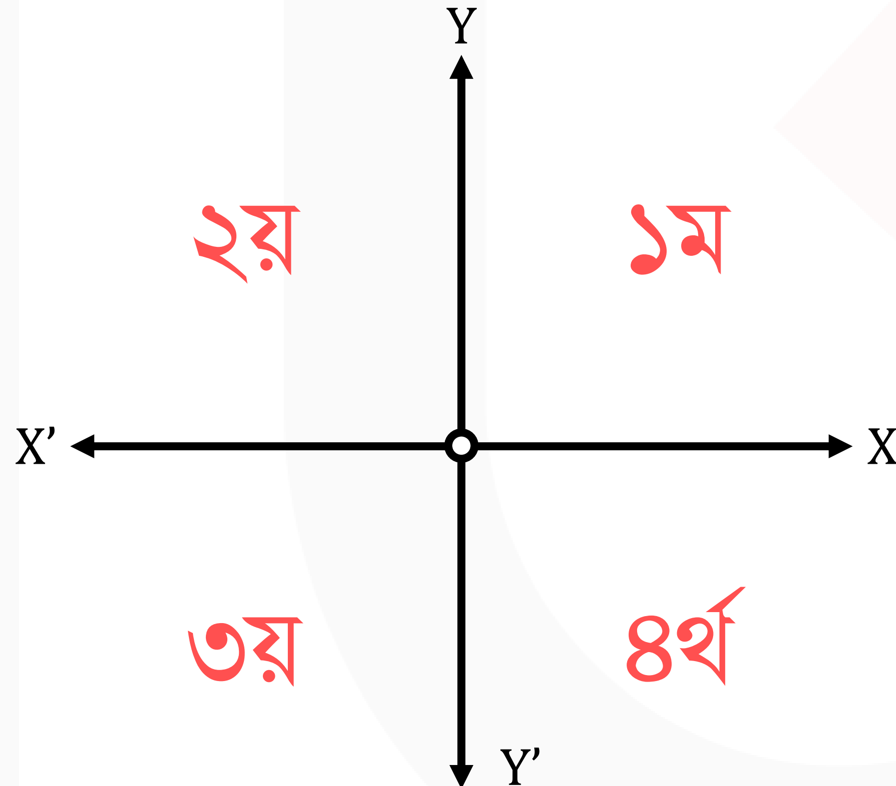
$P(x,y)$ ⟲ $P(r,\theta)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাংক

P(x,y) ⟳ P(r,θ)

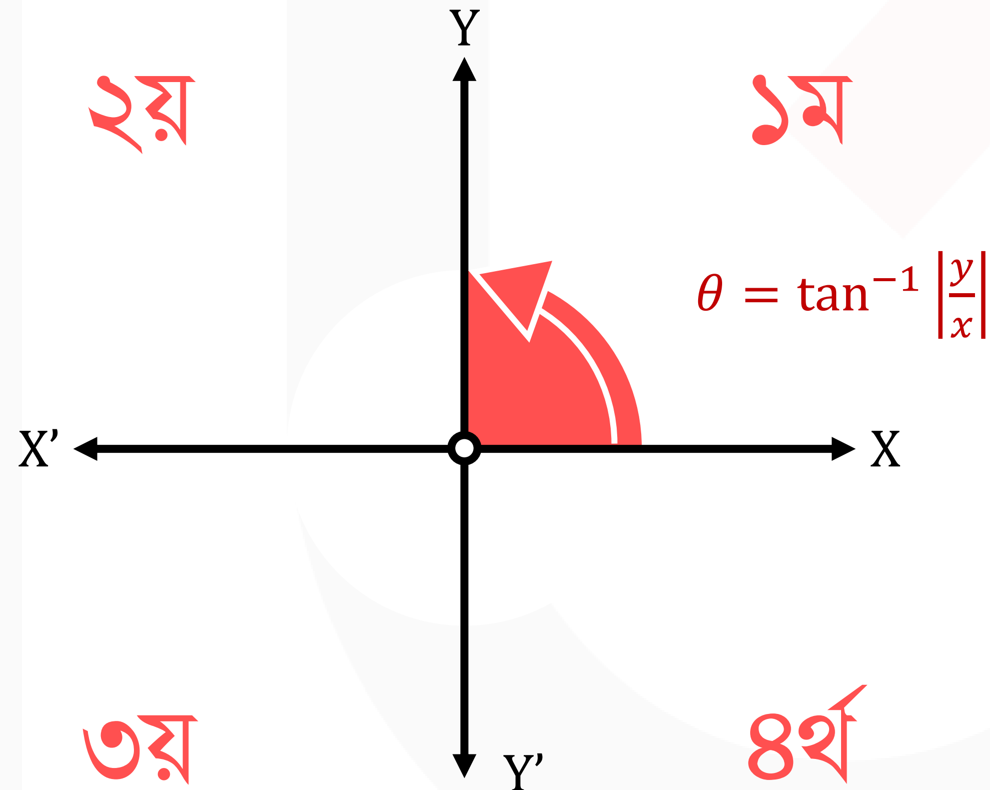
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$



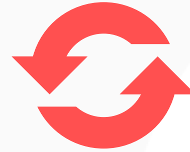
কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাংক

P(x,y) ⟷ P(r,θ)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$



কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাংক

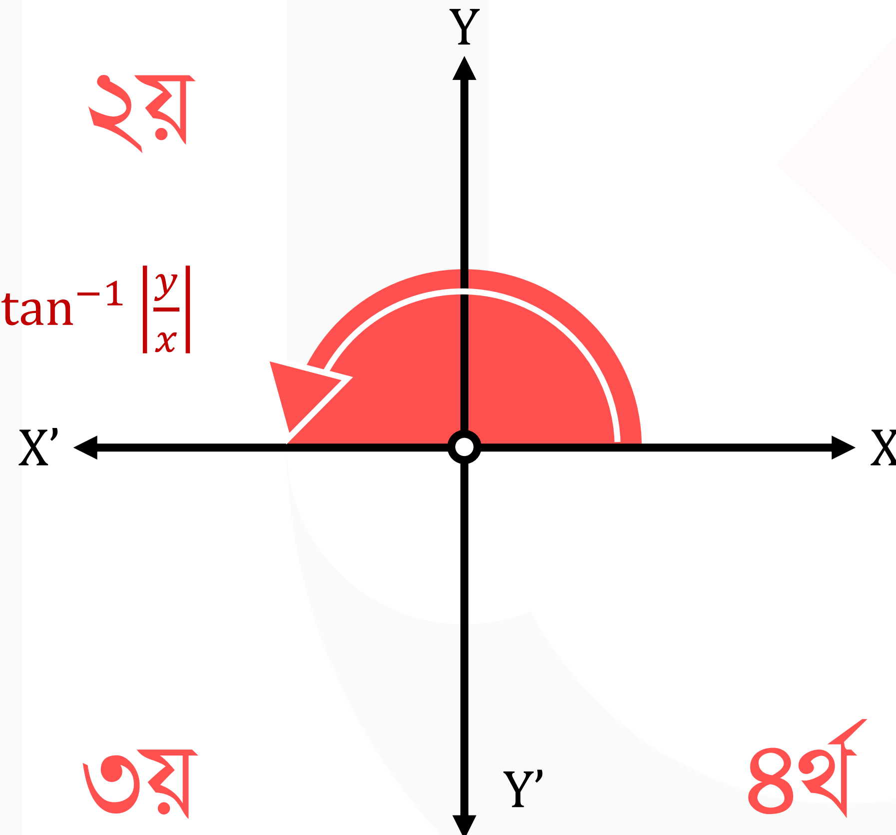
P(x,y)  P(r,θ)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

১ম $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

২য়

$\theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$



৩য়

৪র্থ

কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাংক

P(x,y) ⇄ P(r,θ)

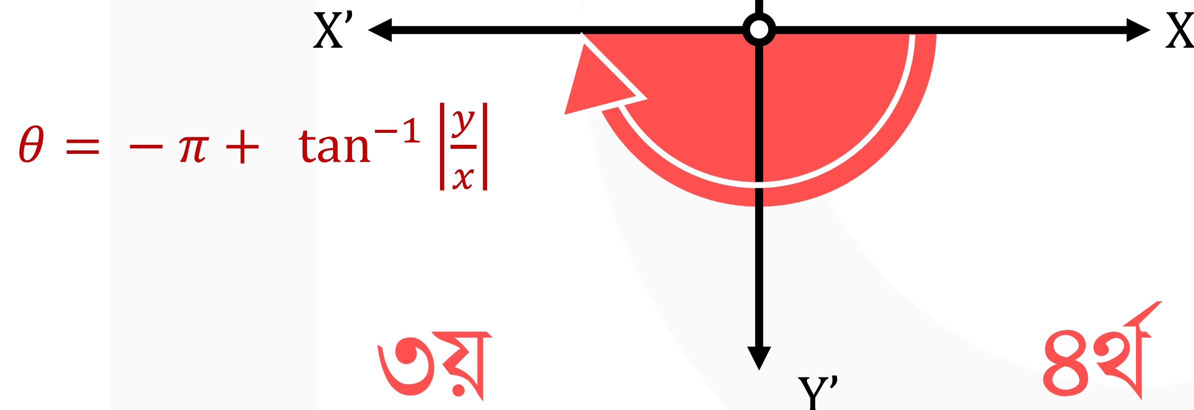
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Y

১ম $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

২য় $\theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

X' X



কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাংক

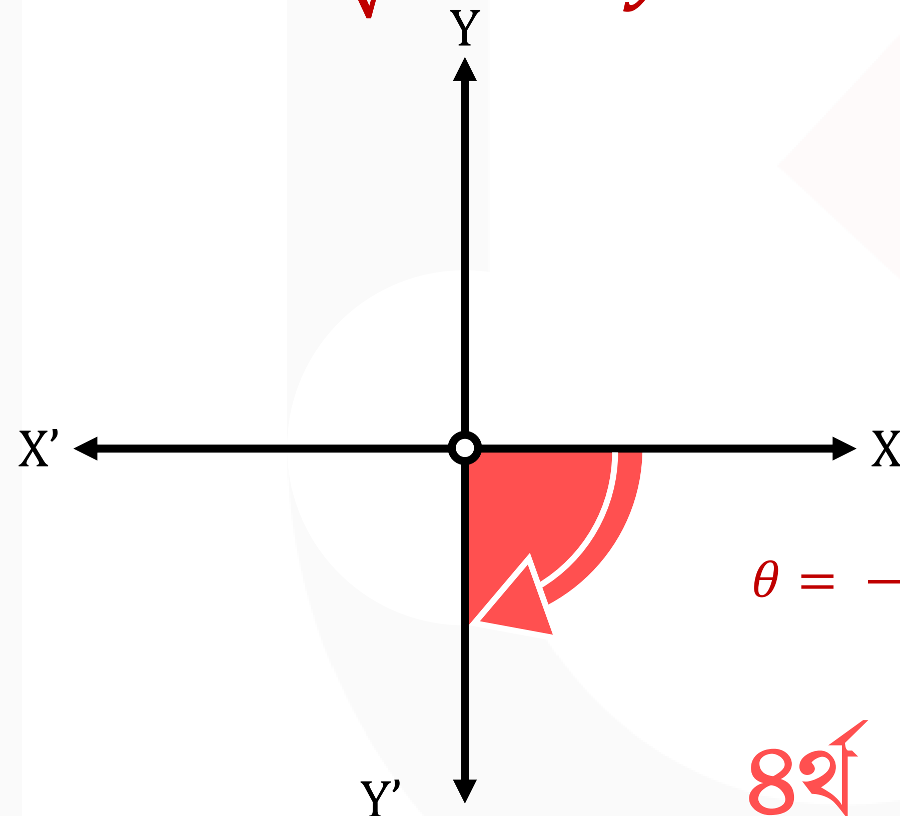
P(x,y) ⟷ P(r,θ)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

১ম $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

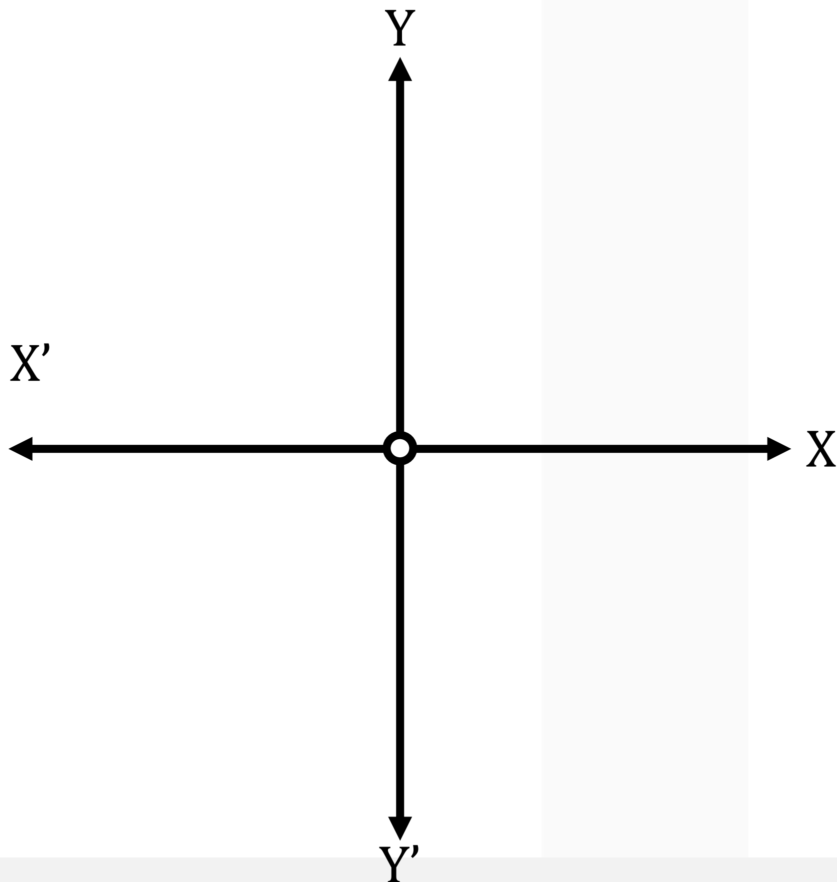
২য় $\theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

৩য় $\theta = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$



কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাংক

P(x,y) ⟷ P(r,θ)



$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

১ম $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

২য় $\theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

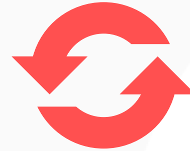
৩য় $\theta = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

৪র্থ $\theta = -\tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাংক

P(x,y)  P(r,θ)

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

১ম $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

২য় $\theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

৩য় $\theta = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

৪র্থ $\theta = -\tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

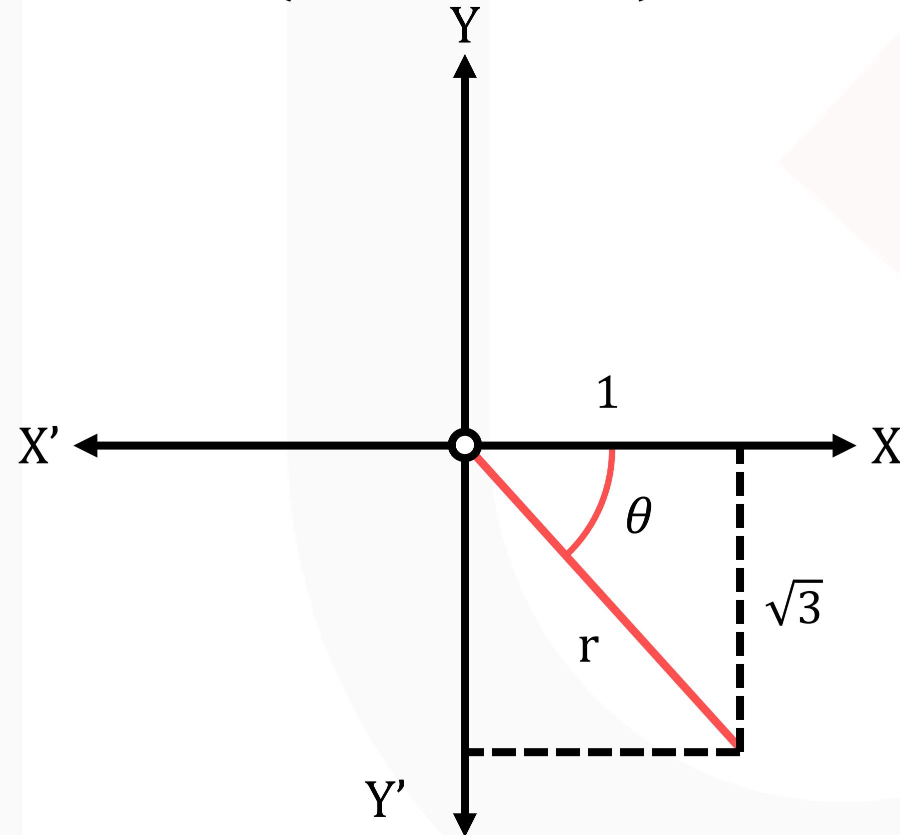
$x = rcos\theta$

$y = rsin\theta$

কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাংক

পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয়

$$\left(1, -\sqrt{3}\right)$$



কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাংক

পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয়

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\tan\theta = \left(\frac{y}{x}\right)$

$$\left(1, -\sqrt{3}\right)$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{4} = 2$$

$$\tan\theta = \frac{-\sqrt{3}}{1}$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$$

$$\therefore \theta = -60°$$

অর্থাৎ, $\theta = -60° = -\frac{\pi}{3}$

$\therefore$ পোলার স্থানাঙ্ক $\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$

কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাংক

কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয়

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$$(3, 150°)$$

$x = 3\cos 150° = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$y = r\sin 150° = 3\sin 150° = \frac{3}{2}$

$$\therefore (x, y) = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাংক

পোলার সমীকরণে প্রকাশ

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 - 6x = 0}$$

$$\Rightarrow (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 - 6r\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta - 6r\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - 6r\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow r^2 - 6r\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow r^2 = 6r\cos\theta$$

$$\therefore \boldsymbol{r = 6\cos\theta}$$

কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাংক

কার্তেসীয় সমীকরণে প্রকাশ

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$x = r\cos\theta$

$$\boldsymbol{r(1 + \cos\theta) = 2}$$

$$\Longrightarrow r + r\cos\theta = 2$$

$$\Longrightarrow r = 2 - r\cos\theta$$

$$\Longrightarrow r^2 = 4 - 4r\cos\theta + (r\cos\theta)^2$$

[উভয়ই পক্ষকে বর্গ করে]

$$\Longrightarrow x^2 + y^2 = 4 - 4x + x^2$$

$$\Longrightarrow y^2 = 4(1 - x)$$

$\therefore y^2 = -4(x - 1)$, যা পরাবৃত্ত নির্দেশ করে।

কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাংক

সমীকরণকে পোলার স্থানাংকে প্রকাশ

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$y = r\sin\theta$

$$\boldsymbol{x^2 = 1 - 2y}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = y^2 - 2y + 1$$

$$\Rightarrow r^2 = (y-1)^2$$

$$\Rightarrow r = (y-1)$$

$$\Rightarrow r = r\sin\theta - 1$$

$$\Rightarrow r - r\sin\theta = -1$$

$$\Rightarrow r(1 - \sin\theta) = -1$$

$$\Rightarrow -r(\sin\theta - 1) = -1$$

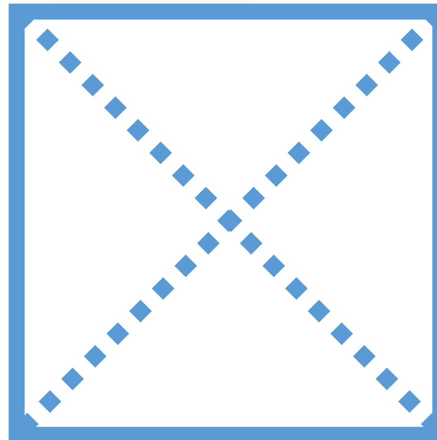
$$\boldsymbol{\therefore r(\sin\theta - 1) = 1}$$

চারটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক দেয়া থাকলে চতুর্ভূজ শনাক্তকরণ

Case-1

4 টি বাহুর দৈর্ঘ্য সমান

(i) কর্ণগুলো *সমান হলে* → বর্গ



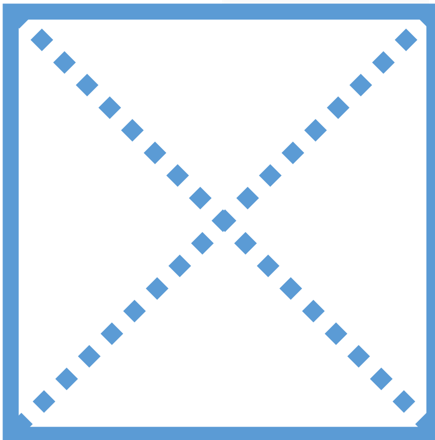
চারটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক দেয়া থাকলে চতুর্ভূজ শনাক্তকরণ

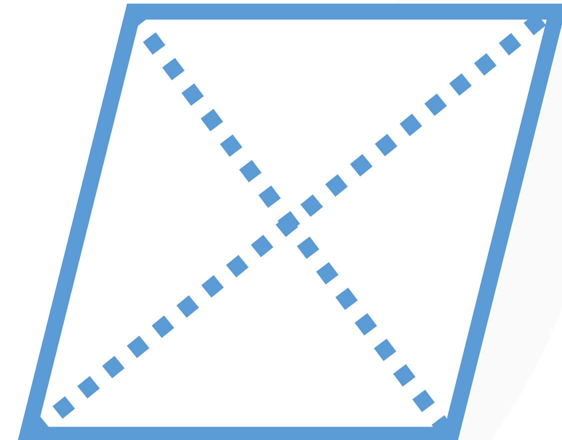
Case-1

4 টি বাহুর দৈর্ঘ্য সমান

(i) কর্ণগুলো *সমান হলে* → বর্গ

(ii) কর্ণগুলো *অসমান হলে* → রম্বস





চারটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক দেয়া থাকলে চতুর্ভূজ শনাক্তকরণ

Case-1

4 টি বাহুর দৈর্ঘ্য সমান

(i) কর্ণগুলো *সমান হলে* → বর্গ

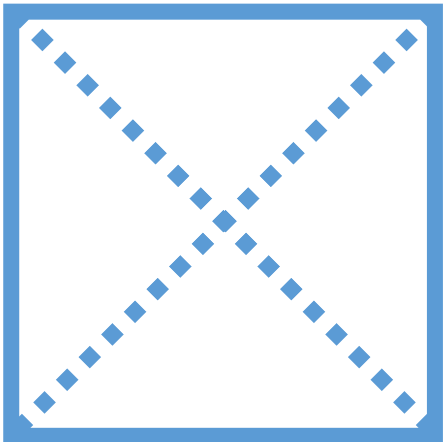
(ii) কর্ণগুলো *অসমান হলে* → রম্বস

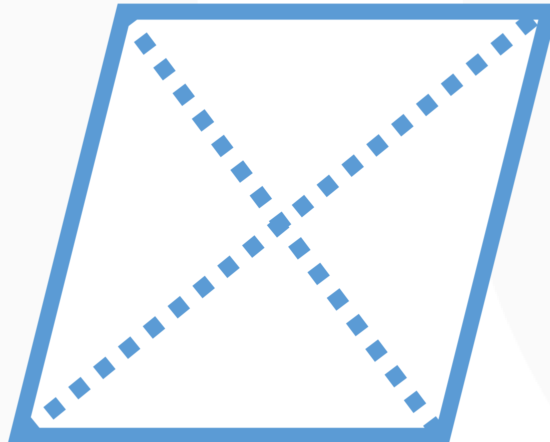
Case-2

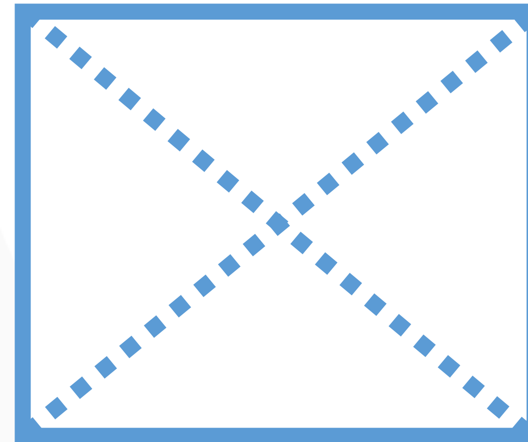
বিপরীত বাহুগুলো সমান

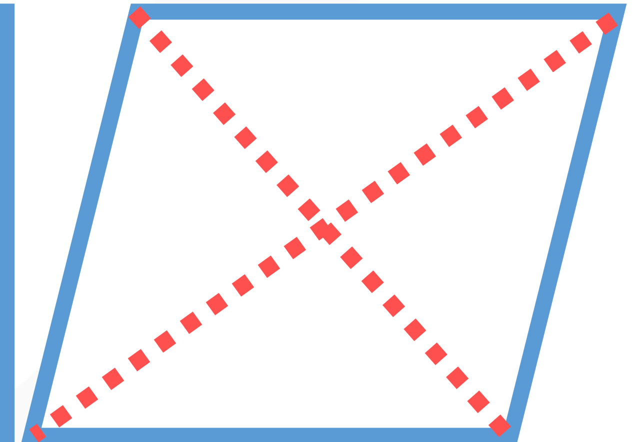
(i) কর্ণগুলো *সমান হলে* → আয়ত

(ii) কর্ণগুলো *অসমান হলে* → সামান্তরিক



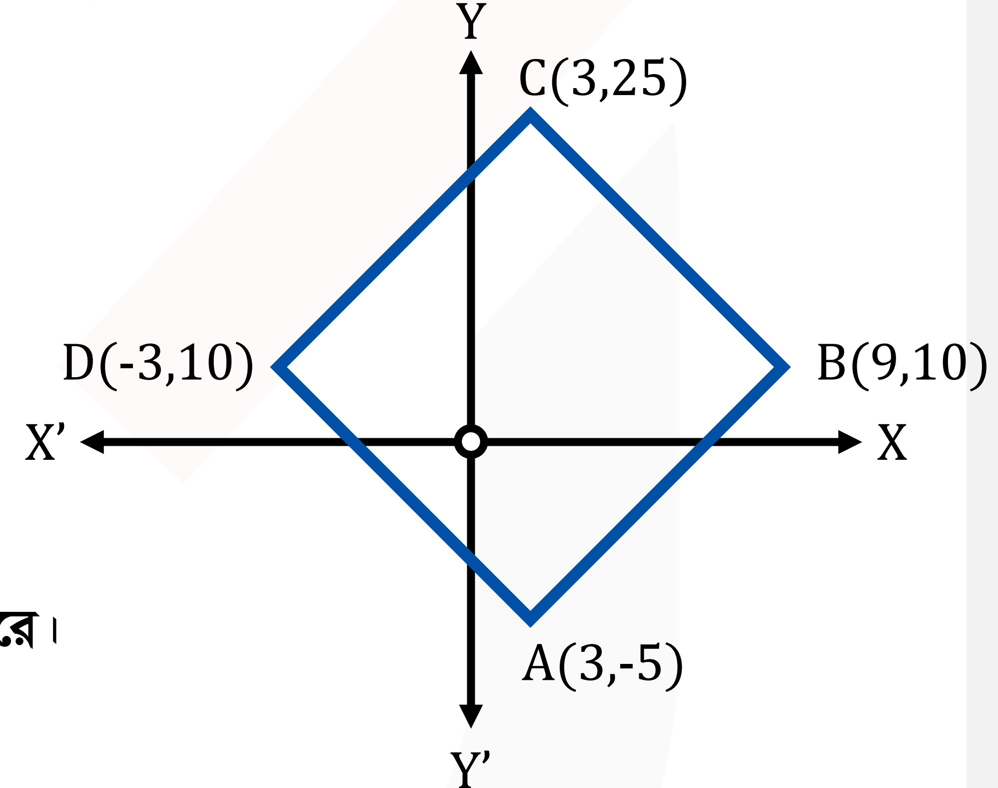






PROBLEMS

(1) $A(3,-5), B(9,10), C(3,25)$ এবং $D(-3,10)$ বিন্দু চারটি একটি চতুর্ভূজের 4 টি শীর্ষবিন্দু। চতুর্ভূজটি শনাক্ত কর।



প্রদত্ত বিন্দুগুলি xy সমতলে স্থাপন করে $ABCD$ চতুর্ভূজ অঙ্কন করি।

এখন, $AB^2 = (3-9)^2 + (-5-10)^2 = 36 + 225 = 261$

$BC^2 = (9-3)^2 + (10-25)^2 = 36 + 225 = 261$

$CD^2 = (3+3)^2 + (25-10)^2 = 36 + 225 = 261$

$DA^2 = (-3-3)^2 + (10+5)^2 = 36 + 225 = 261$

$\therefore AB = BC = CD = DA$ সুতরাং, ***ABCD* একটি রম্বস অথবা বর্গ হতে পারে।**

আবার, $BD^2 = (9+3)^2 + (10-10)^2 = 144 \Longrightarrow BD = 12$

এবং, $AC^2 = (3-3)^2 + (-5-25)^2 = 900 \Longrightarrow AC = 30$

যেহেতু **কর্ণ $BD \neq$ কর্ণ AC**। সুতরাং ***ABCD* একটি রম্বস।**

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

PROBLEMS

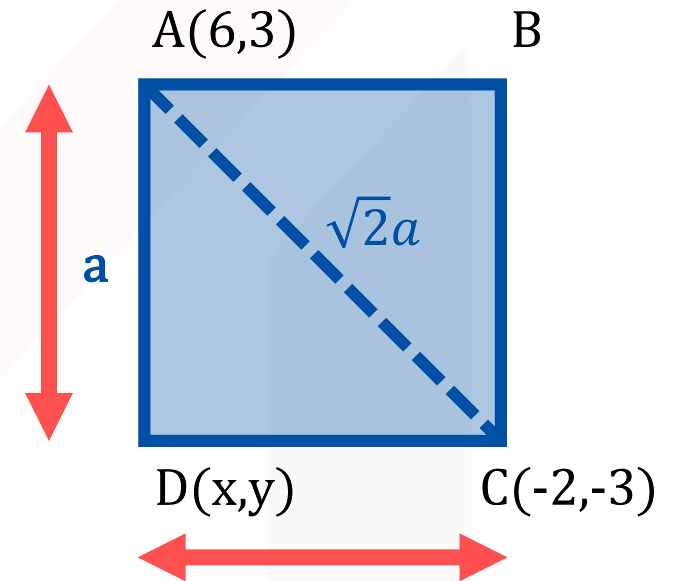
(2) যে বর্গের একটি কর্ণের প্রান্ত বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক $(6,3)$ ও $(-2,-3)$; ঐ বর্গের ক্ষেত্রফল এবং অপর দুইটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

AC কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-2-6)^2 + (-3-3)^2}$

$\Rightarrow \sqrt{2}a = \sqrt{100}$

$\therefore a = \dfrac{10}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $a^2 = \left(\dfrac{10}{\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{100}{2} = 50$ বর্গ একক



এখন, AD=DC

$\Rightarrow \sqrt{(x-6)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y+3)^2}$

$\Rightarrow x^2 - 12x + 36 + y^2 - 6y + 9 = x^2 + 4x + 4 + y^2 + 6y + 9$

$\Rightarrow -16x - 12y + 32 = 0$

$\Rightarrow 4x + 3y - 8 = 0 \quad \Rightarrow 4x = 8 - 3y = 0 \quad \therefore \boldsymbol{x = \dfrac{1}{4}(8 - 3y) \ldots \ldots (i)}$

PROBLEMS

(2) যে বর্গের একটি কর্ণের প্রান্ত বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক $(6,3)$ ও $(-2,-3)$; ঐ বর্গের ক্ষেত্রফল এবং অপর দুইটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

আবার, $DC^2 = 50$

$\Rightarrow (x+2)^2 + (y+3)^2 = 50$

$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 50$

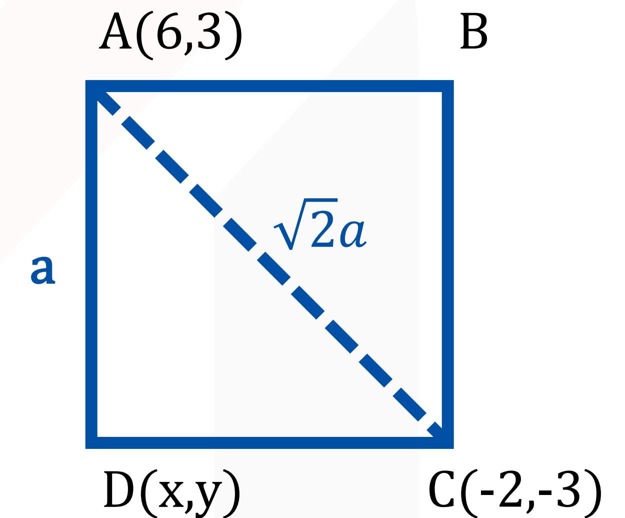
$\Rightarrow \frac{1}{16}(8-3y)^2 + (8-3y) + y^2 + 6y - 37 = 0$

$\Rightarrow 64 + 9y^2 - 48y + 128 - 48y + 16y^2 + 96y - 592 = 0$

$\Rightarrow 16y^2 + 9y^2 - 96y + 96y - 592 + 192 = 0$

$\Rightarrow 25y^2 - 400 = 0$

$\therefore \boldsymbol{y = \pm 4}$



$\therefore \boldsymbol{x = \frac{1}{4}(8-3y) \dots\dots (i)}$

PROBLEMS

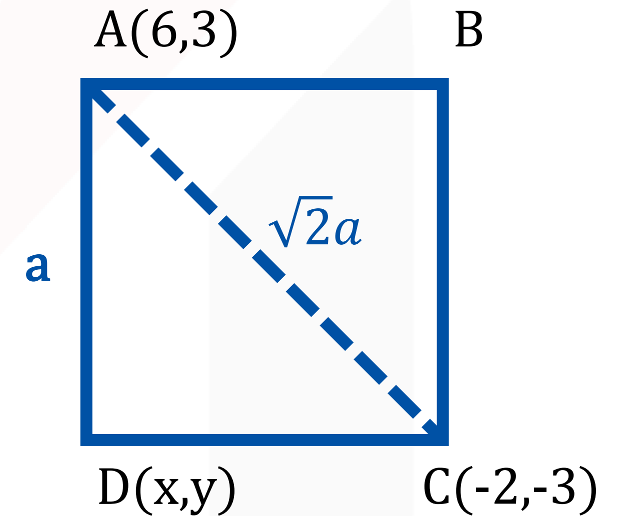
(2) যে বর্গের একটি কর্ণের প্রান্ত বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক $(6, 3)$ ও $(-2, -3)$; ঐ বর্গের ক্ষেত্রফল এবং অপর দুইটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

y এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$\boldsymbol{y = 4}$ **হলে**, $x = \frac{1}{4}(8 - 12) = -1$

$\boldsymbol{y = -4}$ **হলে**, $x = \frac{1}{4}(8 + 12) = 5$

$\therefore$ **বর্গের অপর শীর্ষবিন্দু দুটির স্থানাঙ্ক** $(\boldsymbol{-1, 4}), (\boldsymbol{5, -4})$



$$\therefore \boldsymbol{x = \frac{1}{4}(8 - 3y) \dots\dots (i)}$$

PROBLEMS

(3) একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5, কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(5, 3)$; এর যে জ্যা $(3, 2)$ বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয় তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

C ও D এর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(5-3)^2 + (3-2)^2}$

$= \sqrt{5}$ একক

সমকোণী ΔACD হতে পাই,

$AD^2 + CD^2 = AC^2$

$\therefore AD^2 = AC^2 - CD^2$

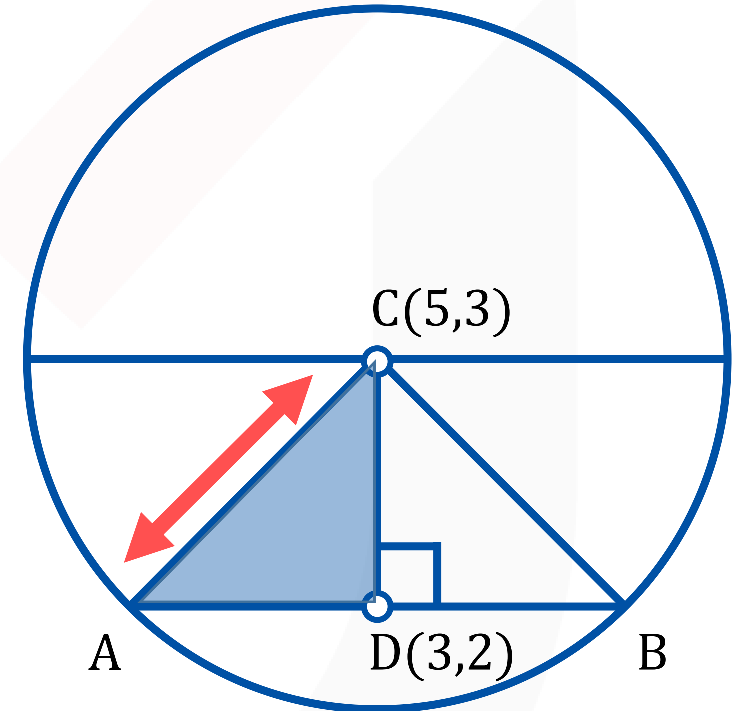
$= 5^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2$

$= 25 - 5$

$= 20$

$\therefore AD = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ একক

এখন, **জ্যা $AB = 2AD = 2 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$ একক**



PROBLEMS

(4) একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যার কোটি ভুজের দ্বিগুণ এবং তা $(4, 3)$ বিন্দু থেকে $\sqrt{10}$ একক দূরত্বে অবস্থিত।

ধরি, বিন্দুটি $A(p, 2p)$

$B(4,3)$

প্রশ্নমতে, $AB = \sqrt{10}$

$\Rightarrow \sqrt{(p-4)^2 + (2p-3)^2} = \sqrt{10}$

$\Rightarrow p^2 - 8p + 16 + 4p^2 - 12p + 9 = 10$

$\Rightarrow 5p^2 - 20p + 15 = 0$

$\Rightarrow p^2 - 4p + 3 = 0$

$\Rightarrow p^2 - 2.2p + 2^2 - 4 + 3 = 0$

$\Rightarrow (p-2)^2 = 1$

$\Rightarrow \boldsymbol{p - 2 = \pm 1}$

PROBLEMS

(4) একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যার কোটি ভুজের দ্বিগুণ এবং তা $(4, 3)$ বিন্দু থেকে $\sqrt{10}$ একক দূরত্বে অবস্থিত।

ধণাত্মক মান নিয়ে, $p - 2 = 1$

$\therefore p = 3$

ঋনাত্মক মান নিয়ে, $p - 2 = -1$

$\therefore p = 1$

$\therefore$ নির্ণয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(1, 2), (3, 6)$

PROBLEMS

(5) একটি সমবাহু ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, -4)$, $(0, 4)$ হলে, এর তৃতীয় শীর্ষবিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

দেয়া আছে, দুটি শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে $A(0, -4), B(0,4)$

ধরি, তৃতীয় বিন্দুটি $P(x, y)$

যেহেতু সমবাহু ত্রিভুজ তাই $AP = BP = AB$

এখন, $AP^2 = BP^2$

$$\Rightarrow x^2 + (y+4)^2 = x^2 + (y-4)^2$$

$$\Rightarrow y^2 + 8y + 16 = y^2 - 8y + 16$$

$$\Rightarrow 16y = 0$$

$$\therefore \boldsymbol{y = 0}$$

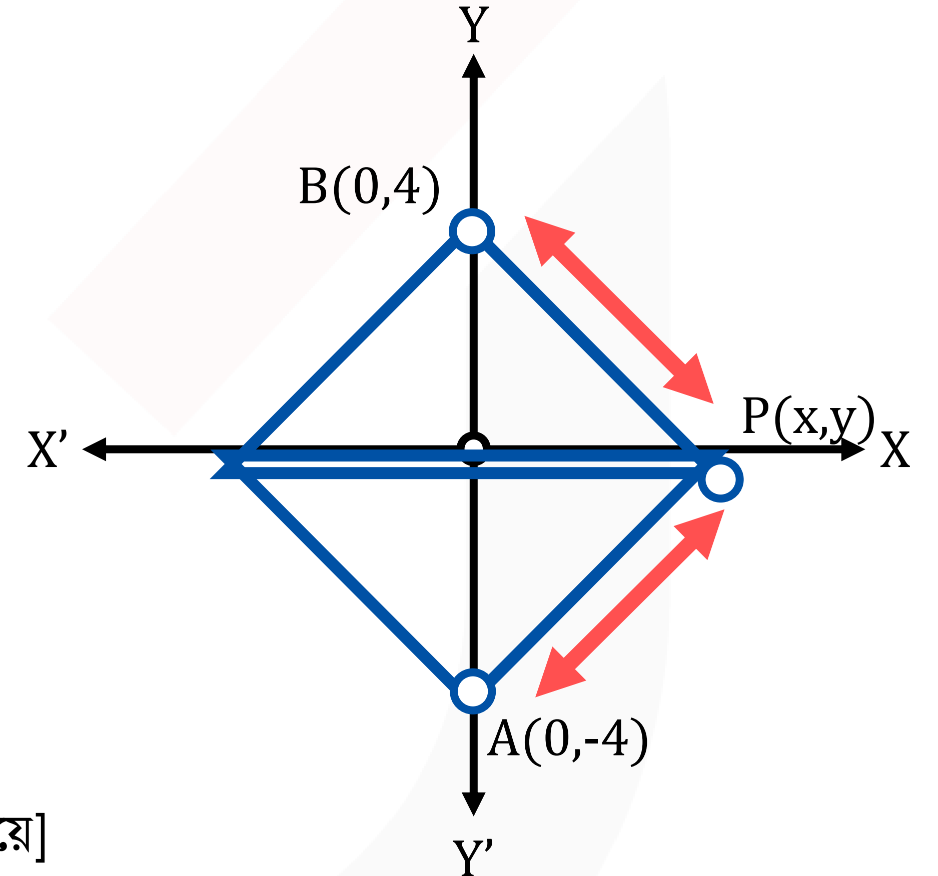
আবার, $AB^2 = BP^2$

$$\Rightarrow (0-0)^2 + (4+4)^2 = (x-0)^2 + (y-4)^2$$

$$\Rightarrow 64 = x^2 + y^2 - 8y + 16 \qquad [y = 0 \text{ বসিয়ে}]$$

$$\Rightarrow x^2 = 48 \qquad \therefore x = \pm\sqrt{48} = \pm 4\sqrt{3}$$

$\therefore$ **তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\pm 4\sqrt{3}, 0)$**



PROBLEMS

(6) x অক্ষ ও $(-5,-7)$ থেকে $(4,k)$ বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, k এর মান নির্ণয় কর।

মনেকরি, বিন্দু দুটি $P(-5,-7), Q(4,\mathrm{k})$ x অক্ষের উপর AQ লম্ব টানি, তাহলে x অক্ষ থেকে Q এর দুরত্ব $AQ = k$

শর্তানুসারে, $\boldsymbol{AQ = PQ}$

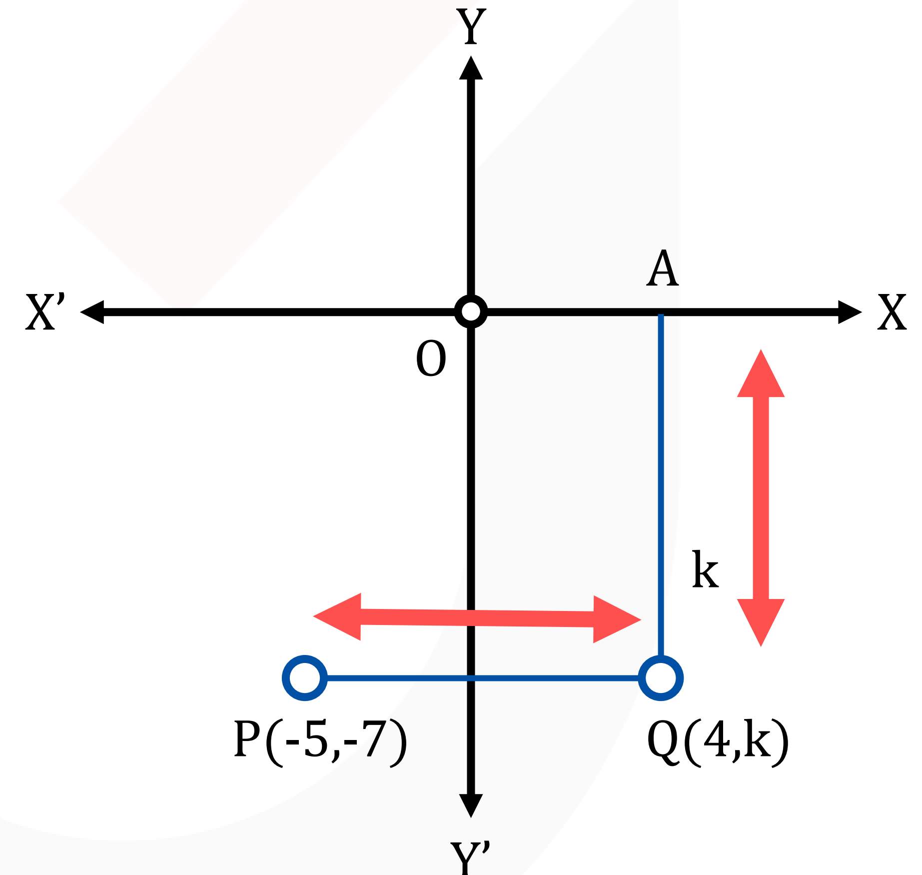
$$\Rightarrow AQ^2 = PQ^2$$

$$\Rightarrow k^2 = (4+5)^2 + (k+7)^2$$

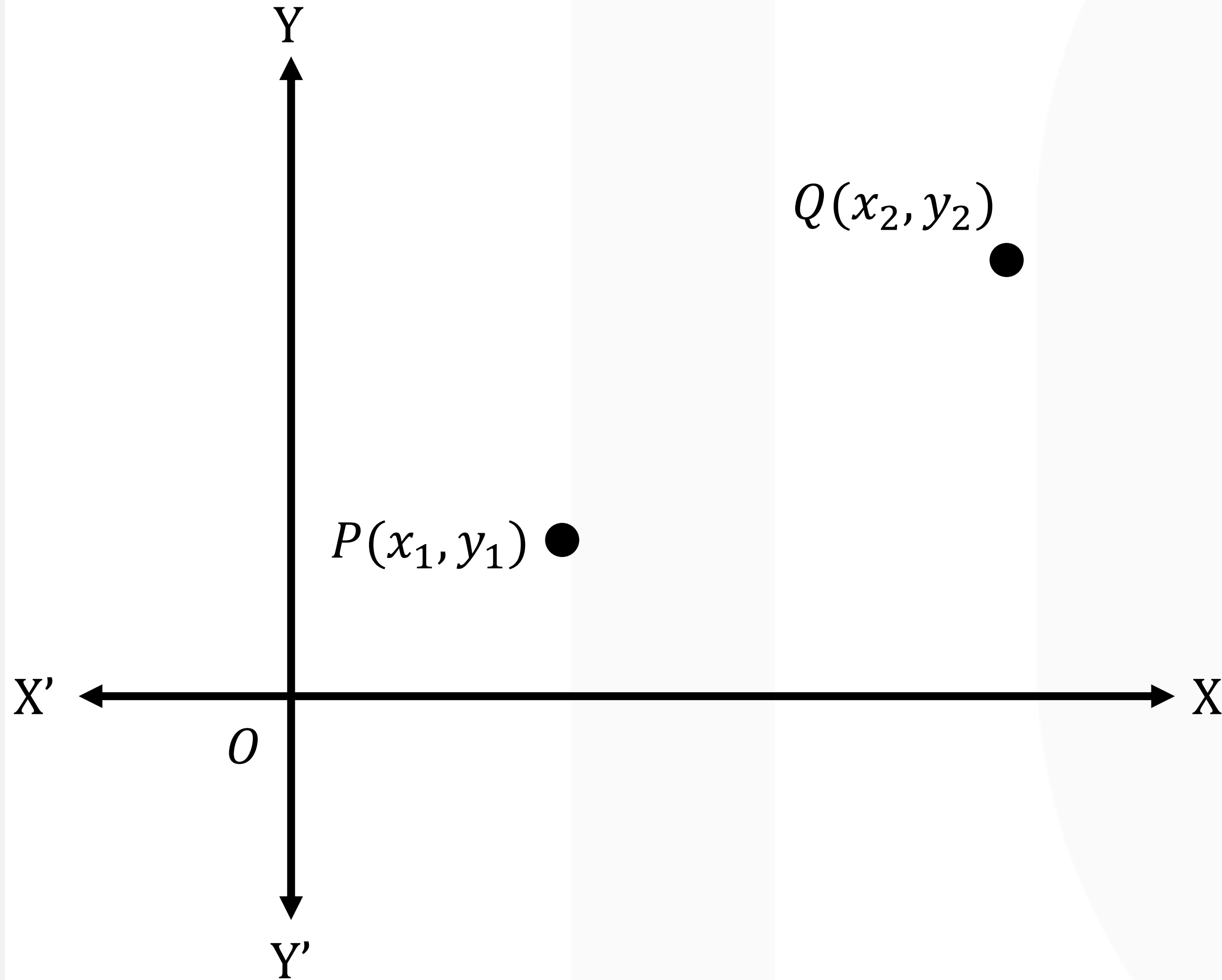
$$\Rightarrow k^2 = 81 + k^2 + 14k + 49$$

$$\Rightarrow 14k = -130$$

$$\therefore \boldsymbol{k = -\frac{65}{7}}$$

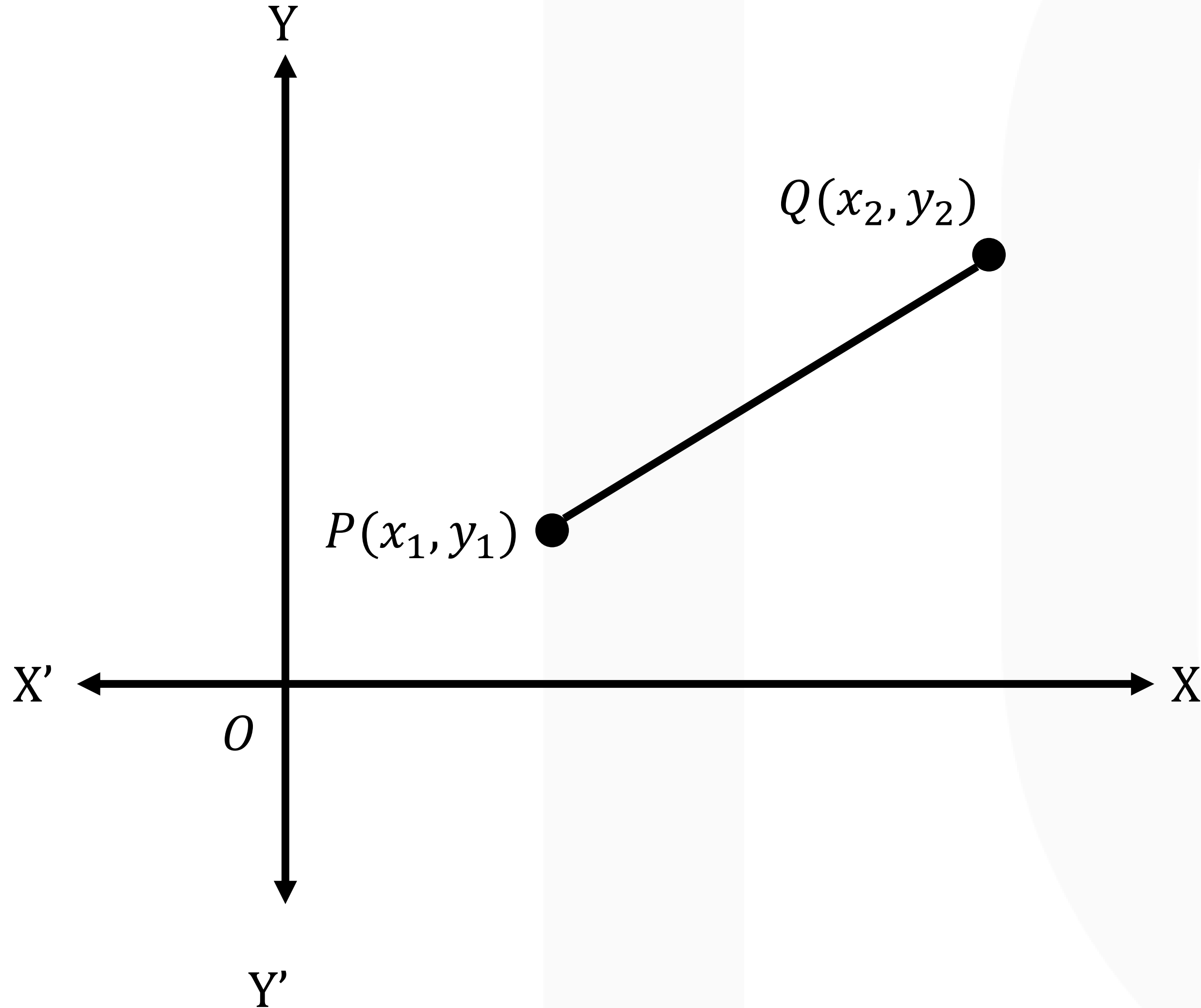


অন্তর্বিভক্তি



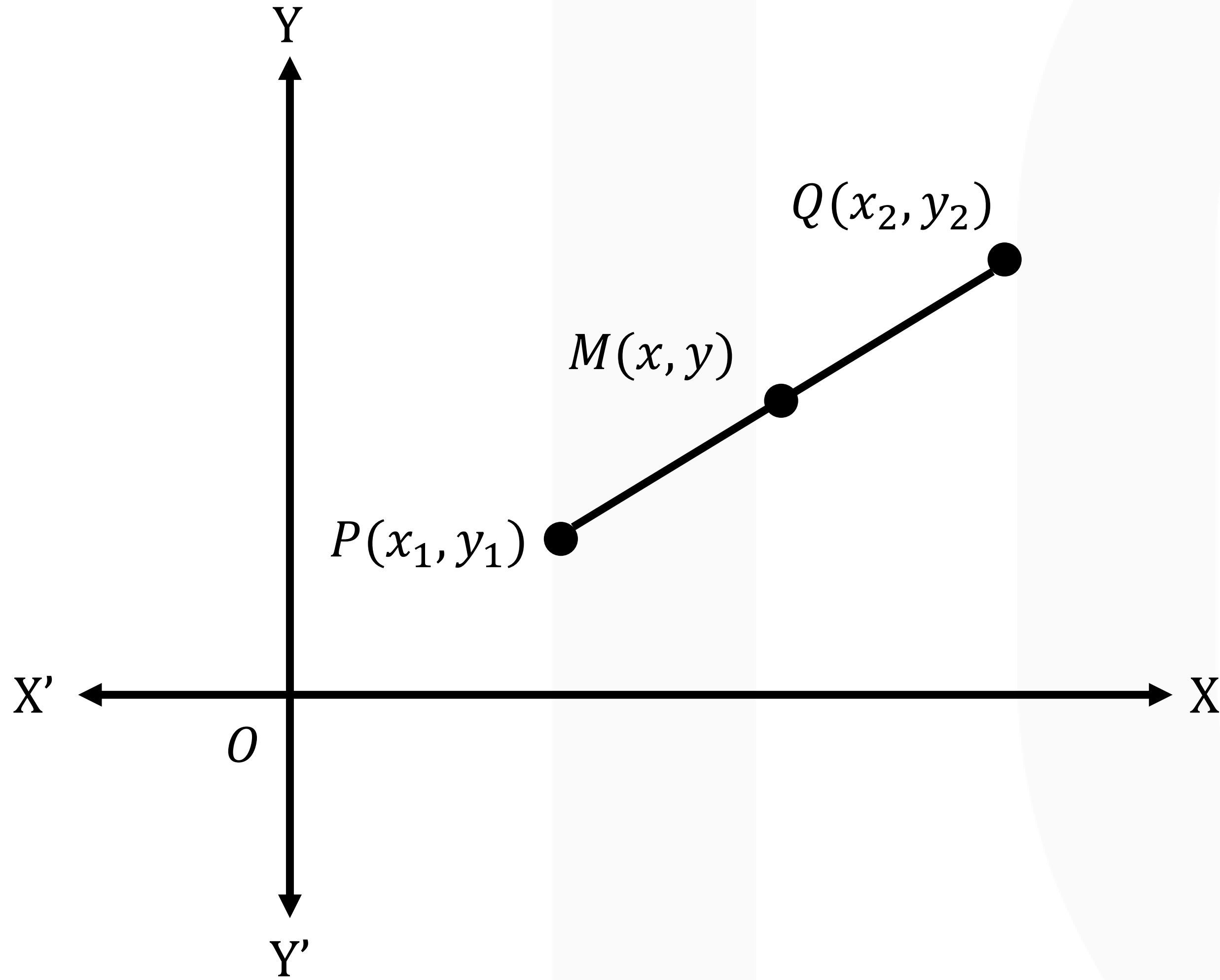
যেকোনো দুটি বিন্দু

অন্তর্বিভক্তি



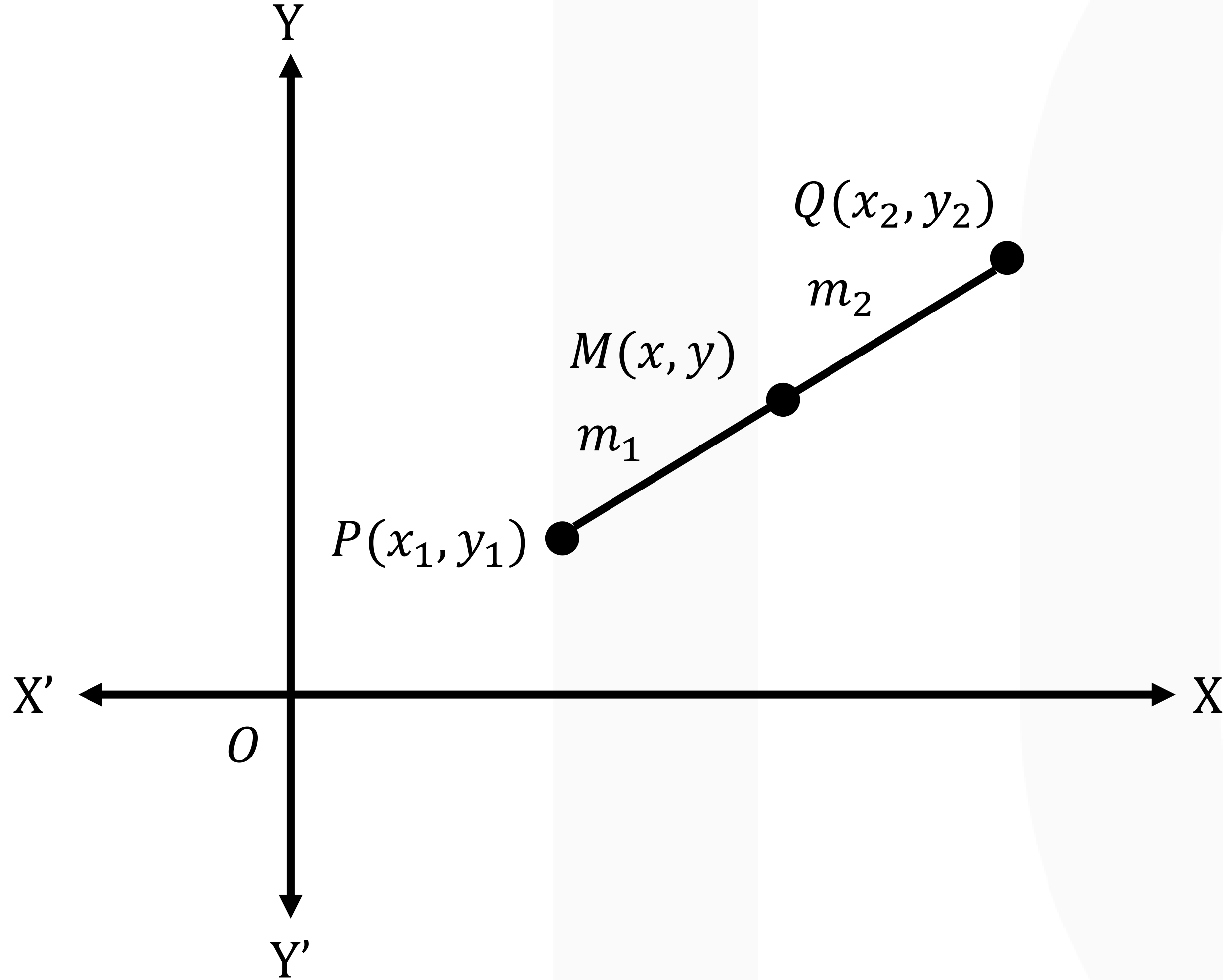
বিন্দু দুটি যোগ

অন্তর্বিভক্তি



মাঝে যেকোনো বিন্দু

অন্তর্বিভক্তি

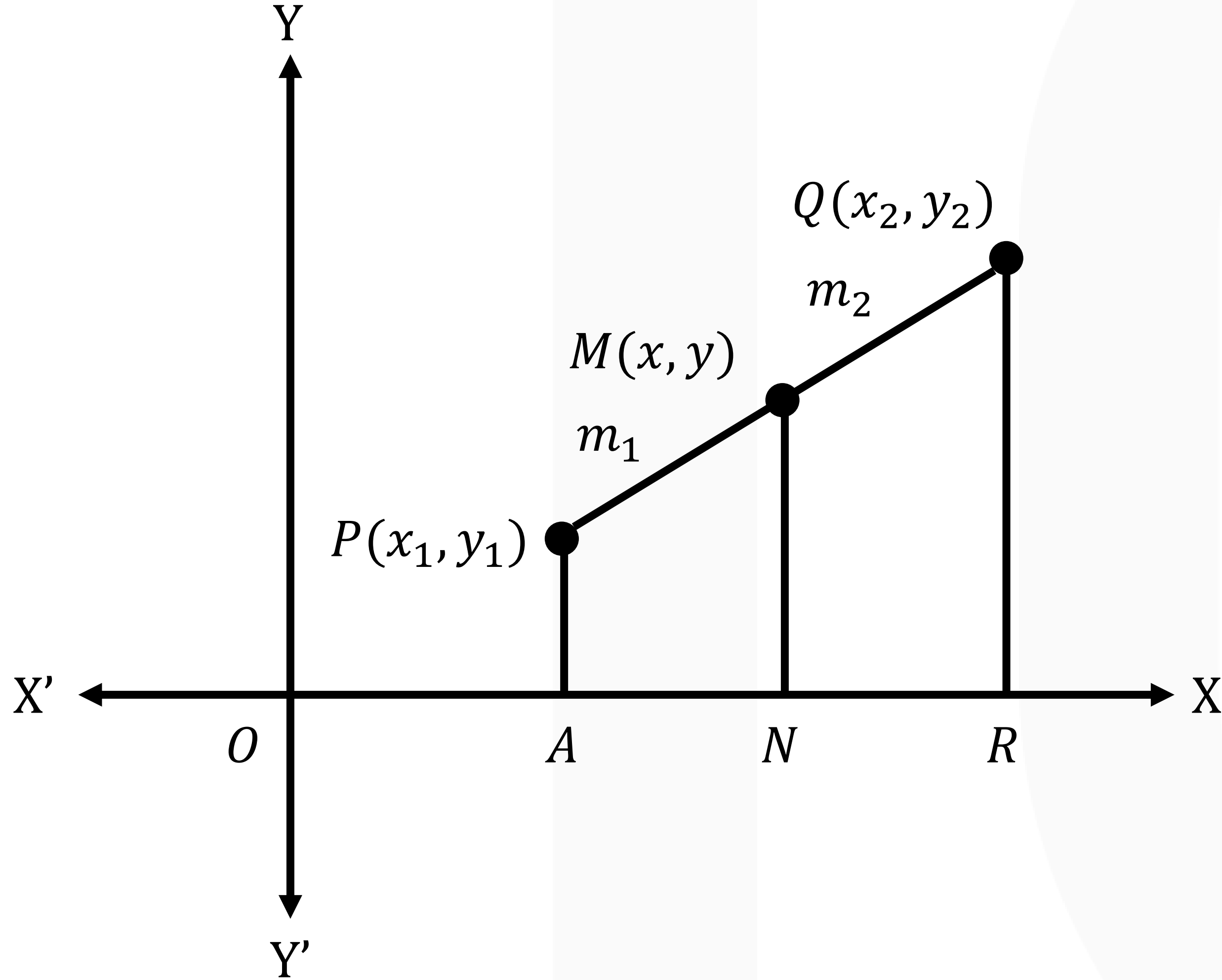


অনুপাতে ভাগ

DOWNLOAD THE APP

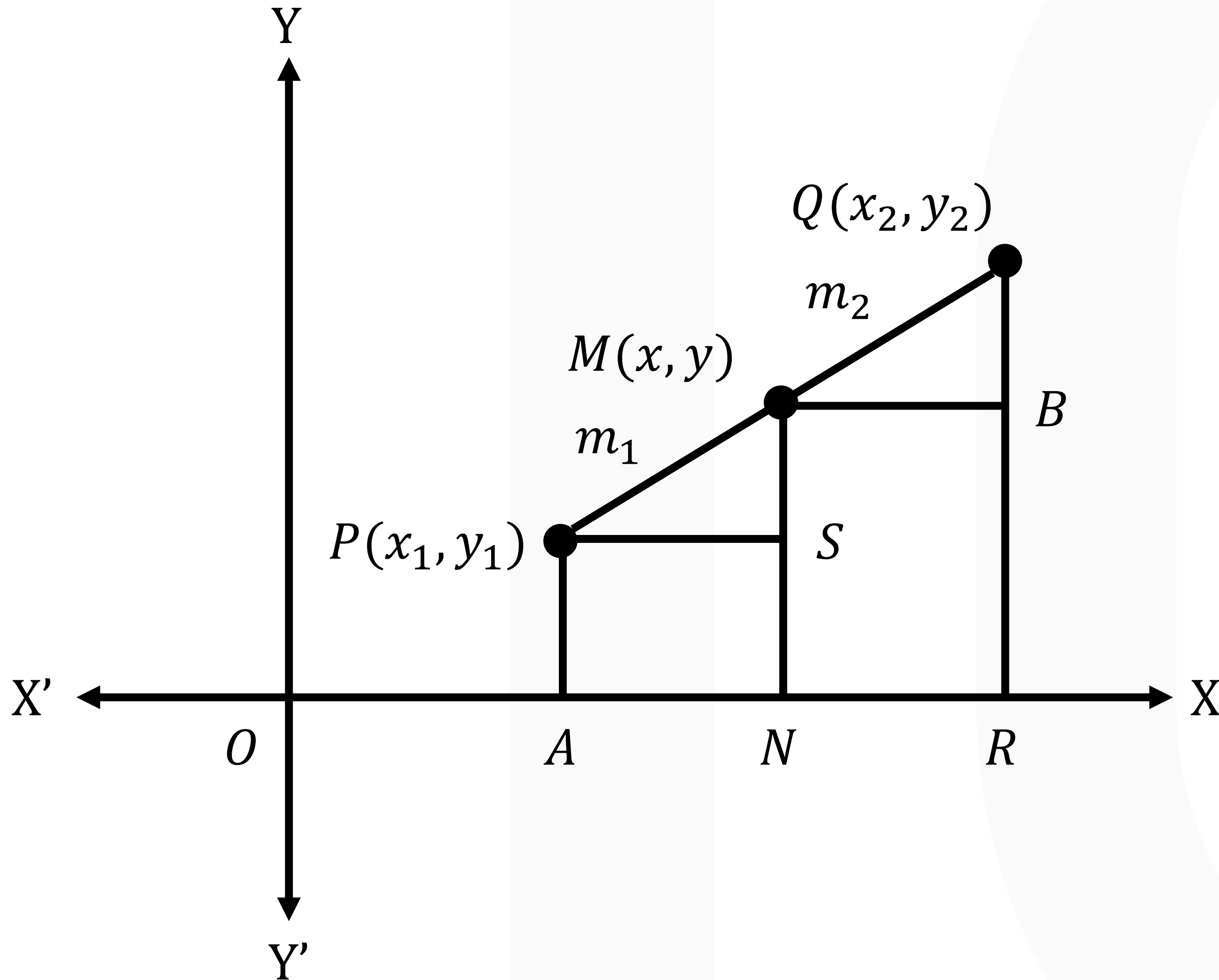
10 MINUTE SCHOOL

অন্তর্বিভক্তি



X অক্ষে লম্ব

অন্তর্বিভক্তি

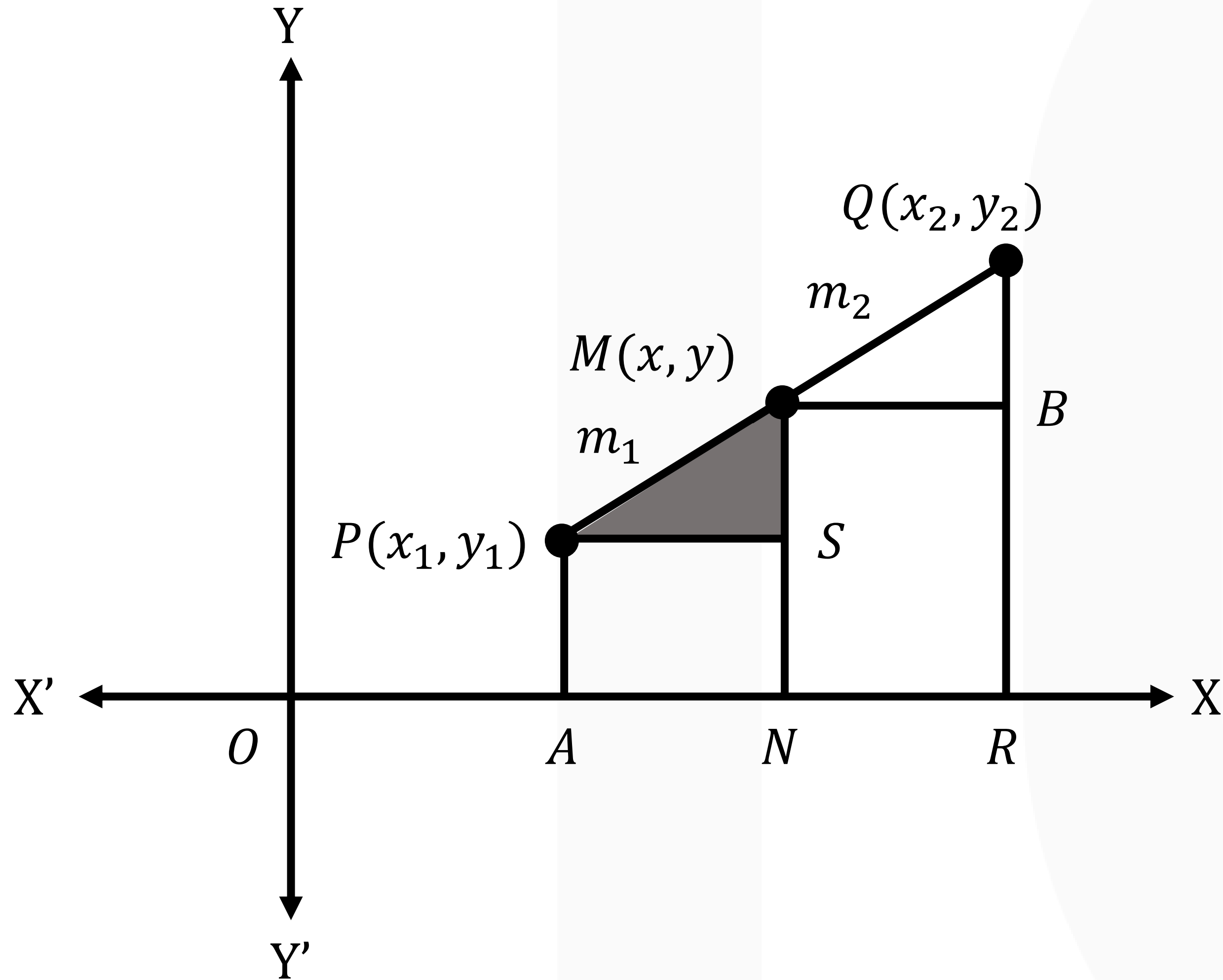


PS ও MB

DOWNLOAD THE APP

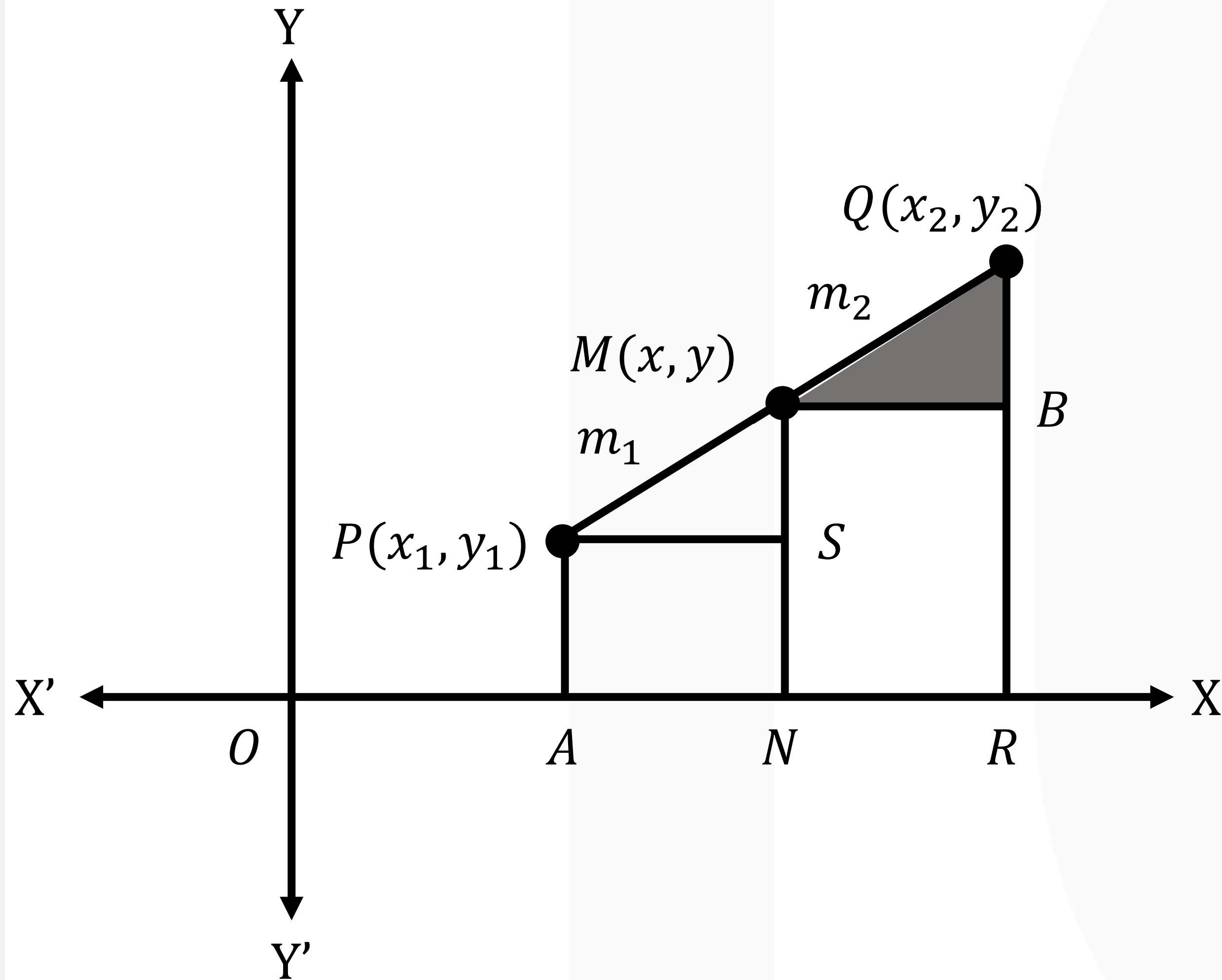
10 MINUTE SCHOOL

অন্তর্বিভক্তি



ΔMPS

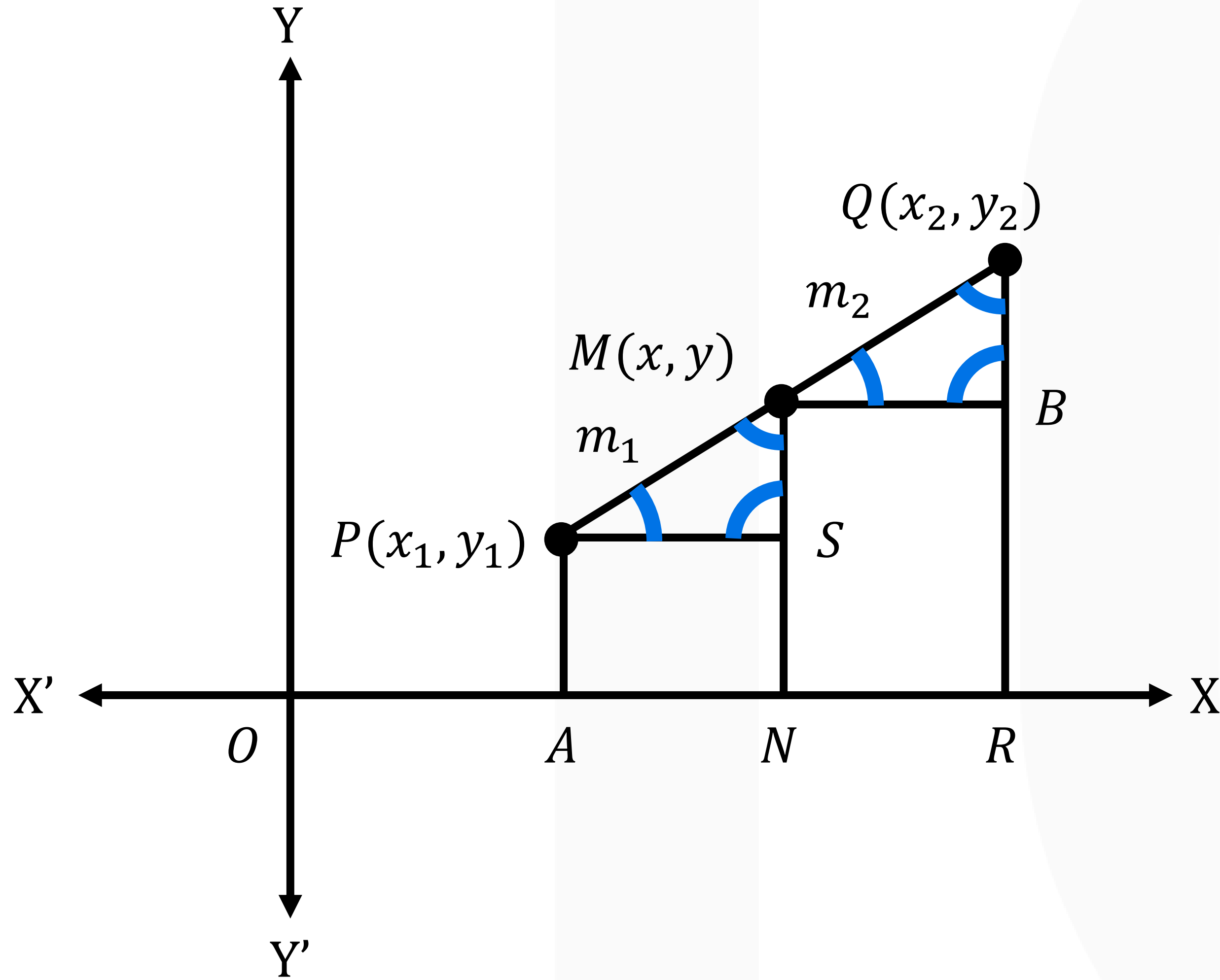
অন্তর্বিভক্তি



ΔMPS

ΔQMB

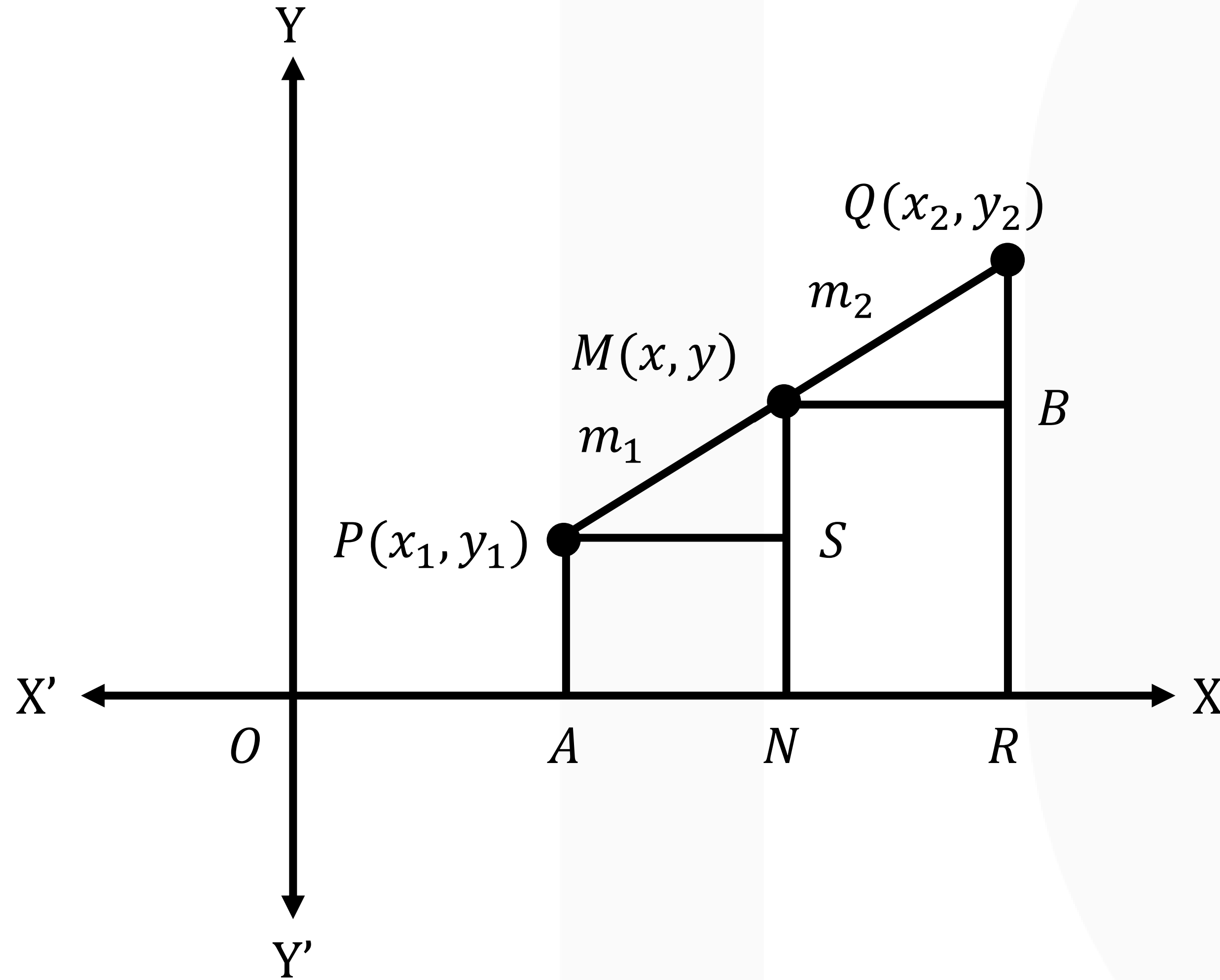
অন্তর্বিভক্তি



ΔMPS ও ΔQMB

সদৃশকোণী

অন্তর্বিভক্তি

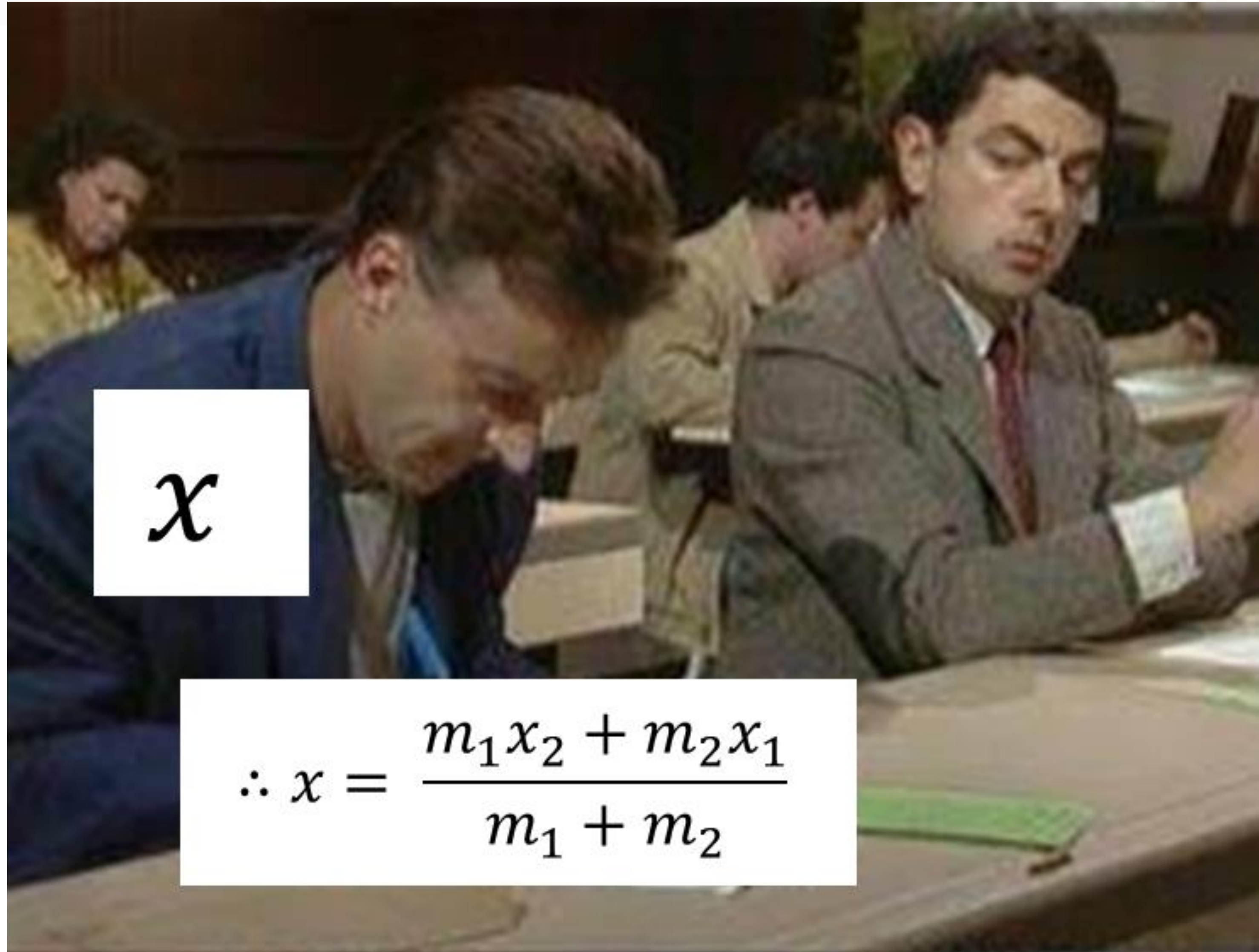


ΔMPS ও ΔQMB সদৃশকোণী বলে,

$$\frac{PS}{MB} = \frac{PM}{MQ}$$

বা, $$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m_1}{m_2}$$

$$\therefore \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{m_1 x_2 + m_2 x_1}}{\boldsymbol{m_1 + m_2}}$$



x
$\therefore x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$

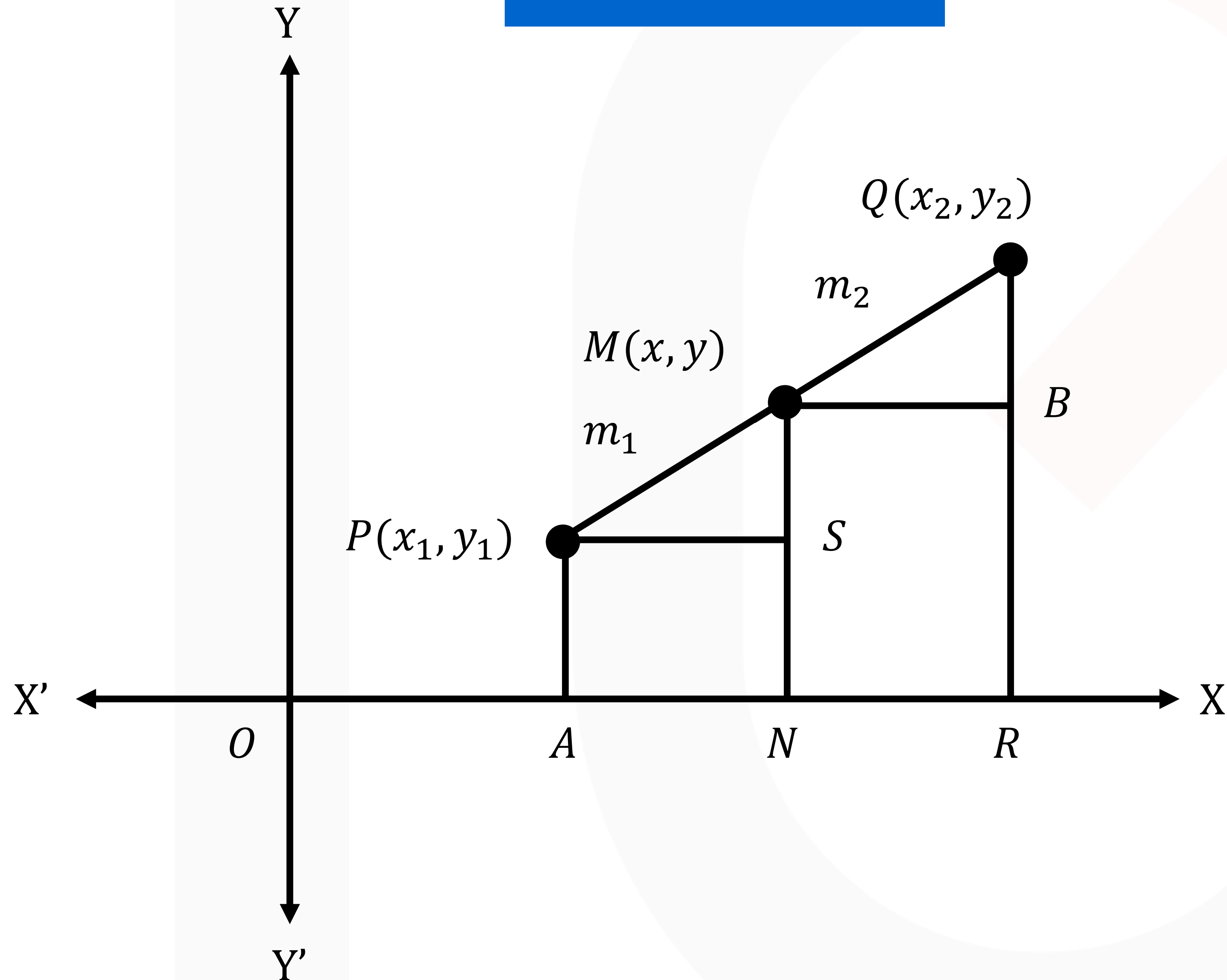
x

$$\therefore x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$$

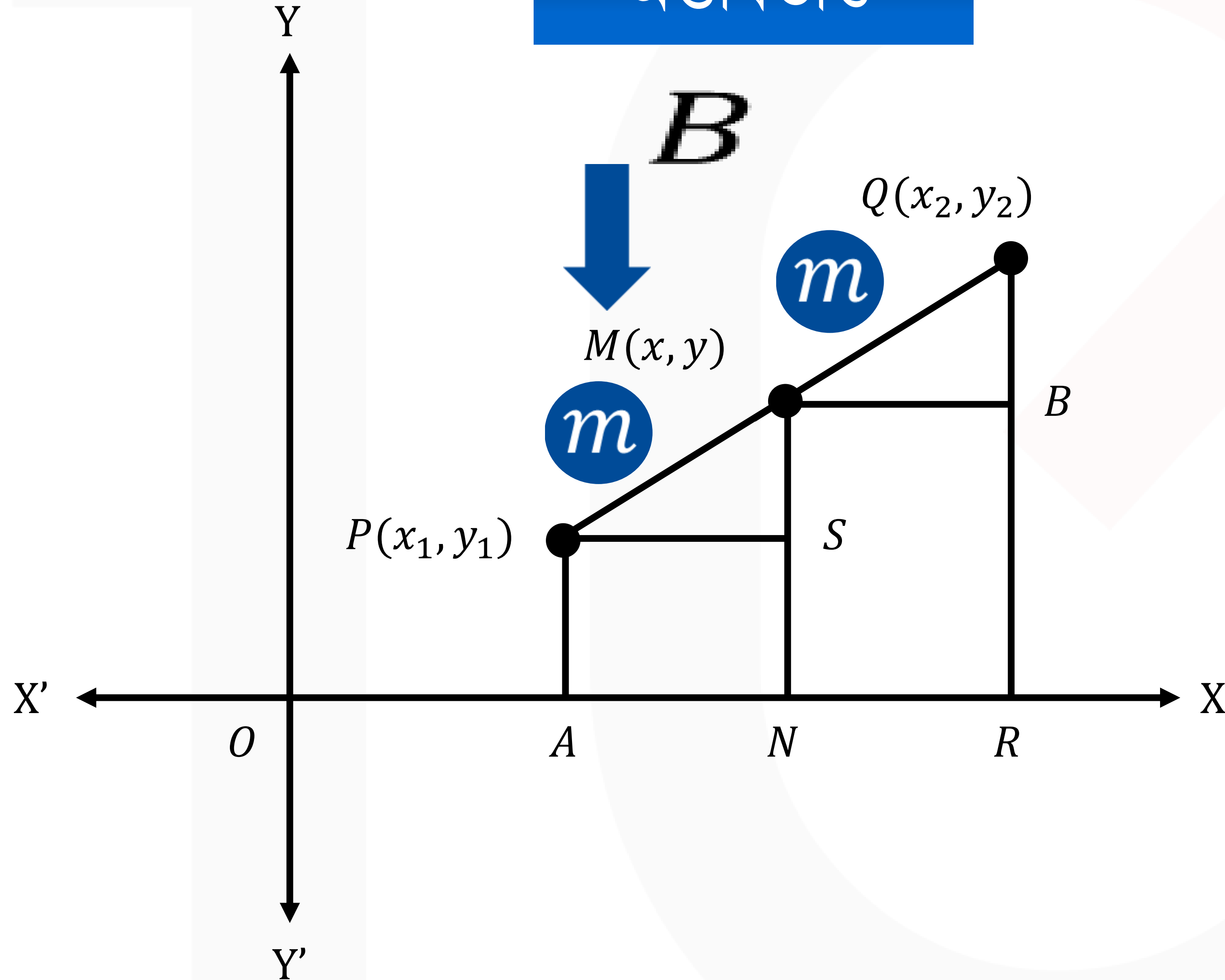
y

$$\therefore y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$$

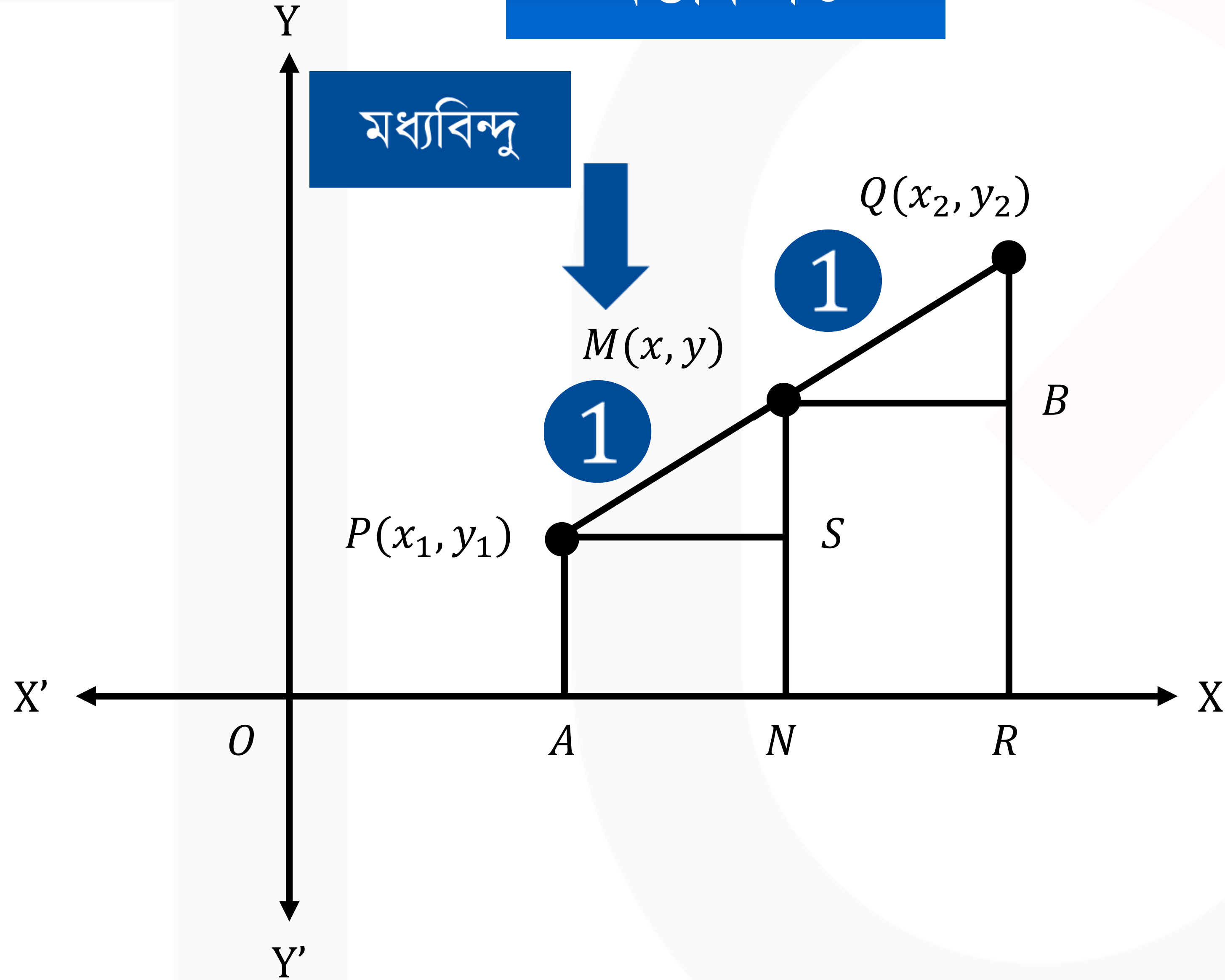
অন্তর্বিভক্তি



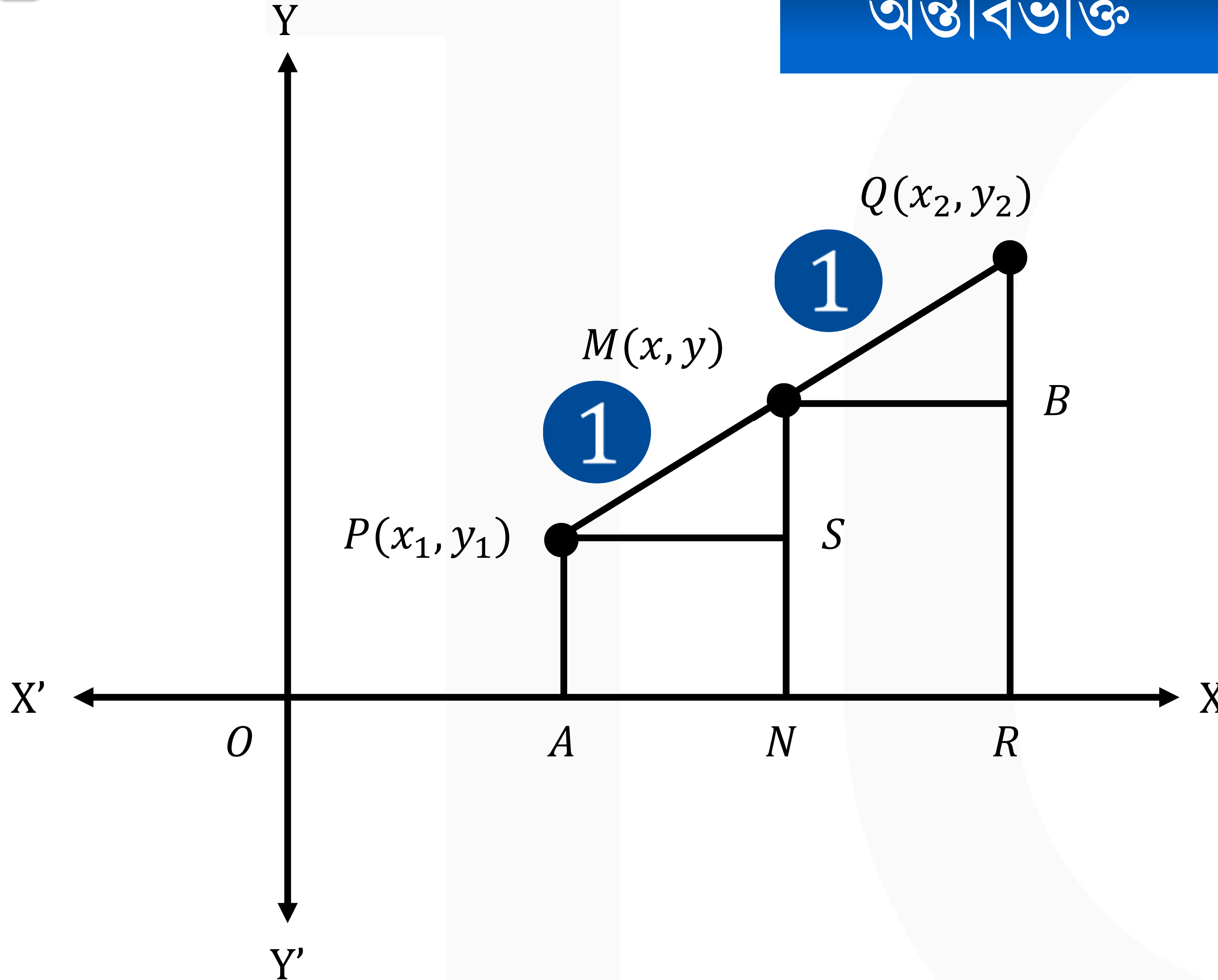
অন্তর্বিভক্তি



অন্তর্বিভক্তি



অন্তর্বিভক্তি

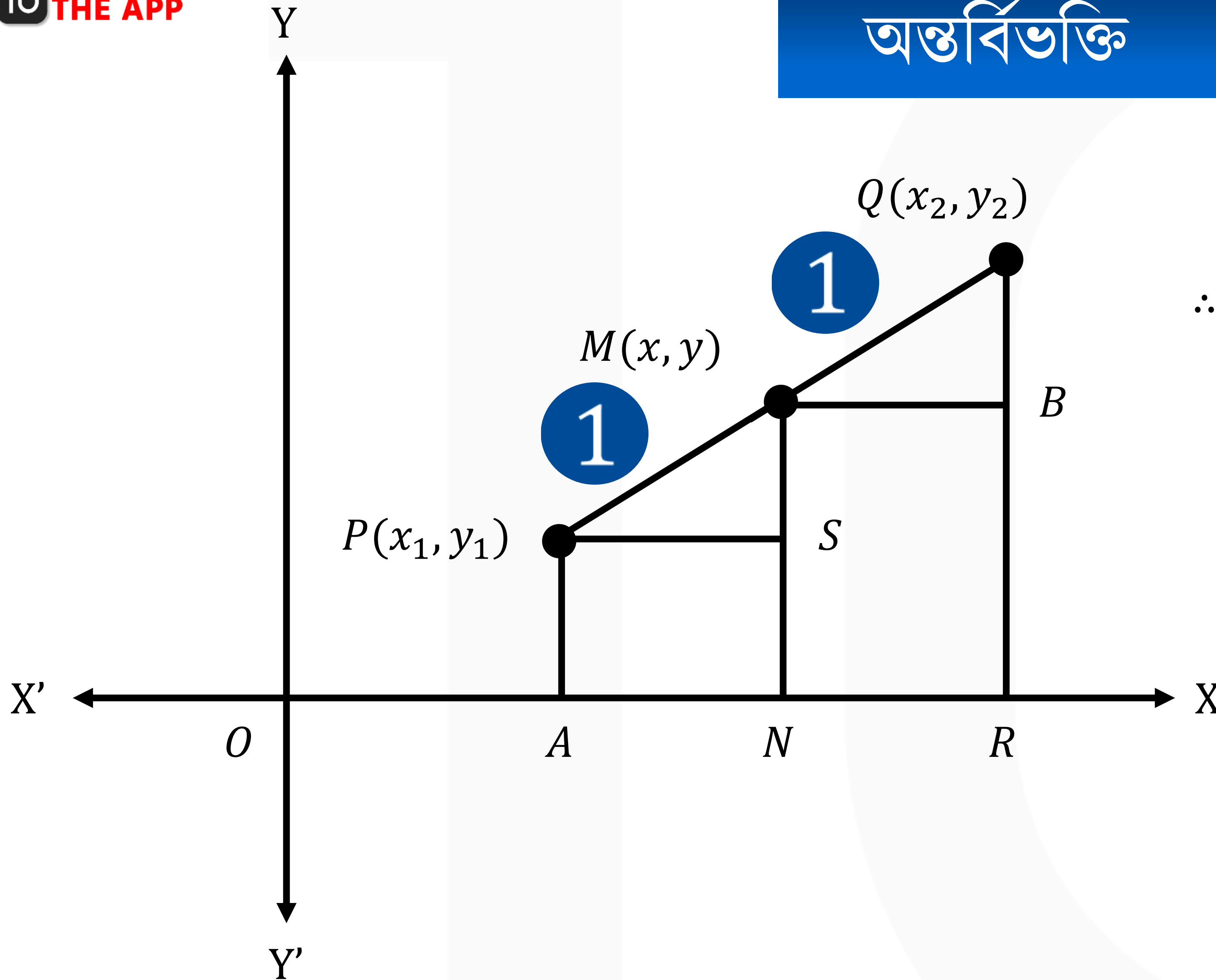


যদি M মধ্যবিন্দু হয়,

$$\therefore x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

অন্তর্বিভক্তি



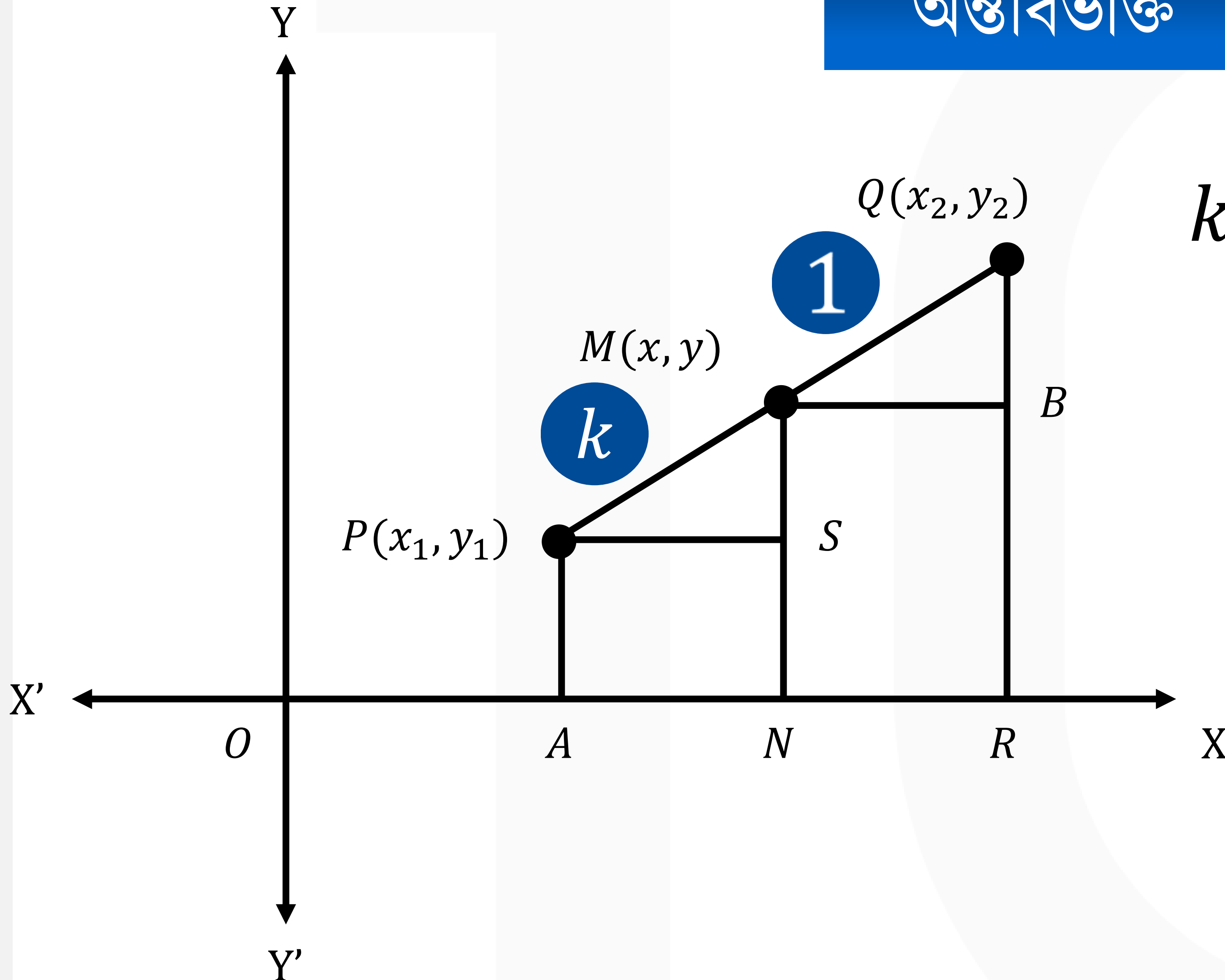
যদি M মধ্যবিন্দু হয়,

$$\therefore x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2} \qquad \therefore y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

অন্তর্বিভক্তি



$$\therefore x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2} \quad \therefore y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

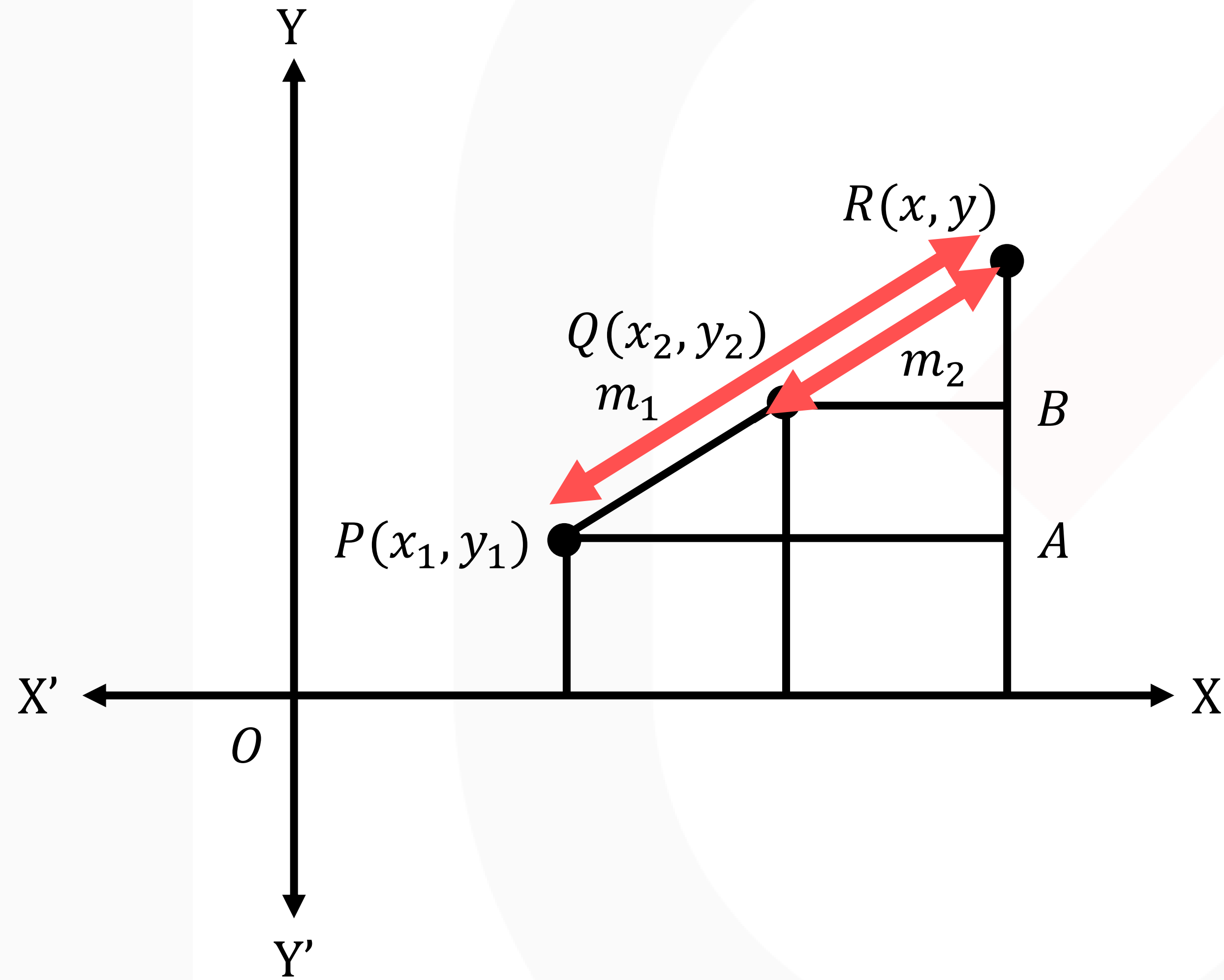
$k : 1$ অনুপাতে বিভক্ত করলে,

$$\frac{PM}{MQ} = \frac{k}{1}$$

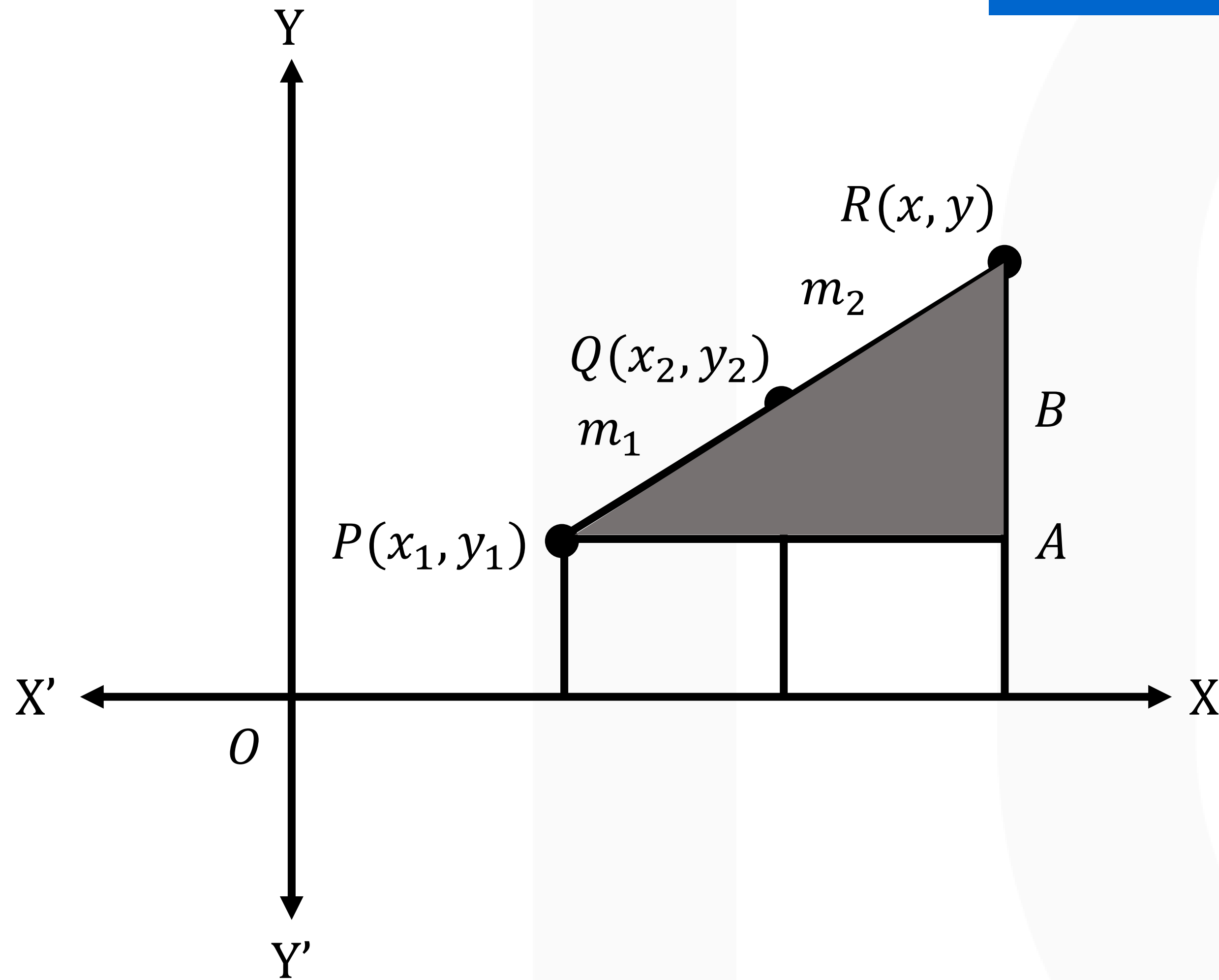
$$\therefore x = \frac{kx_2 + x_1}{k + 1}$$

$$\therefore y = \frac{ky_2 + y_1}{k + 1}$$

বহির্বিভক্তি

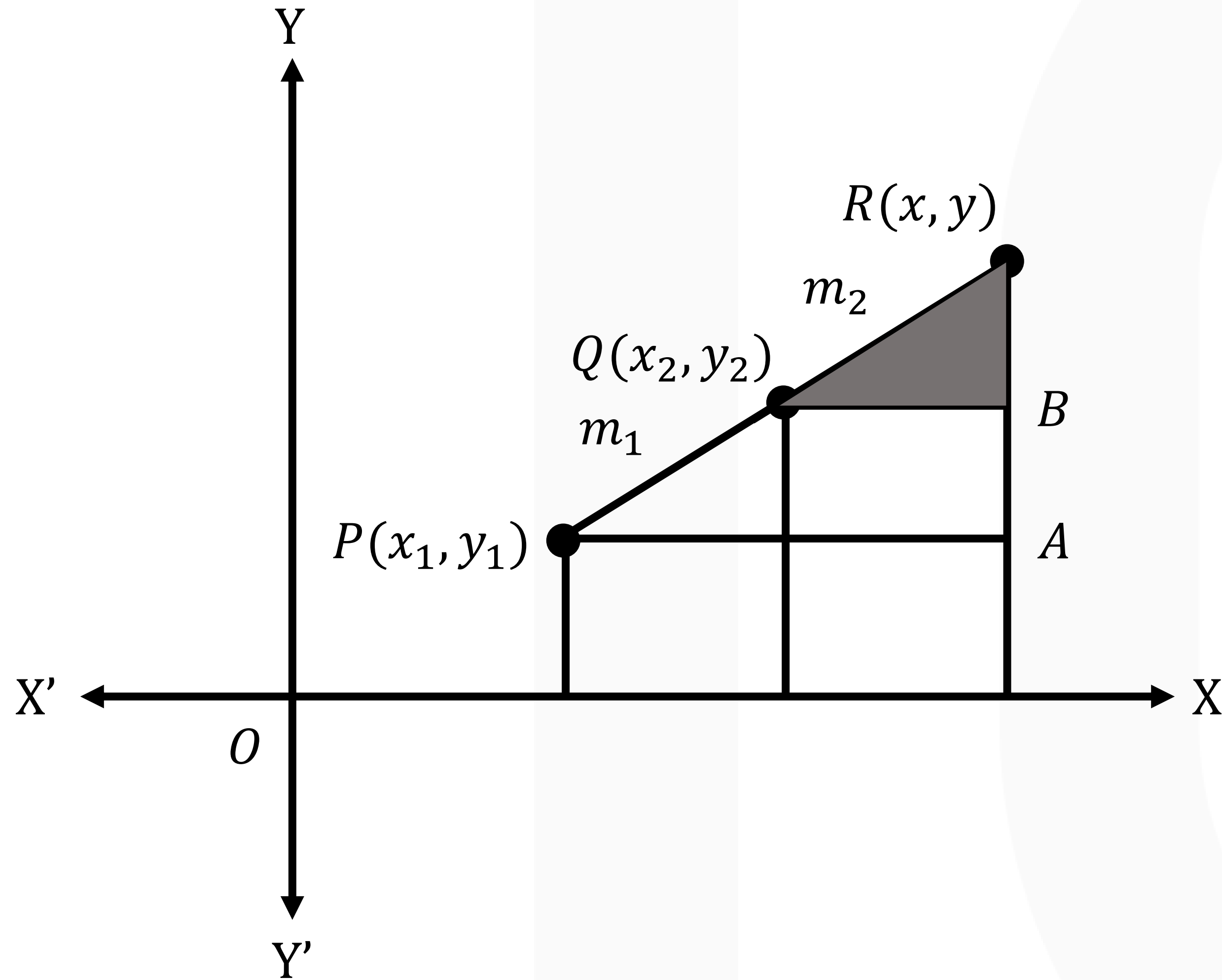


বহির্বিভক্তি



ΔPAR

বহির্বিভক্তি



ΔPAR

ΔQRB

বহির্বিভক্তি

Y

$R(x, y)$

m_2

$Q(x_2, y_2)$

m_1

B

$P(x_1, y_1)$

A

X' O X

Y'



$$\frac{PA}{QB} = \frac{PR}{QR}$$

বা, $\dfrac{x - x_1}{x - x_2} = \dfrac{m_1}{m_2}$

$$\therefore \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{m_1 x_2 - m_2\, x_1}}{\boldsymbol{m_1 - m_2}}$$

$$\therefore \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{m_1 y_2 - m_2 y_1}}{\boldsymbol{m_1 - m_2}}$$

PROBLEMS

(1) $(9, 12)$ ও $(7, 8)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার মধ্যবিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর।

ধরি, মধ্যবিন্দুর স্থানাংক (α, β)



$$\therefore \alpha = \frac{9+7}{2} = 8$$

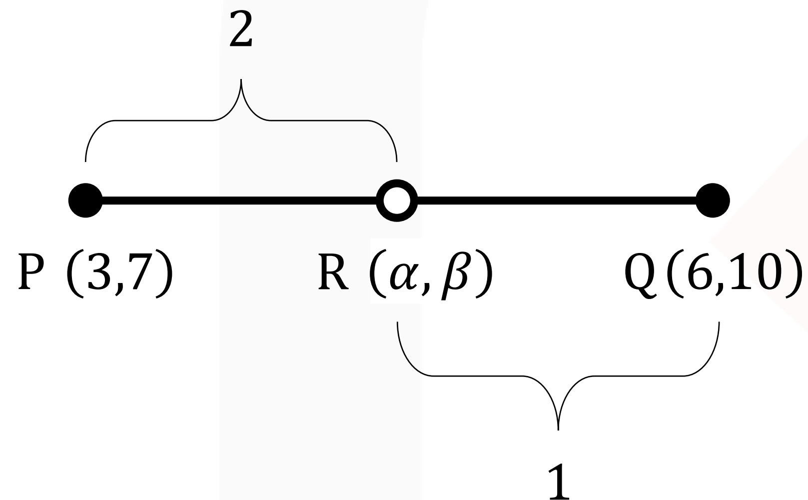
$$\therefore \beta = \frac{12+8}{2} = 10$$

$\therefore$ **মধ্যবিন্দু** $\equiv \mathbf{(8, 10)}$

PROBLEMS

(2) (3, 7) ও (6, 10) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে যে বিন্দু 2: 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করে তার স্থানাংক নির্ণয় কর।

অন্তর্বিভক্ত



$$\therefore y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$$

ধরি, বিন্দুটির স্থানাংক (α, β)

$$\therefore \alpha = \frac{2 \times 6 + 1 \times 3}{2 + 1} = 5 \qquad \therefore \beta = \frac{2 \times 10 + 1 \times 7}{2 + 1} = 9$$

Ans: $(5, 9)$

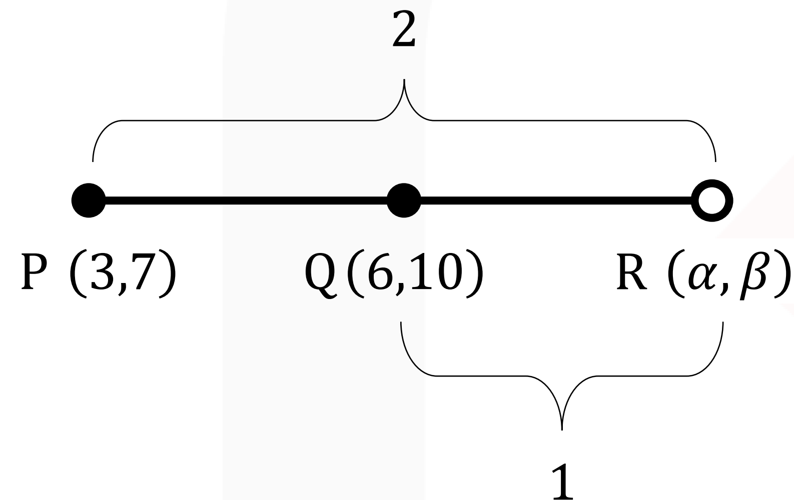
DOWNLOAD THE APP

PROBLEMS

10 MINUTE SCHOOL

(2) $(3, 7)$ ও $(6, 10)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে যে বিন্দু $2:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করে তার স্থানাংক নির্ণয় কর।

বহির্বিভক্ত



ধরি, বিন্দুটির স্থানাংক (α, β)

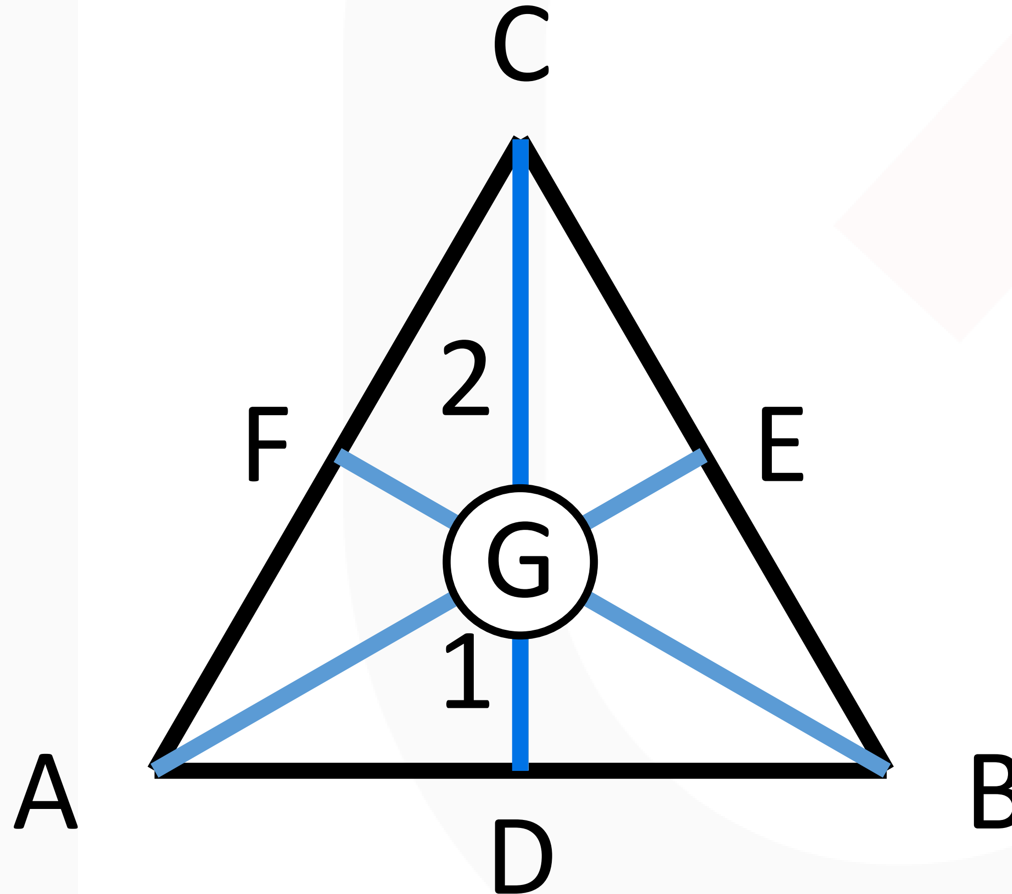
$$\therefore \alpha = \frac{2 \times 6 - 1 \times 3}{2 - 1} = 9 \qquad \therefore \beta = \frac{2 \times 10 - 1 \times 7}{2 - 1} = 13$$

Ans: $(9, 13)$

ভরকেন্দ্র

ভরকেন্দ্র হল সেই বিন্দু যেখানে মধ্যমা তিনটি মিলিত হয়

অন্যভাবে বলা যায় মধ্যমার উপরস্থ বিন্দু যেটি 2: 1 অনুপাতে বিভক্ত হয়।

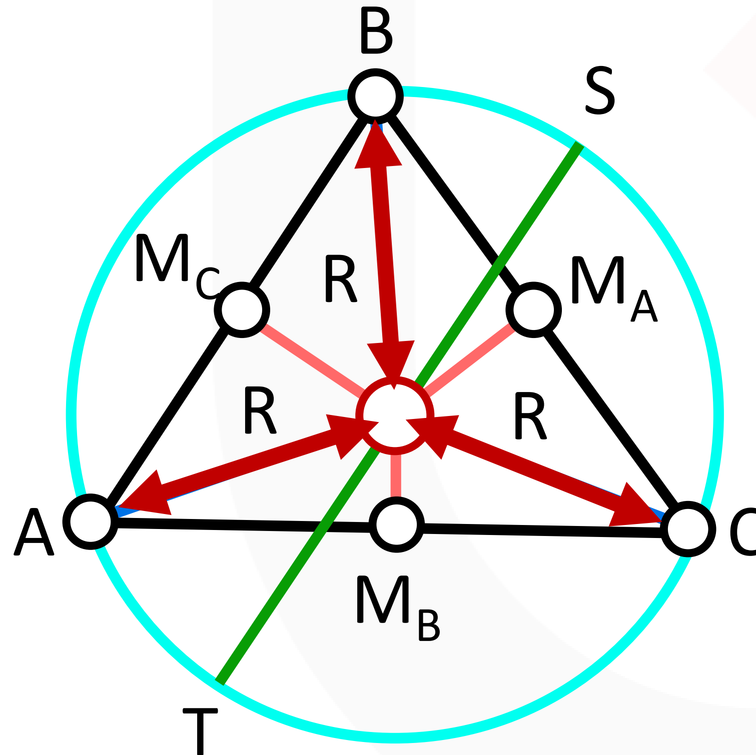


পরিকেন্দ্র

পরিকেন্দ্র → পরিবৃত্তের কেন্দ্র → বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ হতে

এটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর লম্ব সমদ্বিখন্ডকত্রয়ের ছেদবিন্দু।

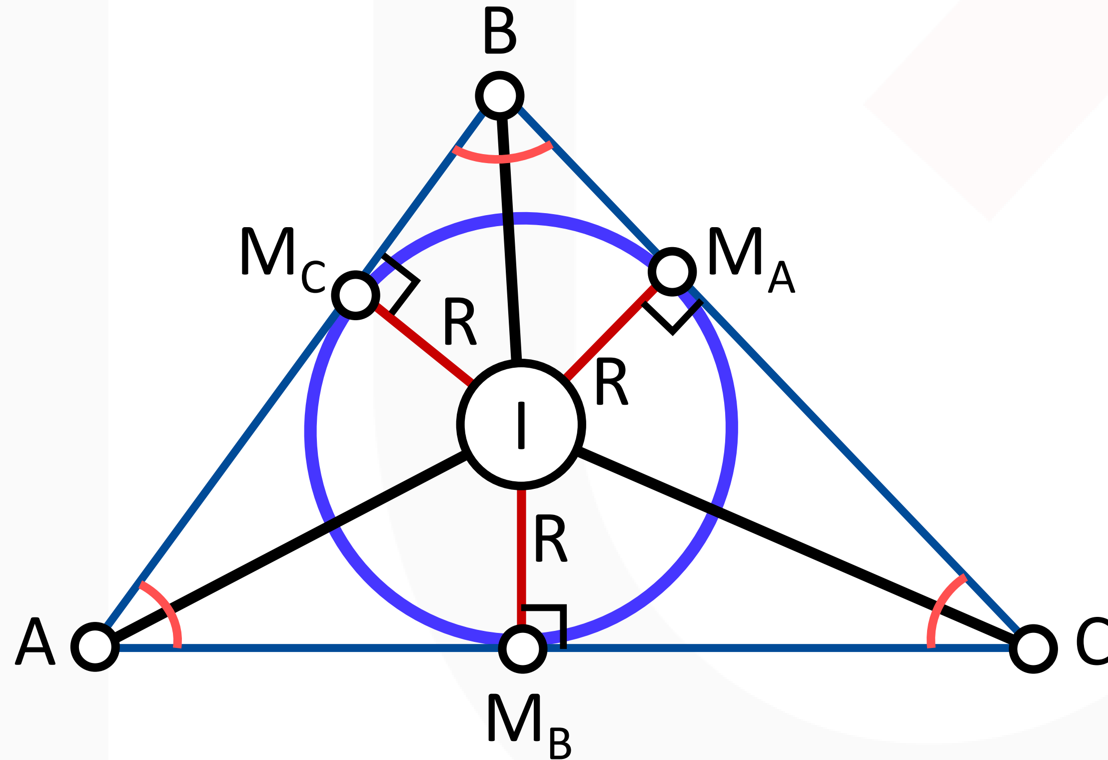
লম্ব



অন্তকেন্দ্র

অন্তকেন্দ্র → অন্তবৃত্তের কেন্দ্র → $\left(\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c}\right)$

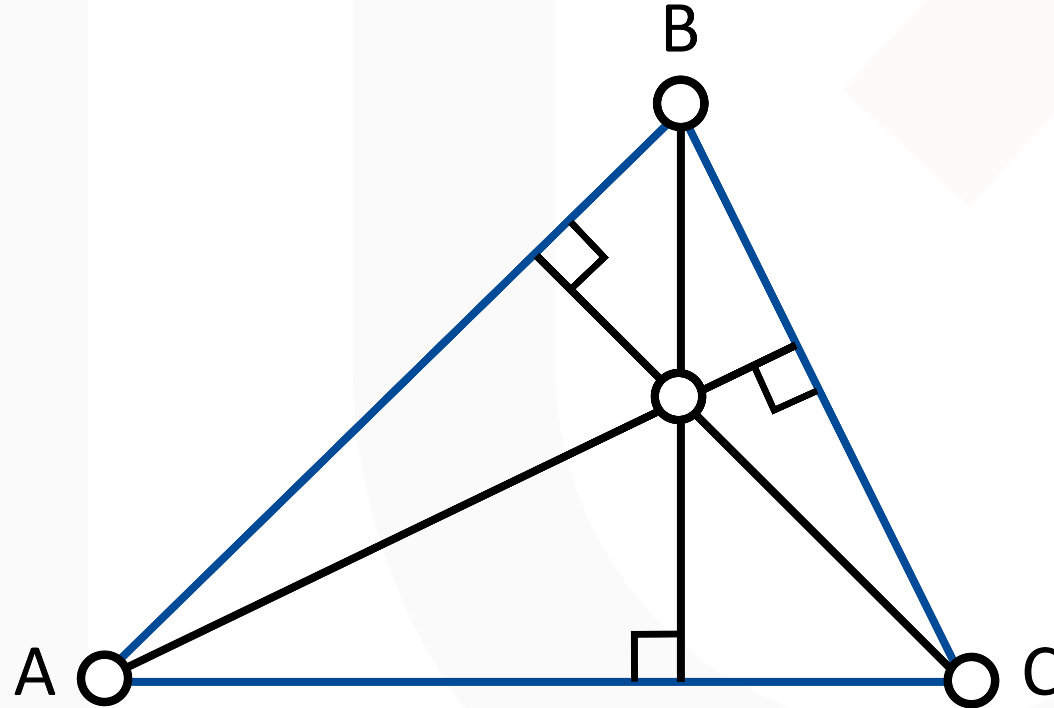
এটি ত্রিভুজের কোণগুলোর সমদ্বিখন্ডকত্রয়ের ছেদবিন্দু।



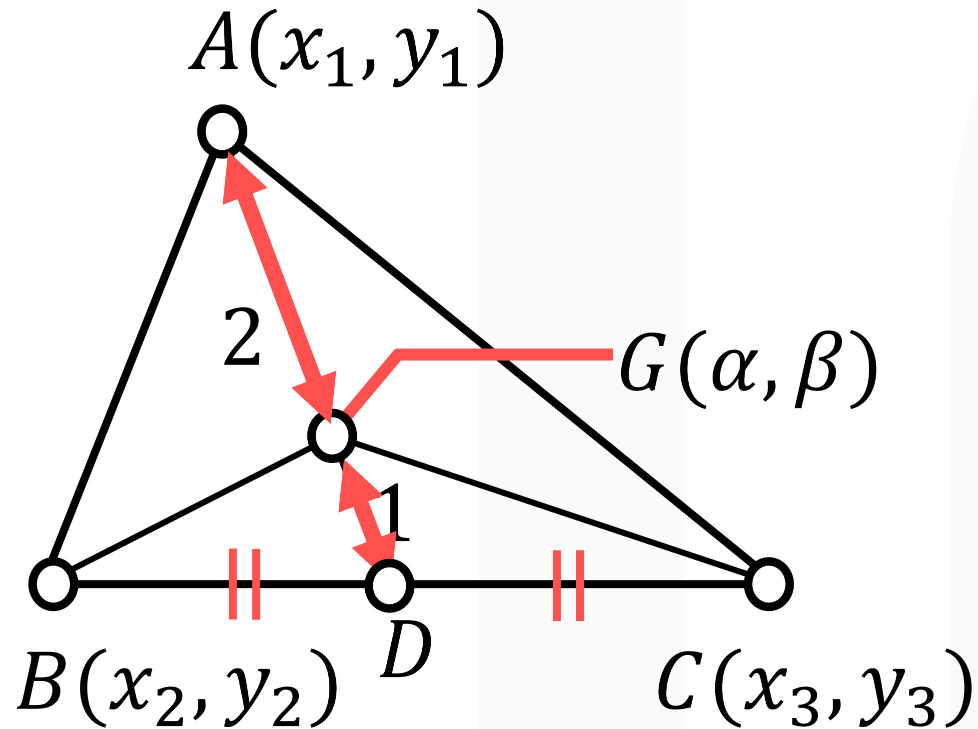
লম্বকেন্দ্র

লম্বকেন্দ্র | লম্বত্রয়ের ছেদবিন্দু | ঢালদ্বয়ের গুণফল -1

এটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর উপর অংকিত লম্বত্রয়ের ছেদবিন্দু।



ভরকেন্দ্র নির্ণয়



D মধ্যবিন্দু বলে, $D = \frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}$

$$\frac{AG}{GD} = \frac{2}{1}$$

$$\therefore \alpha = \frac{2\frac{x_2 + x_3}{2} + x_1}{2 + 1} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$\therefore \beta = \frac{2\frac{y_2 + y_3}{2} + y_1}{2 + 1} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \left(\frac{\boldsymbol{x_1 + x_2 + x_3}}{\boldsymbol{3}}, \frac{\boldsymbol{y_1 + y_2 + y_3}}{\boldsymbol{3}}\right)$$

PROBLEMS

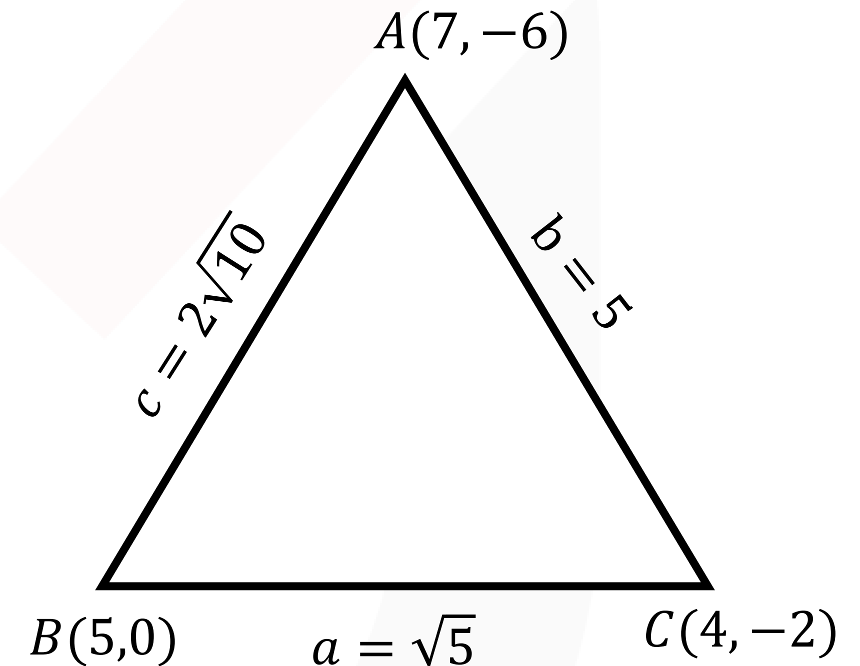
(3) ΔABC এর শীর্ষবিন্দুগুলো যথাক্রমে $A(7,-6), B(5,0), C(4,-2)$ এর
1. ভরকেন্দ্র 2.অন্তকেন্দ্র 3. পরিকেন্দ্র 4. লম্বকেন্দ্র স্থানাংক নির্ণয় কর।

ভরকেন্দ্র

$$x = \frac{7+5+4}{3} = \frac{16}{3}$$

$$y = \frac{-6+0-2}{3} = \frac{-8}{3}$$

$$\therefore (x,y) = \left(\frac{16}{3}, \frac{-8}{3}\right)$$



$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

PROBLEMS

(3) ΔABC এর শীর্ষবিন্দুগুলো যথাক্রমে $A(7,-6), B(5,0), C(4,-2)$ এর
1. ভরকেন্দ্র 2.অন্তকেন্দ্র 3. পরিকেন্দ্র 4. লম্বকেন্দ্র স্থানাংক নির্ণয় কর।

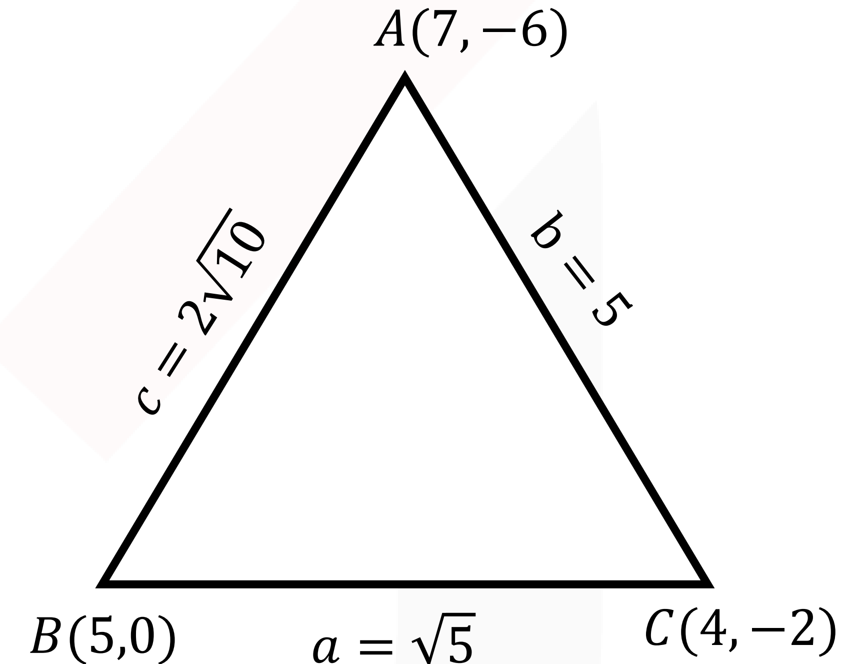
অন্তকেন্দ্র

$$x = \frac{\sqrt{5}\times 7 + 5\times 5 + 2\sqrt{10}\times 4}{\sqrt{5}+5+2\sqrt{10}}$$

$$= \mathbf{4.8634}$$

$$y = \frac{\sqrt{5}\times -6 + 5\times 0 + 2\sqrt{10}\times -2}{\sqrt{5}+5+2\sqrt{10}}$$

$$= \mathbf{-1.922}$$



$$(\alpha,\beta) = \left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$$

PROBLEMS

(3) ΔABC এর শীর্ষবিন্দুগুলো যথাক্রমে $A(7,-6), B(5,0), C(4,-2)$ এর
1. ভরকেন্দ্র 2.অন্তকেন্দ্র 3. পরিকেন্দ্র 4. লম্বকেন্দ্র স্থানাংক নির্ণয় কর।

পরিকেন্দ্র

$$OA = OB$$

$$or, \sqrt{(x-7)^2+(y+6)^2} = \sqrt{(x-5)^2+y^2}$$

$$or, x^2 - 14x + 49 + y^2 + 12y + 36 = x^2 - 10x + 25 + y^2$$

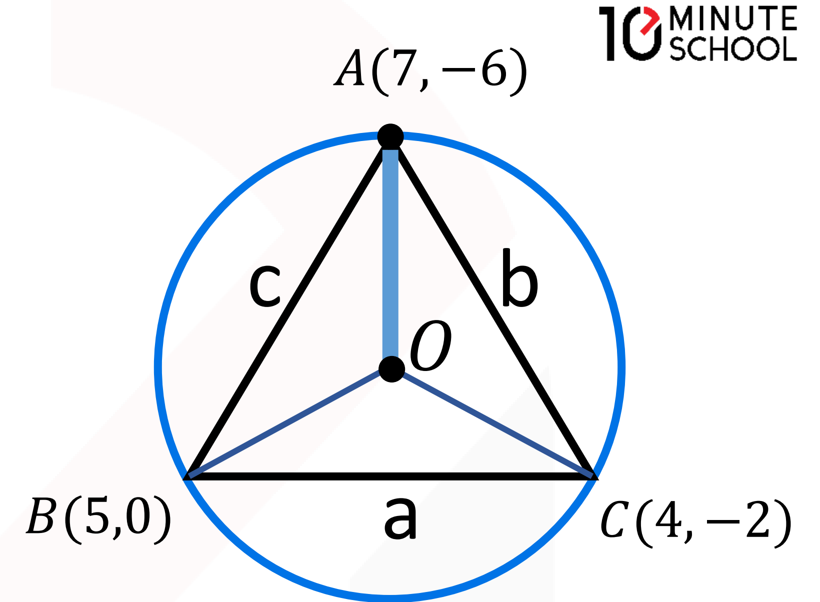
$$or, -4x + 12y + 60 = 0 \quad \text{———— (1)}$$

$$OB = OC$$

$$or, \sqrt{(x-5)^2+y^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y+2)^2}$$

$$or, x^2 - 10x + 25 + y^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y + 4$$

$$or, -2x - 4y + 5 = 0 \quad \text{———— (2)}$$



(1) ও (2) হতে পাই,

$$x = \frac{15}{2}$$

$$y = \frac{-5}{2}$$

PROBLEMS

(3) ΔABC এর শীর্ষবিন্দুগুলো যথাক্রমে A(7, −6), B(5, 0), C(4, −2) এর
1. ভরকেন্দ্র 2.অন্তকেন্দ্র 3. পরিকেন্দ্র 4. লম্বকেন্দ্র স্থানাংক নির্ণয় কর।

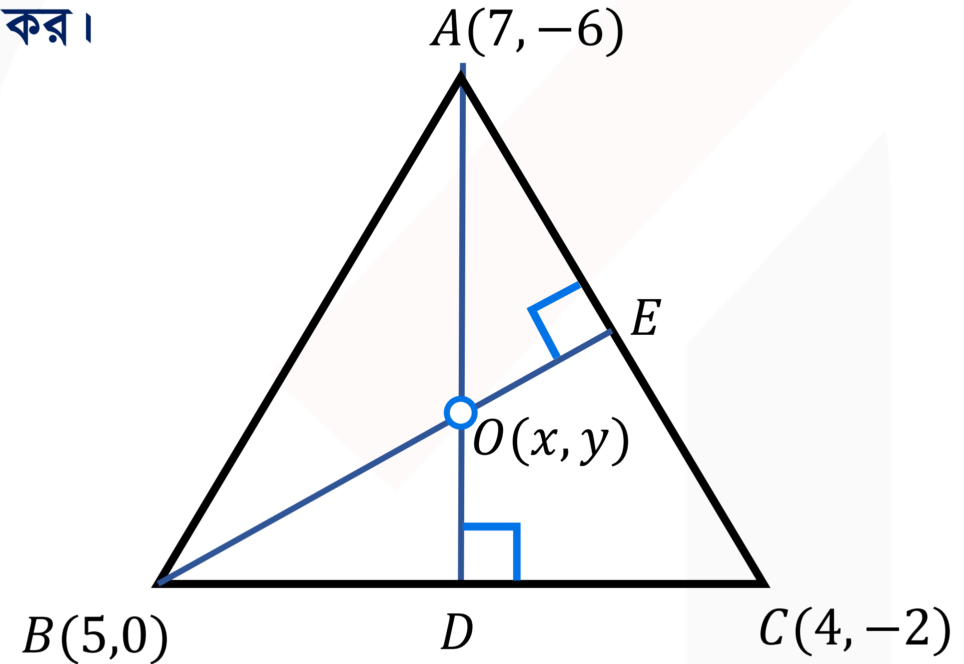
লম্বকেন্দ্র

$$M_{AD} \times M_{BC} = -1$$

$$or,\quad \frac{y+6}{x-7} \times \frac{0+2}{5-4} = -1$$

$$or,\quad 2(y+6) = -x+7$$

$$or,\quad x + 2y = -5 \quad \text{———} \quad (1)$$



ঢালদ্বয়ের গুণফল = -1

PROBLEMS

(3) ΔABC এর শীর্ষবিন্দুগুলো যথাক্রমে $A(7,-6), B(5,0), C(4,-2)$ এর
1. ভরকেন্দ্র 2.অন্তকেন্দ্র 3. পরিকেন্দ্র 4. লম্বকেন্দ্র স্থানাংক নির্ণয় কর।

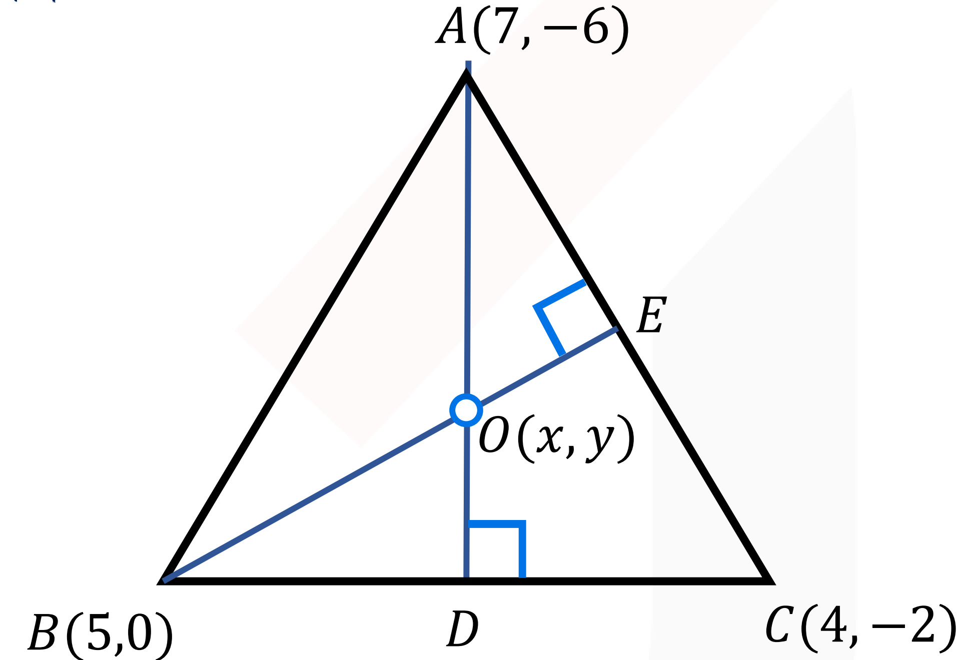
লম্বকেন্দ্র

$$M_{BE} \times M_{AC} = -1$$

$$or, \frac{y-0}{x-5} \times \frac{-6+2}{7-4} = -1$$

$$or, -4y = -3(x-5)$$

$$or, 3x - 4y = 15 \quad \text{———} \quad (2)$$



ঢালদ্বয়ের গুণফল = -1

PROBLEMS

(3) ΔABC এর শীর্ষবিন্দুগুলো যথাক্রমে $A(7, -6)$, $B(5, 0)$, $C(4, -2)$ এর
1. ভরকেন্দ্র 2.অন্তকেন্দ্র 3. পরিকেন্দ্র 4. লম্বকেন্দ্র স্থানাংক নির্ণয় কর।

লম্বকেন্দ্র

$x + 2y = -5$ ———————— (1)

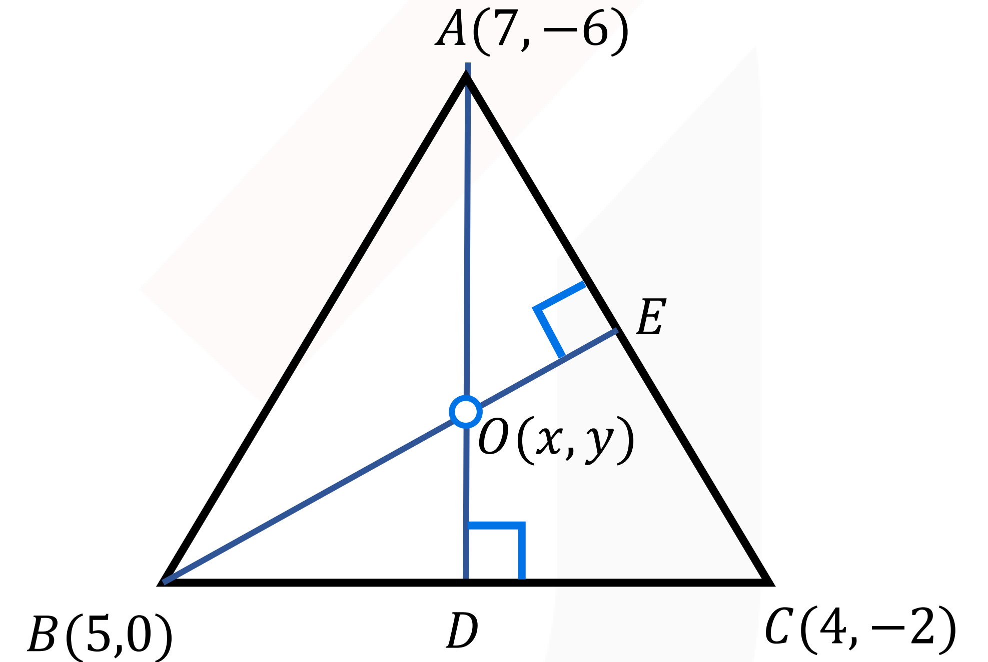
$3x - 4y = 15$ ———————— (2)

(1) ও (2) হতে পাই,

$x = 1$

$y = -3$

$\therefore (x, y) = (1, -3)$



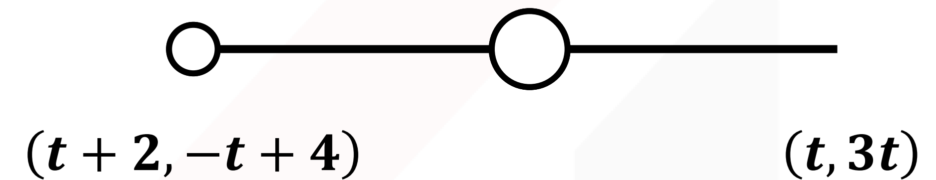
PROBLEMS

(4) $(t+2, -t+4)$ ও $(t, 3t)$ দুটি বিন্দুর সংযোগ সরল রেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{t+2+t}{2}, \frac{-t+4+3t}{2}\right)$$

$$= (t+1, t+2)$$

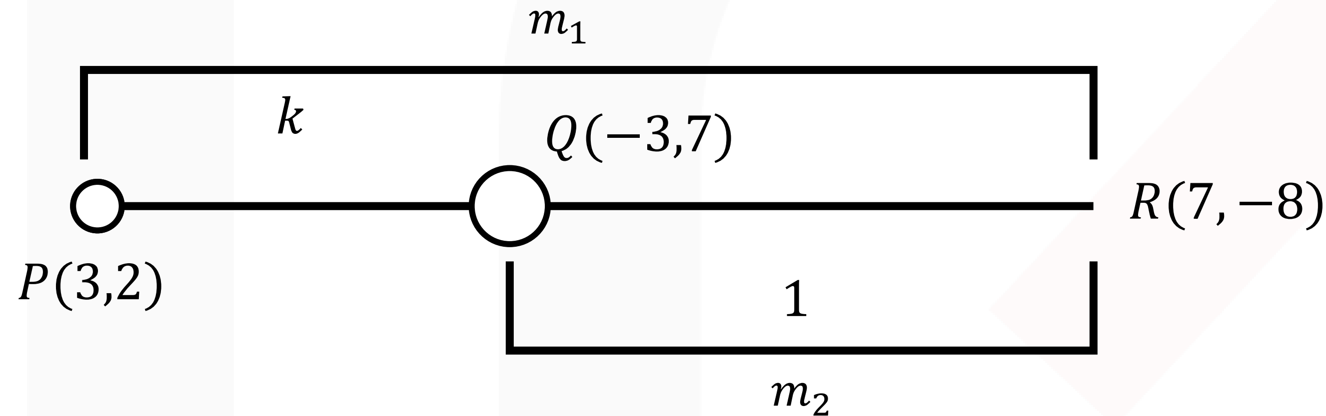


$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

PROBLEMS

(5) $(7,-8)$ বিন্দুটি $(3,2)$ এবং $(-3,7)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে যে অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।



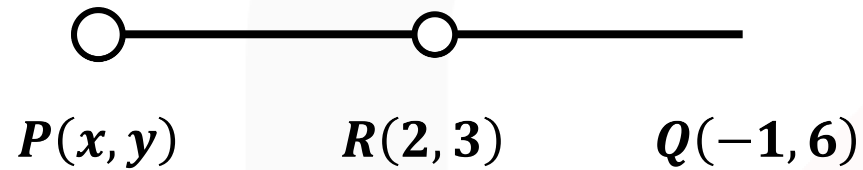
মনেকরি, প্রদত্ত বিন্দু দুইটি $P(3,2)$ ও $Q(-3,7)$ এবং R বিন্দুটি PQ রেখাংশকে $\boldsymbol{k}:\mathbf{1}$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে।

$$x_1 = \frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2} \Rightarrow 7 = \frac{k(-3) - 1\times 3}{k-1} \Rightarrow 7k - 7 = -3k - 3 \Rightarrow 10k = 4 \Rightarrow k = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$\therefore \boldsymbol{k}:\mathbf{1} = \mathbf{2}:\mathbf{5}$ $\therefore$ নির্ণেয় অনুপাত $= \mathbf{2}:\mathbf{5}$

PROBLEMS

(6) PQ রেখাংশের মধ্যবিন্দু $(2, 3)$ এবং Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-1, 6)$ হলে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।



$P(x, y)$ $R(2, 3)$ $Q(-1, 6)$

ধরি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)

প্রশ্নমতে,

$$\frac{x-1}{2} = 2$$

$$\Rightarrow x - 1 = 4$$

$$\therefore x = 5$$

$$\frac{y+6}{2} = 3$$

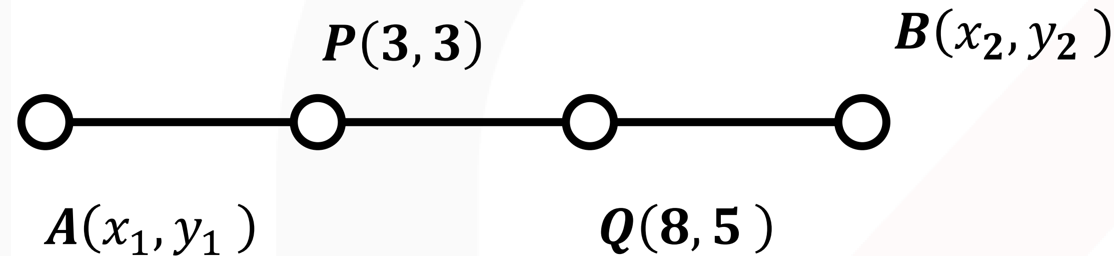
$$\Rightarrow y + 6 = 6$$

$$\therefore y = 0$$

$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(5, 0)$

PROBLEMS

(7) AB সরলরেখাটি $P(3,3)$ এবং $Q(8,5)$ বিন্দু দুটি দ্বারা সমত্রিখণ্ডিত হয়। A ও B এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।



ধরি, A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2)। যেহেতু P ও Q বিন্দু দুটি AB রেখার সমত্রিখন্ডক, তাই $AP = PQ = QB$

AQ রেখার মধ্যবিন্দু P,

$$\frac{x_1 + 8}{2} = 3$$

$$\Rightarrow x_1 = 6 - 8$$

$$\therefore x_1 = -2$$

$$\frac{y_1 + 5}{2} = 3$$

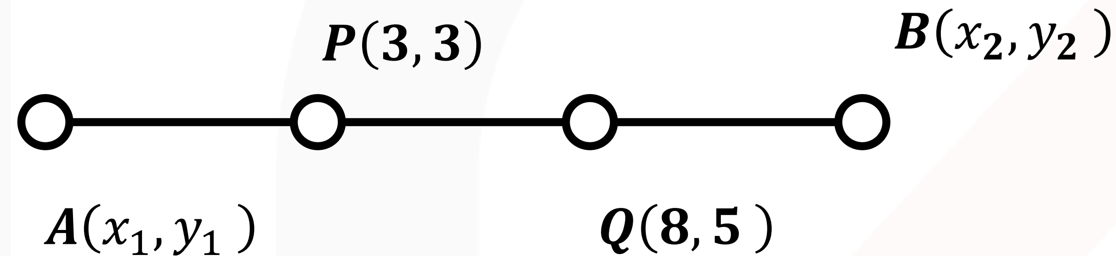
$$\Rightarrow y_1 = 6 - 5$$

$$\therefore y_1 = 1$$

$\therefore$ **A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-2, 1)$**

PROBLEMS

(7) AB সরলরেখাটি $P(3,3)$ এবং $Q(8,5)$ বিন্দু দুটি দ্বারা সমত্রিখণ্ডিত হয়। A ও B এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।



PB রেখার মধ্যবিন্দু Q,

$$\frac{3+x_2}{2} = 8$$

$$\Rightarrow 3 + x_2 = 16$$

$$\Rightarrow x_2 = 16 - 3$$

$$\therefore x_2 = 13$$

$$\frac{3+y_2}{2} = 3$$

$$\Rightarrow 3 + y_2 = 10$$

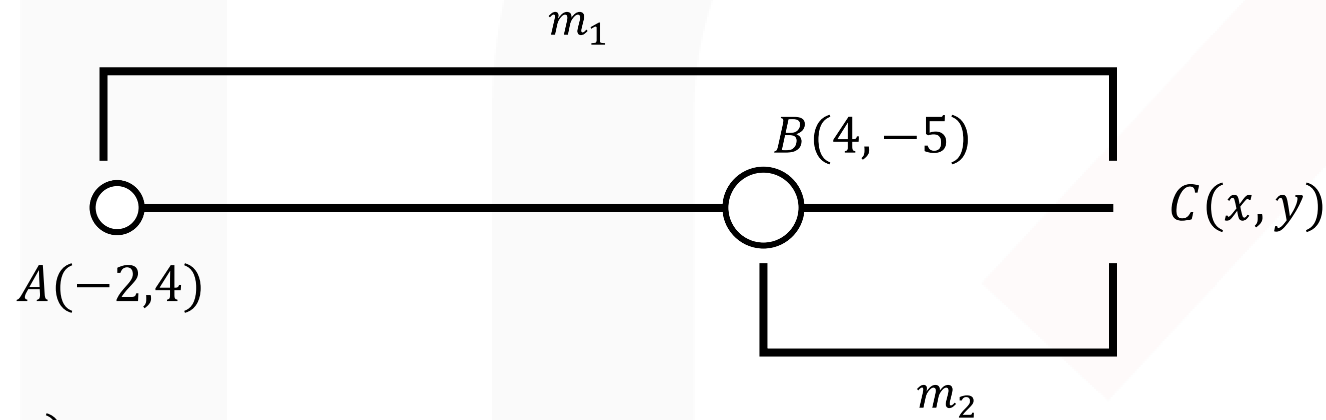
$$\Rightarrow y_2 = 10 - 3$$

$$\therefore y_2 = 7$$

$\therefore$ B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(13, 7)$

PROBLEMS

(8) A ও B বিন্দু দুটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, 4)$ এবং $(4. -5)$। AB রেখা C বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হল যেন $AB = 3BC$ হয়। C এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।



ধরি, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)।

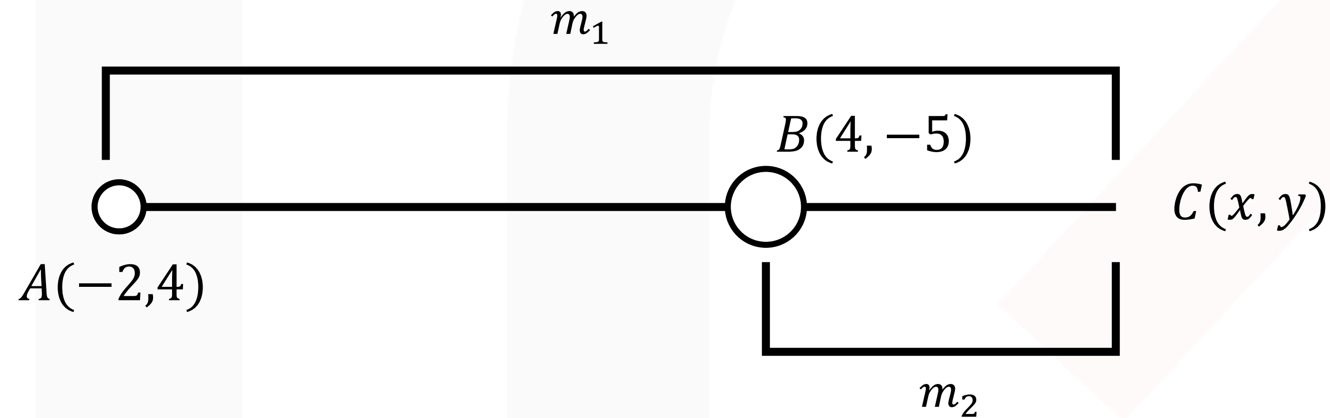
দেওয়া আছে, $\boldsymbol{AB = 3BC}$

এখন, $\frac{AC}{BC} = \frac{m_1}{m_2}$

$$\Rightarrow \frac{BC + AB}{BC} = \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow \frac{4BC}{BC} = \frac{m_1}{m_2} \quad \therefore \mathbf{m_1 : m_2 = 4 : 1}$$

PROBLEMS

(8) A ও B বিন্দু দুটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, 4)$ এবং $(4. -5)$। AB রেখা C বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হল যেন $AB = 3BC$ হয়। C এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।



এখন,

$$x = \frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}$$

$$= \frac{4 \times 4 - 1 \times (-2)}{4 - 1}$$

$$= 6$$

$$x = \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}$$

$$= \frac{4 \times (-5) - 1 \times 4}{4 - 1}$$

$$= -8$$

$\therefore$ বহির্বিভক্তিকরণ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(6, -8)$

PROBLEMS

(9) প্রমাণ কর যে, মূলবিন্দুটি $(-3,-2)$ ও $(6,4)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের একটি সমত্রিখন্ডক বিন্দু। অপর সমত্রিখন্ডক বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

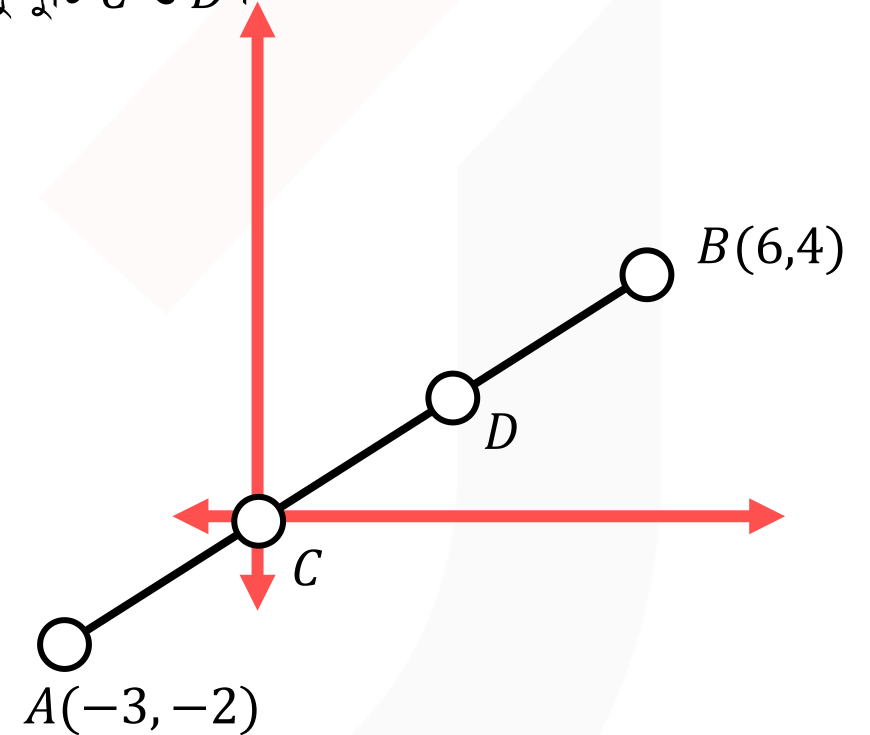
ধরি, প্রদত্ত বিন্দু দুটি $A(-3,-2)$ ও $B(6,4)$। AB রেখাংশের সমত্রিখন্ডক বিন্দু দুটি C ও D।

C বিন্দু, AB কে $1:2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$$C = \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

$$\Rightarrow C = \left(\frac{1 \times 6 + 2 \times (-3)}{1+2}, \frac{1 \times 4 + 2 \times (-2)}{1+2}\right)$$

$$\Rightarrow C = (0,0)$$



PROBLEMS

(9) প্রমাণ কর যে, মূলবিন্দুটি $(-3,-2)$ ও $(6,4)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের একটি সমত্রিখন্ডক বিন্দু। অপর সমত্রিখন্ডক বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

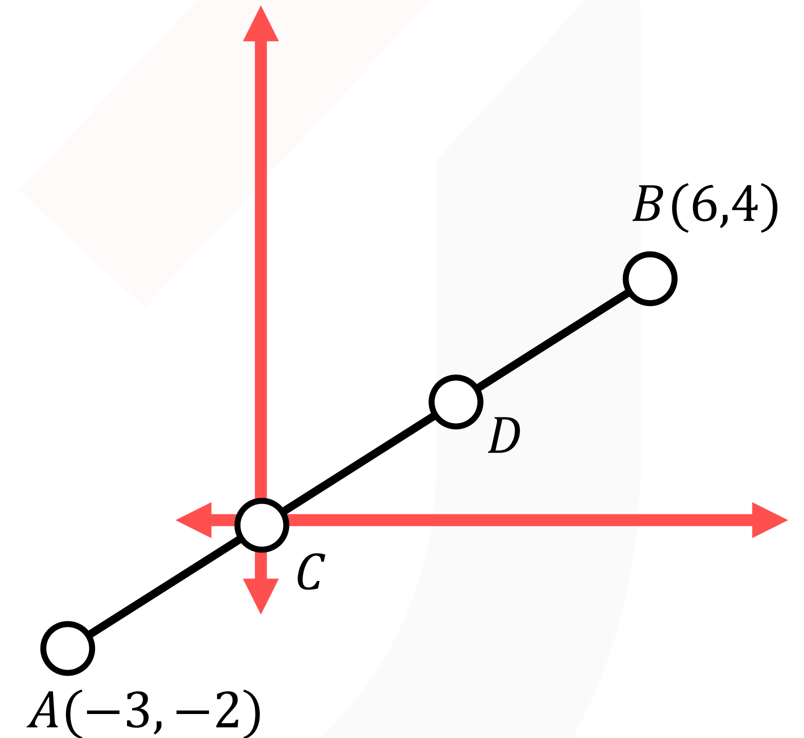
ধরি, প্রদত্ত বিন্দু দুটি $A(-3,-2)$ ও $B(6,4)$। AB রেখাংশের সমত্রিখন্ডক বিন্দু দুটি C ও D।

D বিন্দু, AB কে $2:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$$D = \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{2 \times 6 + 1 \times (-3)}{2 + 1}, \frac{2 \times 4 + 1 \times (-2)}{2 + 1}\right)$$

$$\Rightarrow D = (3,2)$$



PROBLEMS

(10) কোনো সামান্তরিকের একটি কর্ণের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(3,-4)$ এবং $(-6,5)$; এর তৃতীয় শীর্ষবিন্দু $(-2,-1)$ হলে, চতুর্থ শীর্ষবিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

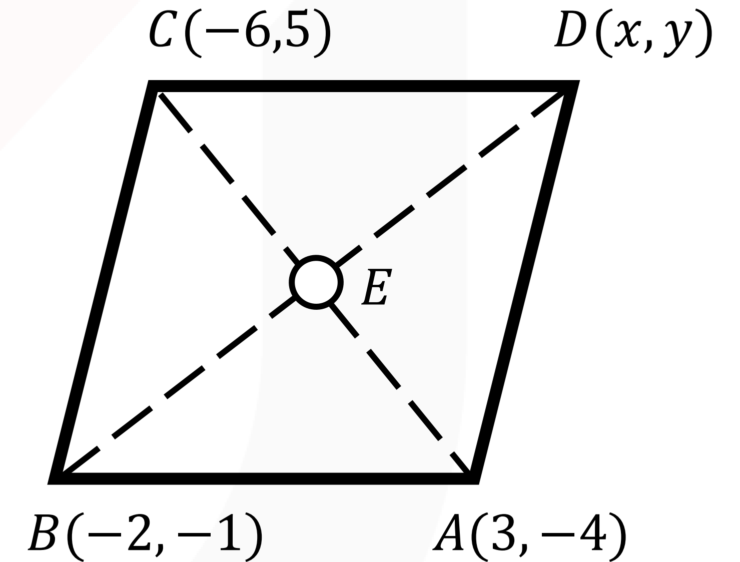
মনেকরি, $ABCD$ সামান্তরিকের AC কর্ণের প্রান্তবিন্দু $A(3,-4), C(-6,5)$ ও ৩য় শীর্ষবিন্দু $B(-2,-1)$ এবং চতুর্থ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $D(x,y)$।

$\therefore$ AC এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক,

$$E = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow E = \left(\frac{3 + (-6)}{2}, \frac{-4 + 5}{2}\right)$$

$$\Rightarrow E = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$



PROBLEMS

(10) কোনো সামান্তরিকের একটি কর্ণের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(3,-4)$ এবং $(-6,5)$; এর তৃতীয় শীর্ষবিন্দু $(-2,-1)$ হলে, চতুর্থ শীর্ষবিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

BD এর মধ্যবিন্দু, $E=\left(\frac{x-2}{2},\frac{y-1}{2}\right)$

যেহেতু $ABCD$ একটি সামান্তরিক। **AC ও BD এর কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু একই।**

$$\frac{x-2}{2}=-\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x-2=-3$$

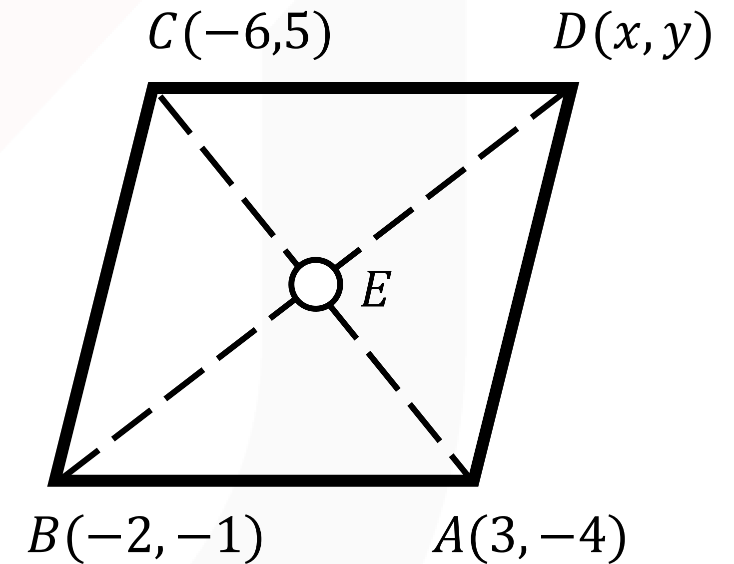
$$\Rightarrow x=-3+2$$

$$\therefore \boldsymbol{x=-1}$$

$$\frac{y-1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y-1=1$$

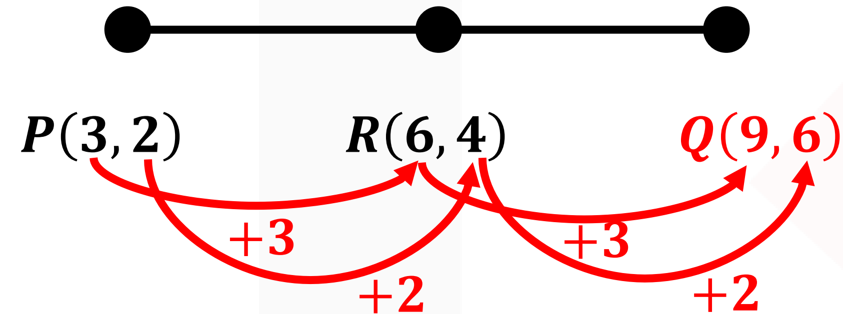
$$\therefore \boldsymbol{y=2}$$



$\therefore$ **চতুর্থ শীর্ষবিন্দুর** স্থানাঙ্ক $(\boldsymbol{-1,2})$।

সায়েম ভাইয়া special কম কম বেশি বেশি theory

* PQ রেখার P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3, 2)$। PQ এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(6, 4)$ হলে, Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক=?



$\therefore$ Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(9, 6)$

সায়েম ভাইয়া special কম কম বেশি বেশি theory

$(-3,-1)$ → $+3$, $+1$ → $(0,0)$

$(5,6)$ → $+3$, $+1$ → $(8,7)$

$(-9,11)$ → $+3$, $+1$ → $(-6,12)$

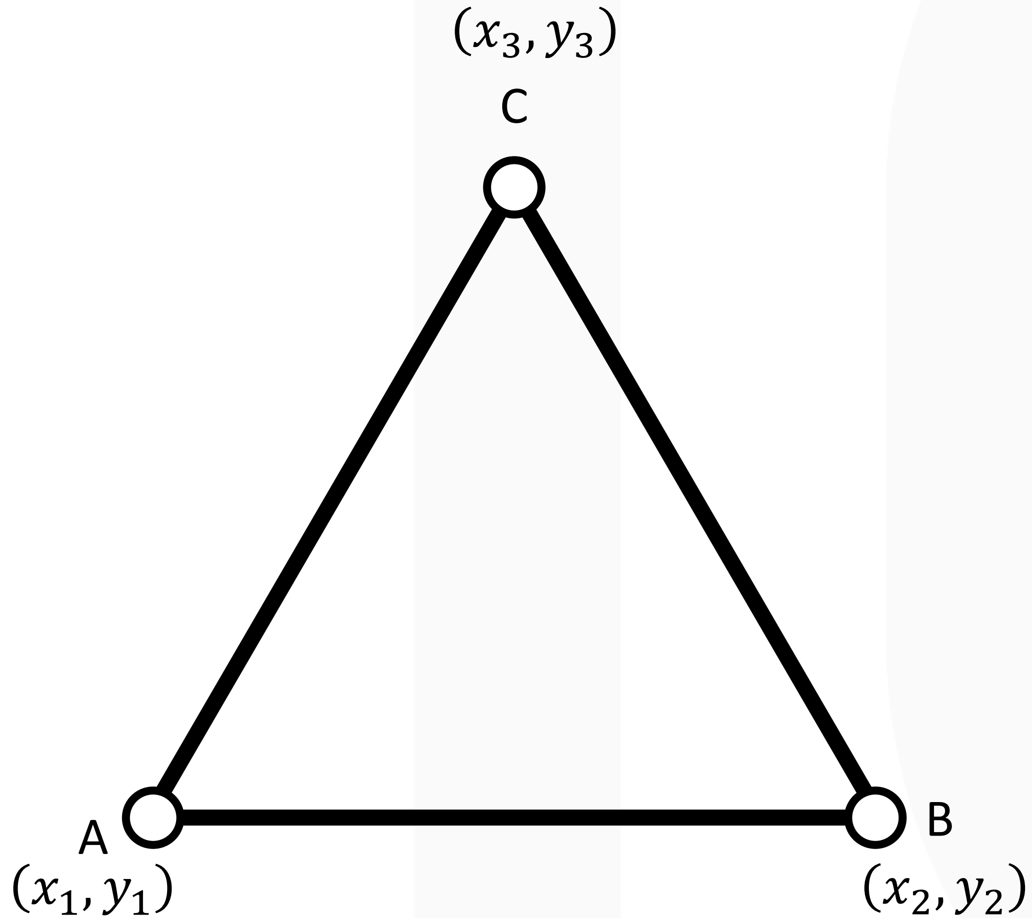
$-3+3=0$

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ -6 & 12 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\{96-(-42)\}$$

$$= \frac{1}{2} \times 138$$

$$= 69\ sq.unit$$

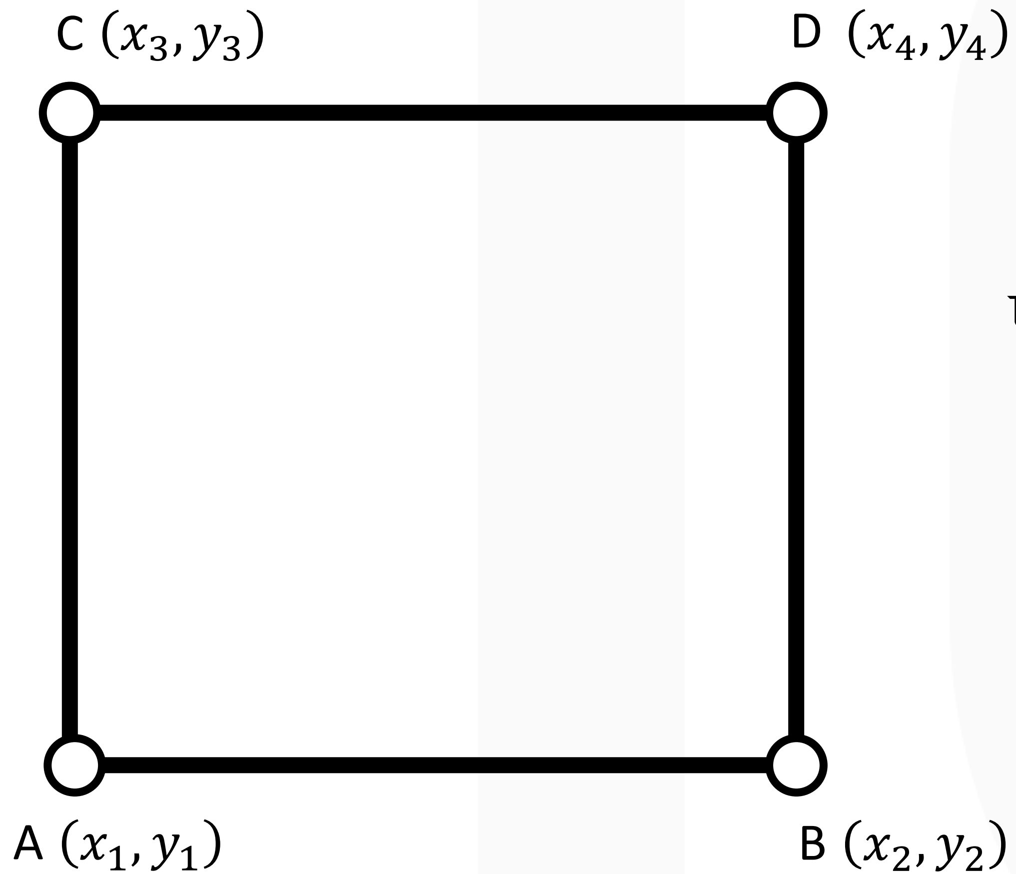
ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল



$$\Delta \text{ এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right\}$$

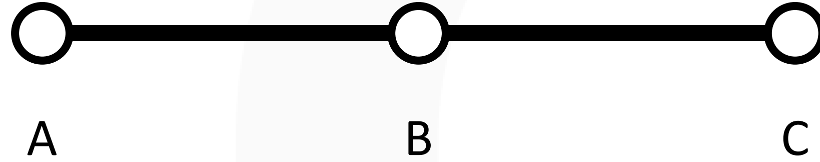
চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল



চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right\}$$

সমরেখ হওয়ার শর্ত



ক্ষেত্রফল $= 0$

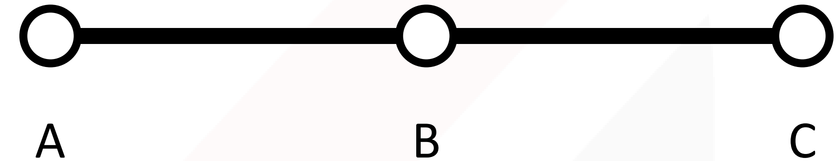
$AB + BC = AC$

AB এর ঢাল $=$ BC এর ঢাল

PROBLEMS

(18) $(a, 0), (0, b)$ এবং $(1, 1)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হলে দেখাও যে, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ ।

মনেকরি, প্রদত্ত বিন্দুত্রয় $A(a, 0), B(0, b)$ এবং $C(1,1)$



AB রেখার ঢাল, $m_1 = \frac{b-0}{0-a} = -\frac{b}{a}$

BC রেখার ঢাল, $m_2 = \frac{1-b}{1-0} = 1 - b$

A,B,C বিন্দু তিনটি সমরেখ হলে, $m_1 = m_2$

$$\Rightarrow -\frac{b}{a} = 1 - b$$

$$\Rightarrow -b = a(1 - b)$$

$$\Rightarrow -b = a - ab$$

$$\Rightarrow a + b = ab$$

$$\Rightarrow \frac{a + b}{ab} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a}{ab} + \frac{b}{ab} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$$

Showed

PROBLEMS

(19) ক্ষেত্রফল নির্ণয় করঃ $A(2,3), B(-3,6), C(0,-5)$ ও $D(4,-7)$ ।

$$\therefore ABCD \text{ চতুর্ভূজের ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}(12 + 9 + 15 - 0 + 0 + 20 + 12 + 14)$$

$$= \frac{1}{2} \times 82 \text{ বর্গ একক}$$

$$= 41 \text{ বর্গ একক}$$

Answer

PROBLEMS

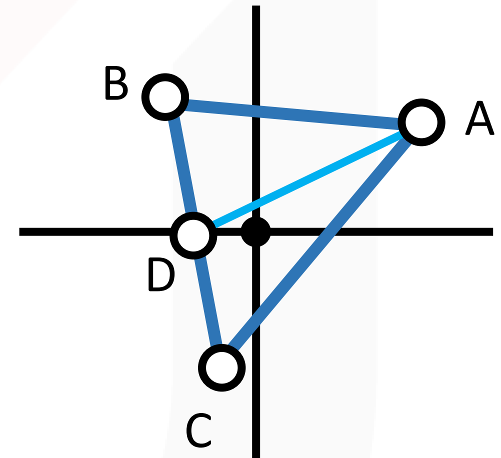
(20) ABC ত্রিভুজের A, B, C শীর্ষবিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(5, 6), (-9, 1)$ ও $(-3, -1)$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে A থেকে BC এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

ধরি, ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি যথাক্রমে $A(5,6), B(-9,1), C(-3,-1)$

ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -9 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -9 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}\right\}$

$= \frac{1}{2}(5 + 54 + 9 + 3 - 18 + 5)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} 58 = 29$ বর্গ একক



PROBLEMS

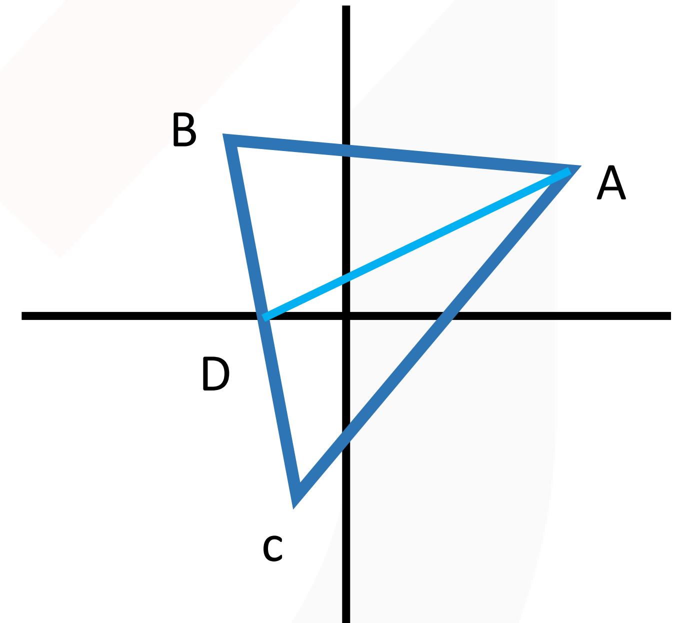
(20) ABC ত্রিভুজের A, B, C শীর্ষবিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(5, 6), (-9, 1)$ ও $(-3, -1)$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে A থেকে BC এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

$BC = \sqrt{(-9+3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ একক

প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2} \times BC \times AD = 29$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} \times AD = 29$

$\therefore AD = \frac{29}{\sqrt{10}} = 9.17$ একক



Answer

PROBLEMS

(21) ΔABC এর A, B, C শীর্ষ বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-1,2), (2,3), (3,-4)$ ও P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x,y) হলে, দেখাও যে $\frac{\Delta PAB}{\Delta ABC} = \frac{x-3y+7}{22}$।

$$\Delta ABC \text{ এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -4\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}3 & -4\\ -1 & 2\end{vmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}(-3-4+(-8-9)+6-4) \text{ বর্গ একক}$$

$$= -11 \text{ বর্গ একক}$$

আবার, $$\Delta PAB \text{ এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix}x & y\\ -1 & 2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}2 & 3\\ x & y\end{vmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}(2x+y-3-4+2y-3x) \text{ বর্গ একক}$$

$$= -\frac{1}{2}(x-3y+7) \text{ বর্গ একক}$$

PROBLEMS

(21) ΔABC এর A, B, C শীর্ষ বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-1, 2), (2, 3), (3, -4)$ ও P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হলে, দেখাও যে $\frac{\Delta PAB}{\Delta ABC} = \frac{x-3y+7}{22}$।

ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= -11$ বর্গ একক

ΔPAB এর ক্ষেত্রফল $= -\frac{1}{2}(x - 3y + 7)$ বর্গ একক

এখন, $$\frac{-\frac{1}{2}(x - 3y + 7)}{-11} = \frac{x - 3y + 7}{22}$$

$$\frac{\Delta PAB}{\Delta ABC} = \frac{x - 3y + 7}{22}$$ **Showed**

PROBLEMS

(22) ΔOPQ এর শীর্ষত্রয় যথাক্রমে $(0,0), (A\cos\beta, -A\sin\beta)$ এবং $(A\sin\alpha, A\cos\alpha)$ দেখাও যে, $\alpha = \beta$ হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফলের মান বৃহত্তম হবে। বৃহত্তম মানটি নির্ণয় কর।

ধরি, ΔOPQ এর শীর্ষবিন্দু তিনটি যথাক্রমে
$O \equiv (0,0), P \equiv (A\cos\beta, -A\sin\beta)$ এবং $Q \equiv (A\sin\alpha, A\cos\alpha)$

ΔOPQ এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ A\cos\beta & -A\sin\beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A\cos\beta & -A\sin\beta \\ A\sin\alpha & A\cos\alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A\sin\alpha & A\cos\alpha \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}(A^2\cos\alpha . \cos\beta + A^2\sin\alpha . \sin\beta) \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2}A^2(\cos\alpha . \cos\beta + \sin\alpha . \sin\beta) \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2}A^2\cos(\alpha - \beta) \text{ বর্গ একক}$$

PROBLEMS

$\frac{1}{2}A^2\cos(\alpha-\beta)$ এর মান সর্বোচ্চ হবে যদি $\cos(\alpha-\beta)$ এর মান সর্বোচ্চ হয়।
$\cos(\alpha-\beta)$ এর সর্বোচ্চ মান 1।

$\therefore \cos(\alpha-\beta) = 1 = \cos 0$

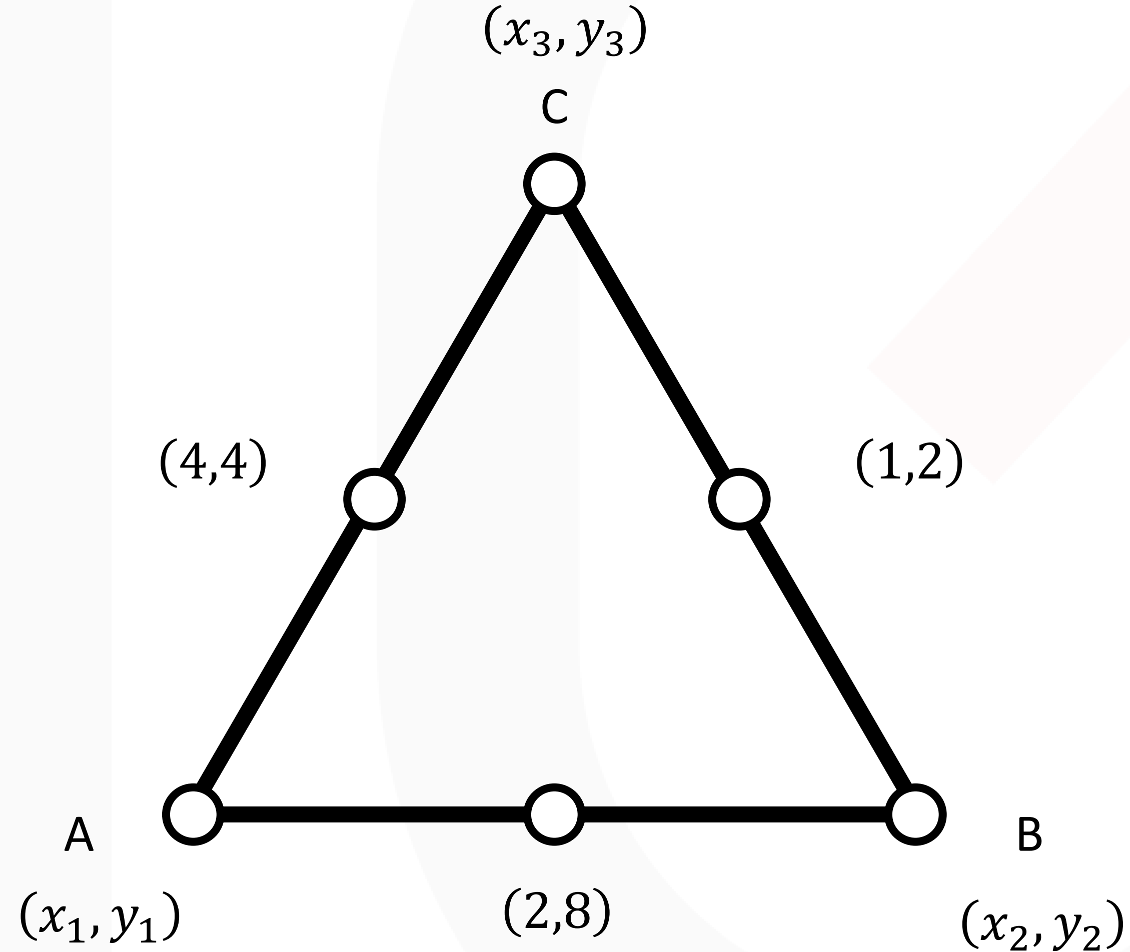
$\therefore \alpha-\beta = 0$

$\therefore \alpha = \beta$

$\therefore$সর্বোচ্চ ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}A^2 cos0 = \frac{1}{2}A^2$

PROBLEMS

(23) ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে (1, 2), (4, 4) এবং (2, 8) হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



PROBLEMS

(23) ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে (1, 2), (4, 4) এবং (2, 8) হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

ধরি, ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি যথাক্রমে $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$

AB বাহুর মধ্যবিন্দু (2,8)

অর্থাৎ, $\frac{x_1 + x_2}{2} = 2$

$\therefore x_1 + x_2 = 4 \ldots \ldots (i)$

$\frac{y_1 + y_2}{2} = 8$

$y_1 + y_2 = 16 \ldots \ldots (ii)$

PROBLEMS

(23) ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে (1, 2), (4, 4) এবং (2, 8) হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

ধরি, ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি যথাক্রমে $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$

AC বাহুর মধ্যবিন্দু (4,4)

অর্থাৎ, $\frac{x_1 + x_3}{2} = 4$

$\therefore x_1 + x_3 = 8 \ldots \ldots (iii)$

$\frac{y_1 + y_3}{2} = 4$

$y_1 + y_3 = 8 \ldots \ldots (iv)$

PROBLEMS

(23) ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে (1, 2), (4, 4) এবং (2, 8) হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

ধরি, ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি যথাক্রমে $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$

BC বাহুর মধ্যবিন্দু (1,2)

অর্থাৎ, $\frac{x_2 + x_3}{2} = 1$

$\therefore x_2 + x_3 = 2 \ldots\ldots (v)$

$\frac{y_2 + y_3}{2} = 2$

$y_2 + y_3 = 4 \ldots\ldots (vi)$

PROBLEMS

(23) ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে (1, 2), (4, 4) এবং (2, 8) হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

$\therefore x_1 + x_2 = 4 \dots\dots (i)$

$y_1 + y_2 = 16 \dots\dots (ii)$

$\therefore x_1 + x_3 = 8 \dots\dots (iii)$

$y_1 + y_3 = 8 \dots\dots (vi)$

$\therefore x_2 + x_3 = 2 \dots\dots (v)$

$y_2 + y_3 = 4 \dots\dots (vi)$

$(i), (iii), (v)$ নং সমাধান করে পাই,

$x_1 = 5$

$x_2 = -1$

$x_3 = 3$

$(ii), (iv), (vi)$ নং সমাধান করে পাই,

$y_1 = 10$

$y_2 = 6$

$y_3 = -2$

অর্থাৎ, বিন্দুগুলো হলো $A(5,10), B(-1,6), C(3,-2)$

PROBLEMS

(23) ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে (1, 2), (4, 4) এবং (2, 8) হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

অর্থাৎ, বিন্দুগুলো হলো $A(5,10), B(-1,6), C(3,-2)$

$\therefore \Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 10 & 1 \\ -1 & 6 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\{5(6+2) - 10(-1-3) + 1(2-18)\}$ বর্গ একক

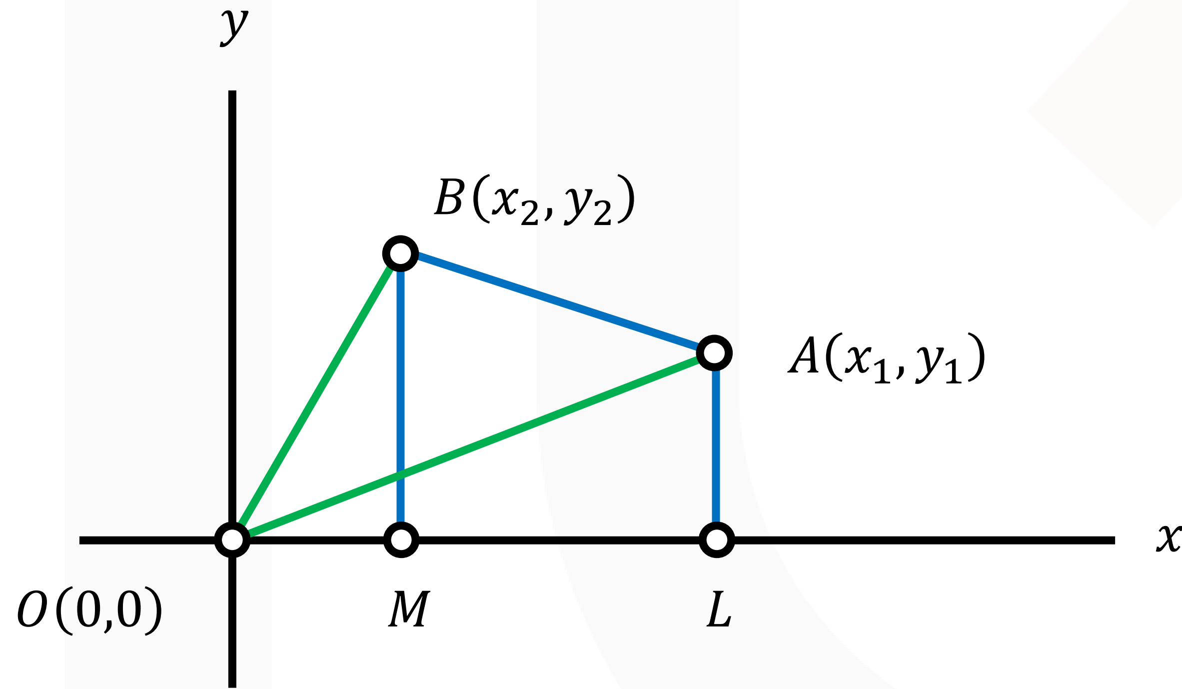
$= 32$ বর্গ একক

Answer

PROBLEMS

(24) A, B দুইটি বিন্দুর ধনাত্মক স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ এবং O মূলবিন্দু হলে, মুল নিয়মে প্রমাণ কর যে, $\Delta OAB = \frac{1}{2}|(x_1y_2 - x_2y_1)|$

ধরি, মূলবিন্দু $O(0,0), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$



PROBLEMS

(24) A, B দুইটি বিন্দুর ধনাত্মক স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ এবং O মূলবিন্দু হলে, মুল নিয়মে প্রমাণ কর যে, $\Delta OAB = \frac{1}{2}|(x_1y_2 - x_2y_1)|$

ধরি, মূলবিন্দু $O \equiv (0,0), A \equiv (x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

ΔOAB এর ক্ষেত্রফল $= \Delta OBM$ এর ক্ষেত্রফল $+$ ট্রাপিজিয়াম $ALMB - \Delta OAL$ এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2} \times OM \times BM + \frac{1}{2}(AL + BM).ML - \frac{1}{2} \times OL \times AL$$

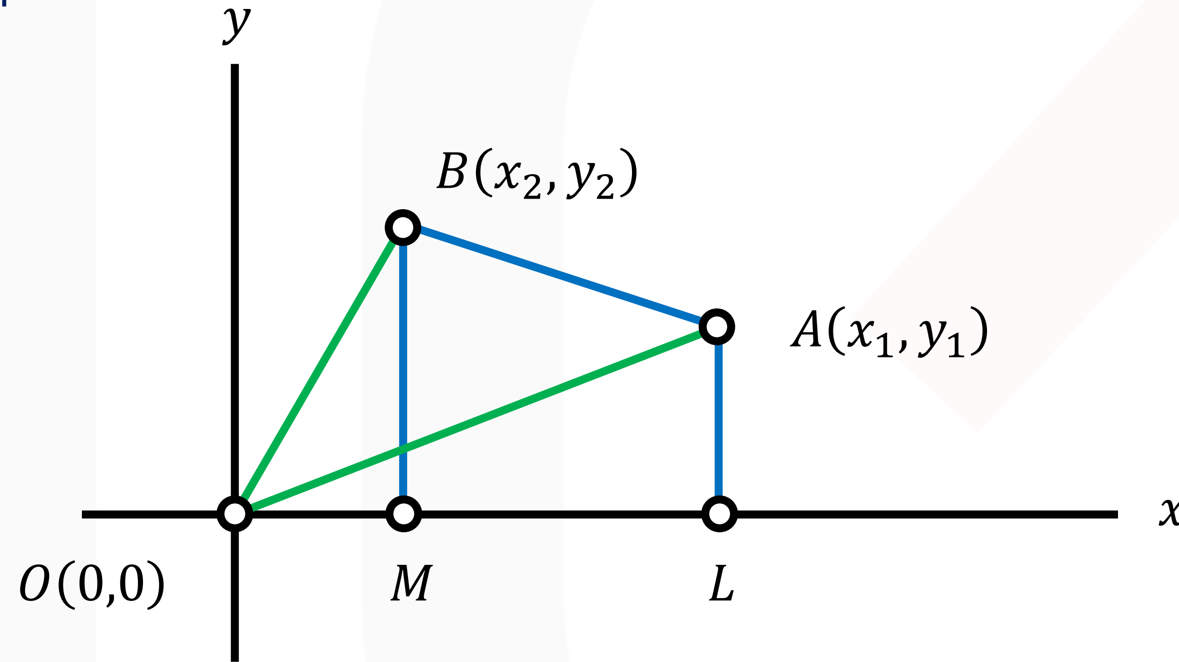
$$= \frac{1}{2}x_2.y_2 + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_1 - x_2) - \frac{1}{2}x_1.y_1$$

$$= \frac{1}{2}(x_2y_2 + x_1y_1 - x_2y_1 + x_1y_2 - x_2y_2 - x_1y_1)$$

$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$$

PROBLEMS

(24) A, B দুইটি বিন্দুর ধনাত্মক স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ এবং O মূলবিন্দু হলে, মুল নিয়মে প্রমাণ কর যে, $\Delta OAB = \frac{1}{2}|(x_1y_2 - x_2y_1)|$



A এবং B এর ভিন্ন ভিন্ন অবস্থানের জন্য ক্ষেত্রফলের চিহ্ন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হতে পারে।

তাই ΔOAB এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|(x_1y_2 - x_2y_1)|$

PROBLEMS

(25) একটি বিন্দু সেটের যেকোনো উপাদান A ও B বিন্দুর সাথে একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। A এবং B এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(0, b), (a, b)$ হলে, সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

ধরি, সঞ্চারপথের উপরস্থ যেকোনো একটি বিন্দু $P(x, y)$ আর AB রেখা P বিন্দুর সাথে সমকোণী ত্রিভুজ তৈরি করে।

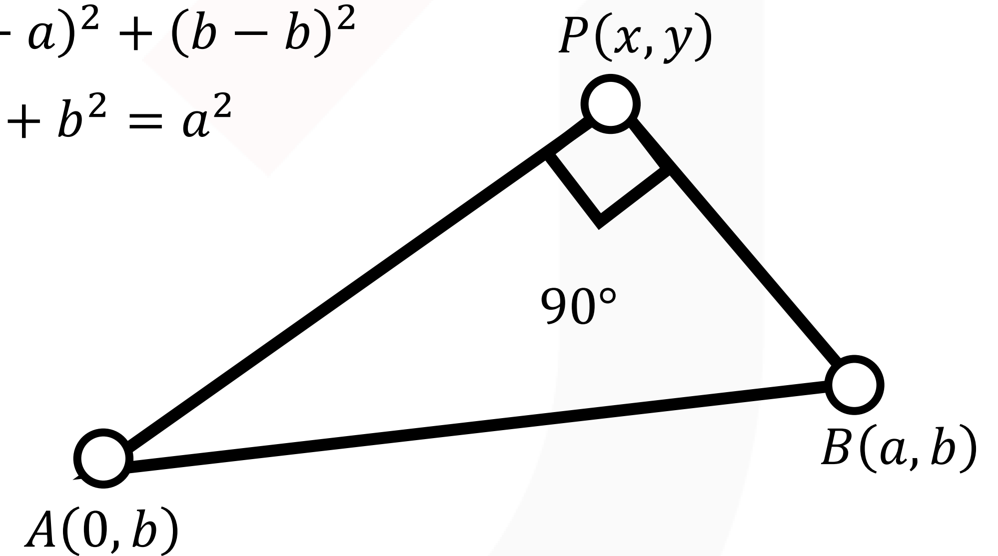
প্রশ্নমতে, $PA^2 + PB^2 = AB^2$

$\Rightarrow (x-0)^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2 + (y-b)^2 = (0-a)^2 + (b-b)^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2by + b^2 + x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = a^2$

$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 2ax - 4by + 2b^2 = 0$

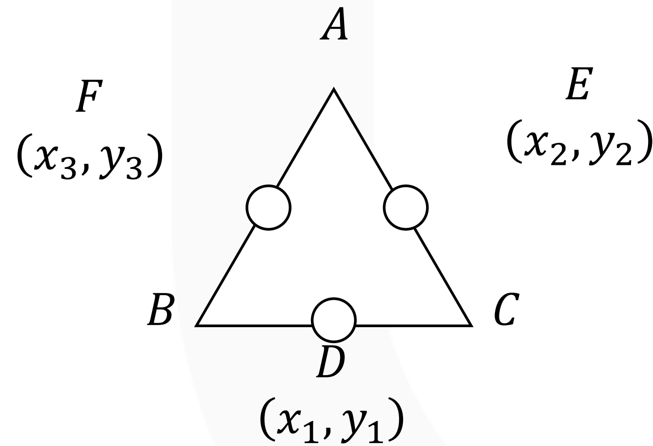
$\Rightarrow x^2 + y^2 - ax - 2by + b^2 = 0$ **Answer**



ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক

ΔABC এর BC, CA ও AB এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে $D(x_1, y_1), E(x_2, y_2), F(x_3, y_3)$ হলে,

$$A = (x_3 + x_2 - x_1, y_3 + y_2 - y_1)$$
$$B = (x_1 + x_3 - x_2, y_1 + y_3 - y_2)$$
$$C = (x_1 + x_2 - x_3, y_1 + y_2 - y_3)$$



Problems

(26) $A(2,3)$ এবং $B(-1,4)$ দুইটি স্থির বিন্দু। P বিন্দুটি একটি সেটের সদস্য যেন, $PA:PB = 2:3$ হয়। P বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

ধরি, সঞ্চারপথের উপরস্থ একটি বিন্দু হলো $P(x,y)$

প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় $A(2,3), B(-1,4)$

প্রশ্নমতে, $\frac{PA}{PB} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \frac{PA^2}{PB^2} = \frac{4}{9}$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2 + (y-3)^2}{(x+1)^2 + (y-4)^2} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9}{x^2 + 2x + 1 + y^2 - 8y + 16} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow 9x^2 - 36x + 36 + 9y^2 - 54y + 81 = 4x^2 + 8x + 4 + 4y^2 - 32y + 64$$

$\therefore 5x^2 + 5y^2 - 44x - 22y + 49 = 0$ **Answer**

Problems

(27) $(2, 0)$ থেকে একটি সেটের বিন্দুসমূহের দূরত্ব, $x = 0$ রেখা থেকে তাদের দূরত্বের তিনগুণ। সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

ধরি, সঞ্চারপথের উপরস্থ একটি বিন্দু হলো $P(x, y)$

P বিন্দু থেকে (2,0) বিন্দুর দূরত্ব $= \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2}$

$P(x, y)$ থেকে $x = 0$ বা y অক্ষ থেকে দূরত্ব $= |x|$

প্রশ্নমতে,

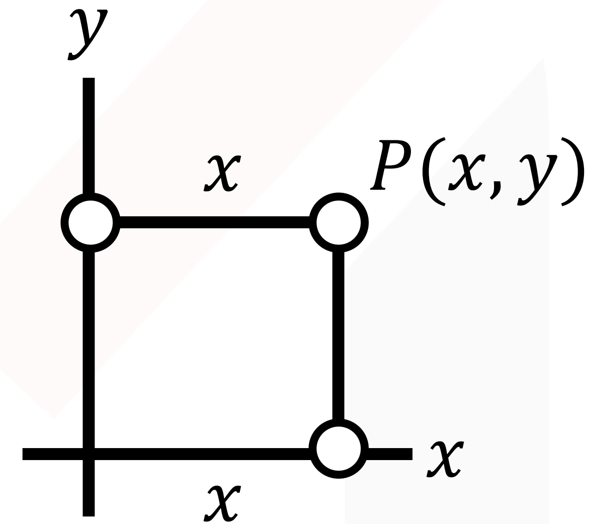
$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} = 3|x|$$

$$\Longrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = 9x^2$$

$$\therefore y^2 - 8x^2 - 4x + 4 = 0$$

Answer

অধিবৃত্ত (Hyperbola)



Problems

(28) একটি সেটের প্রতিটি বিন্দু $B(1, 1)$ ও $C(-1, -1)$ দুইটি স্থির বিন্দুর সাথে এমন একটি ত্রিভুজ গঠন করে যার ক্ষেত্রফল 5 বর্গ একক, বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

ধরি, সঞ্চারপথের উপরস্থ একটি বিন্দু হলো $P(x, y)$ যা $B(1,1)$ ও $C(-1, -1)$ বিন্দুদ্বয়ের একটি ত্রিভূজ উৎপন্ন করে।

$$\therefore \text{ ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ x & y \end{vmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}(x - y - 1 + 1 - y + x)$$

$$= \frac{1}{2}(2x - 2y)$$

$$= x - y$$

BC রেখার সাপেক্ষে P বিন্দুর ভিন্ন ভিন্ন অবস্থানের জন্য ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের চিহ্ন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হবে এবং দুটি ভিন্ন ভিন্ন সঞ্চারপথ পাওয়া যাবে। তাই এক্ষেত্রে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ধনাত্মক ও ঋণাত্মক বিবেচনা করে।

প্রশ্নমতে, $x - y = \pm 5$ **Answer**

Straight line

Problems

(29) একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(x,y), B(-6,-3)$ এবং $C(6,3)$ A বিন্দুটি একটি সেটের সদস্য যে সেটটির যে কোনো বিন্দু হতে BC এর উপর অঙ্কিত মধ্যমার দৈর্ঘ্য একটি স্থির সংখ্যা 5 একক। দেখাও যে, A বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ, $x^2 + y^2 = 25$

ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(x,y)$, $B(-6,-3)$ ও $C(6,3)$

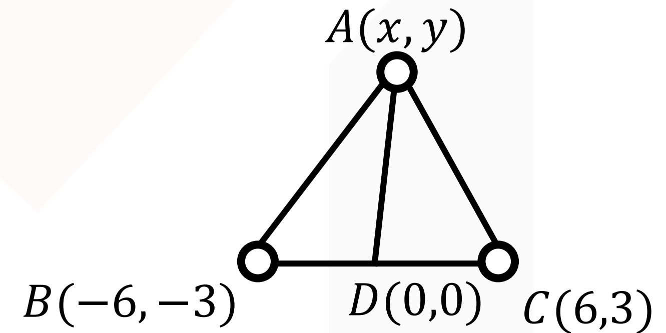
ধরি, BC এর মধ্যবিন্দু D

$\therefore$ D এর স্থানাঙ্ক $= \left(\frac{-6+6}{2}, \frac{-3+3}{2}\right) = (0,0)$

প্রশ্নমতে, $AD = 5$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 5$$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 25$ যা, A বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ।



Answer

Problems

(30) x-অক্ষ থেকে একটি সেটের প্রতিটি বিন্দুর দূরত্বের বর্গ, y অক্ষ থেকে বিন্দুটির দূরত্বের 4 গুণ। সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

ধরি, সঞ্চারপথের উপরস্থ একটি বিন্দু হলো $P(x, y)$। x অক্ষ থেকে $P(x, y)$ বিন্দুর দূরত্ব $= |y|$

y অক্ষ থেকে $P(x, y)$ বিন্দুর দূরত্ব $= |x|$

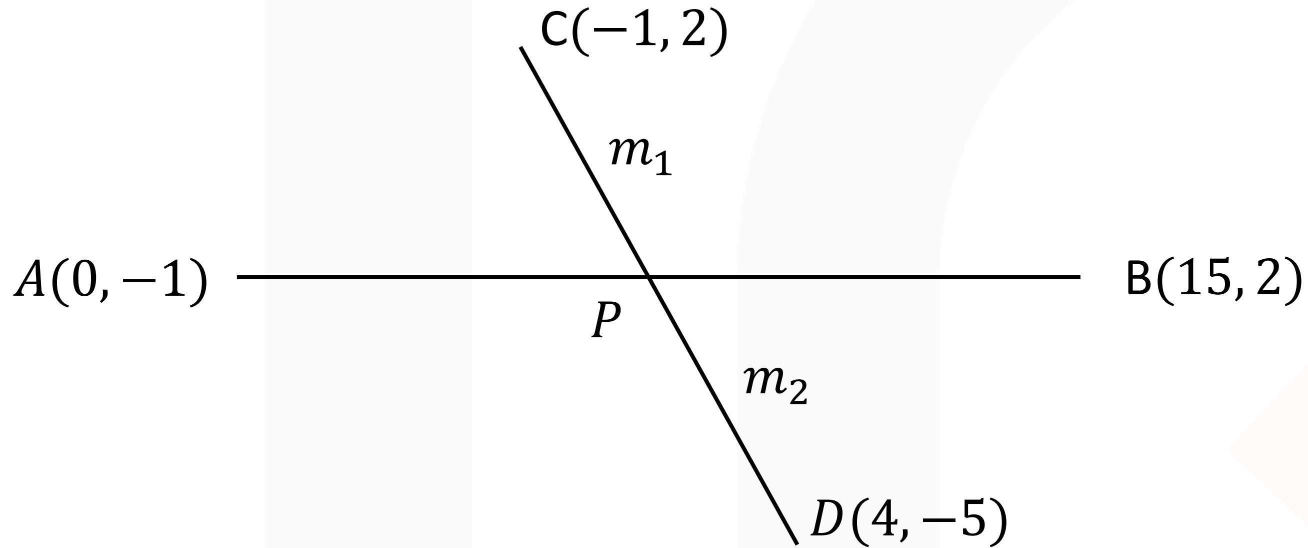
প্রশ্নমতে, $|y|^2 = 4|x|$

$\therefore y^2 = 4|x|$

Answer

Parabola

Student Problem



ধরি, CD কে AB রেখাটি P বিন্দুতে $m_1 : m_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$$P \equiv \left(\frac{4m_1 - m_2}{m_1 + m_2}, \frac{-5m_1 + 2m_2}{m_1 + m_2}\right)$$

যেহেতু A, P, B বিন্দু তিনটি সমরেখ,

$\therefore$ বিন্দুত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= 0$

অর্থাৎ,

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{4m_1 - m_2}{m_1 + m_2} & \frac{-5m_1 + 2m_2}{m_1 + m_2} & 1 \\ 15 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$c_2' = c_2 + c_3$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{4m_1 - m_2}{m_1 + m_2} & \frac{-4m_1 + 3m_2}{m_1 + m_2} & 1 \\ 15 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{12m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2} - \frac{-60m_1 + 45m_2}{m_1 + m_2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{12m_1 - 3m_2 + 60m_1 - 45m_2}{m_1 + m_2} = 0$$

$$\Rightarrow 72m_1 - 48m_2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{48}{72} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore m_1 : m_2 = 2 : 3$$

Answer

MCQ

১. $r = 2\cos\theta$ পোলার সমীকরণটি নির্দেশ করে-

ক. সরলরেখা
খ. পরাবৃত্ত
গ. উপবৃত্ত
ঘ. বৃত্ত ✓

$r^2 = x^2 + y^2$ | $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$r = 2\cos\theta$

$r^2 = 2r\cos\theta$ (উভয় পক্ষে r দিয়ে গুণ করে)

$x^2 + y^2 = 2x$

$x^2 + y^2 - 2x = 0$

$+1 \quad +1$

কেন্দ্র $(1,0)$

$r = 1$

MCQ

(r, θ)

২. কোনো বিন্দুর পোলার স্থানাংক $(5, 90°)$ হলে কার্তেসীয় স্থানাংক হবে-

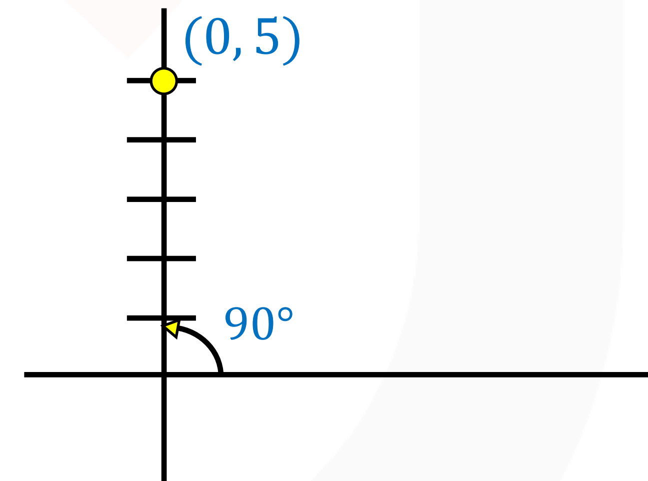
ক. $(0, 0)$ ✓. $(0, 5)$

গ. $(5, 0)$ ঘ. $(5, 5)$

$x = r\cos\theta = 5\cos 90°$

$y = r\ \sin\theta = 5\sin 90°$

$(0, 5)$



MCQ

y অক্ষ

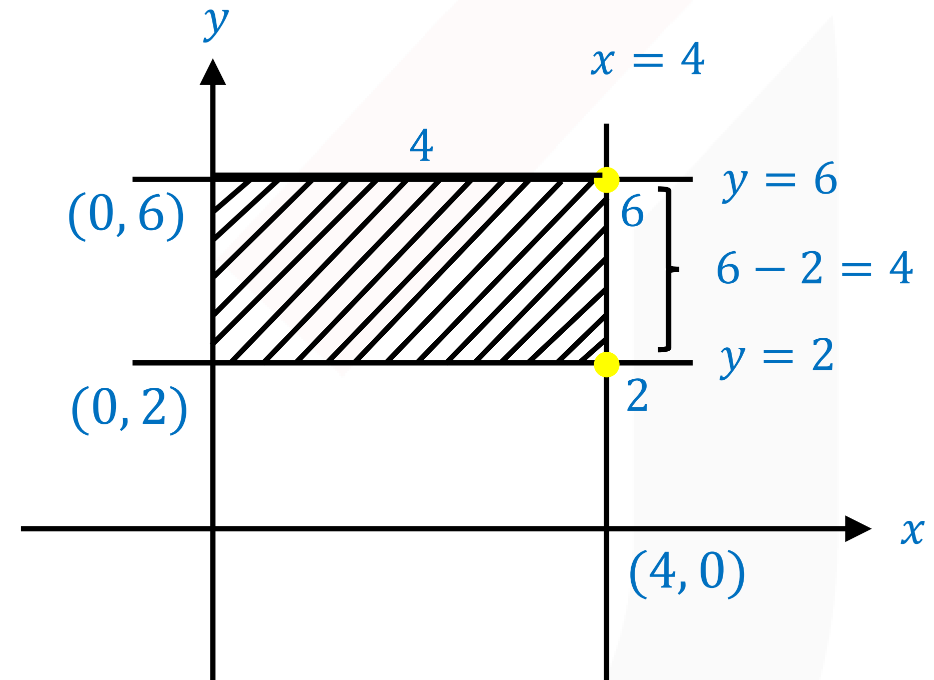
৩. $x = 0$, $x = 4$, $y = 2$, $y = 6$ রেখাগুলো দ্বারা আবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক ?

ক. 24 খ. 16

গ. 12 ঘ. 8

$x = a \rightarrow y$ অক্ষের সমান্তরাল

$y = b \rightarrow x$ অক্ষের সমান্তরাল



$Area = 4 \times 4 = 16$ sqr $unit$

MCQ

8. $(1, 150°)$ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাংক নিচের কোনটি ?

(r, θ)

ক. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

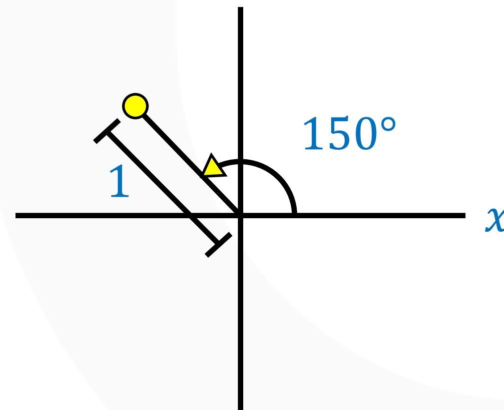
খ. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

গ. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

ঘ. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$$x = r\cos\theta = 1\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = r\sin\theta = 1\sin 150° = \frac{1}{2}$$



$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

DOWNLOAD THE APP

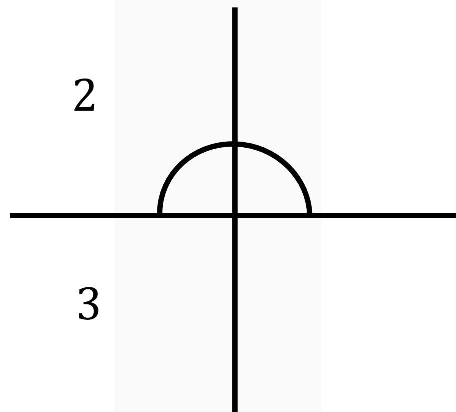
MCQ

10 MINUTE SCHOOL

৫. $(-1, -1)$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক -

ক. $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ ✓ খ. $\left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$

গ. $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ ঘ. $\left(2, \frac{5\pi}{4}\right)$



$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}$$
$$= \sqrt{2}$$

$\pi + \theta$

$\pi - \theta$

$$\theta = \pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$$
$$= \pi + \tan^{-1}\left|\frac{-1}{-1}\right|$$
$$= \pi + \frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{5\pi}{4}$$

MCQ

৬. ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু গুলি $A(2,0)$, $B(5,0)$ ও $C(5,4)$ হলে, ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র কোনটি ?

ক. $\left(4, \frac{4}{3}\right)$

খ. $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$

গ. $(6,2)$

ঘ. $(2,6)$

$$x = \frac{2+5+5}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

$$y = \frac{0+0+4}{3} = \frac{4}{3}$$

MCQ

৭ . $A(-2,3), B(-4,2)$ এবং $C(8,6)$ শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট ত্রিভুজের -

(i) ভরকেন্দ্রের স্থানাংক $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$

(ii) AB বাহুর মধ্যবিন্দুর স্থানাংক $\left(-3, \frac{5}{2}\right)$

(iii) $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল 4 বর্গ একক

নিচের কোনটি সঠিক??

A. i , ii ✓

B. i , iii

C. ii, iii

D. i, ii, iii

$$x = \frac{-2-4+8}{3} = \frac{2}{3} = 4$$

$$y = \frac{3+2+6}{3} = \frac{11}{3}$$

$$\left(\frac{-2+(-4)}{2}, \quad \frac{3+2}{2}\right)$$

$$= \left(-3, \frac{5}{2}\right)$$

MCQ

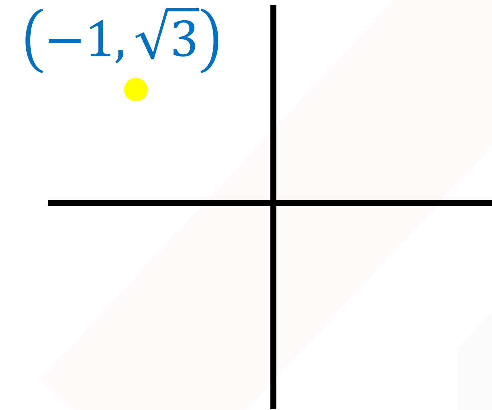
৮. $(-1, \sqrt{3})$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক -

ক. $\left(-2,\ -\frac{\pi}{3}\right)$

খ. $\left(-2,\ \frac{\pi}{3}\right)$

গ. $\left(2,\ \frac{\pi}{3}\right)$

ঘ. $\left(2,\ \frac{2\pi}{3}\right)$



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

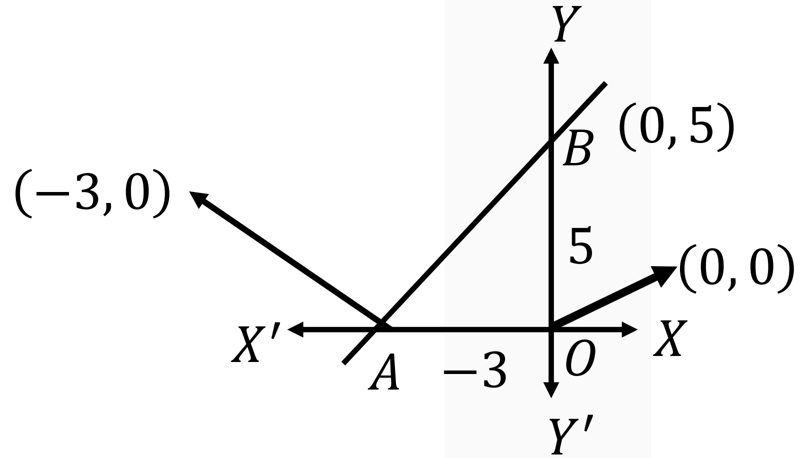
$r = \times$

$\theta = \times$

Be Smart

MCQ

উদ্দীপকের আলোকে ৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাওঃ



৯. OAB ত্রিভুজের ভারকেন্দ্রের স্থানাংক কোনটি ?

ক. $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

খ. $\left(\frac{-3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

গ. $\left(-1, \frac{5}{3}\right)$ ✔

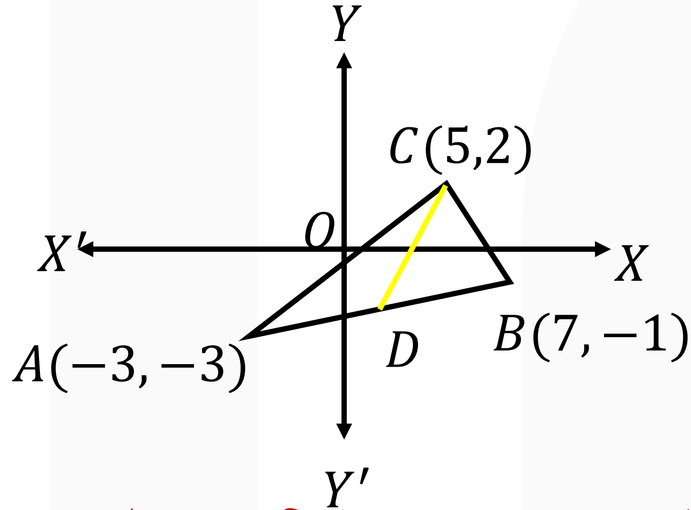
ঘ. $\left(\frac{5}{3}, -1\right)$

$$x = \frac{-3+0+0}{3} = -1$$

$$y = \frac{0+0+5}{3} = \frac{5}{3}$$

MCQ

উদ্দীপকের আলোকে ১০ ও ১১ নং প্রশ্নের উত্তর দাওঃ



১০. চিত্রে CD, AB বাহুর উপর অঙ্কিত মধ্যমা। CD এর দৈর্ঘ্য কত একক?

ক. 10 . 5 গ. 4 ঘ. 3

$$D = \left(\frac{-3+7}{2}, \frac{-3-1}{2}\right)$$
$$= (2, -2)$$

$$CD = \sqrt{(5-2)^2 + (2+2)^2}$$
$$= \sqrt{(3)^2 + (4)^2}$$
$$= 5 \text{ unit}$$

১১. $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক ?

ক. 6 খ. 12 . 17 ঘ. 34

$A(-3,-3)$	$B(7,-1)$	$C(5,2)$
$+3 \quad +3$	$+3 \quad +3$	$+3 \quad +3$
$A(0,0)$	$B(10,2)$	$C(8,5)$

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} \text{unit} = \frac{1}{2}(50-16) = 17 \text{ unit}$$

MCQ

১২ . $A(1,-2)$ ও $B(-8,1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ BA কে $2:1$ অনুপাতে অন্তরবিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাংক নিচের কোনটি?

* Use Sayem Vaia Special

কম কম বেশি বেশি theory:

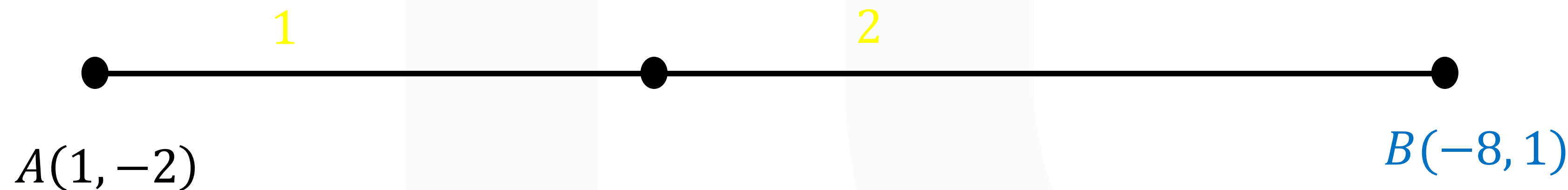
ক. $(-5,-1)$

✓ .$(-2,-1)$

গ.$(-2,0)$

ঘ.$(-5,0)$

$$x = \frac{1\times(-8)+2\times 1}{1+2} = -2$$



$A(1,-2)$

$B(-8,1)$

$$y = \frac{1\times 1+2\times(-2)}{1+2} = \frac{1-4}{3} = -1$$

MCQ

(r, θ)

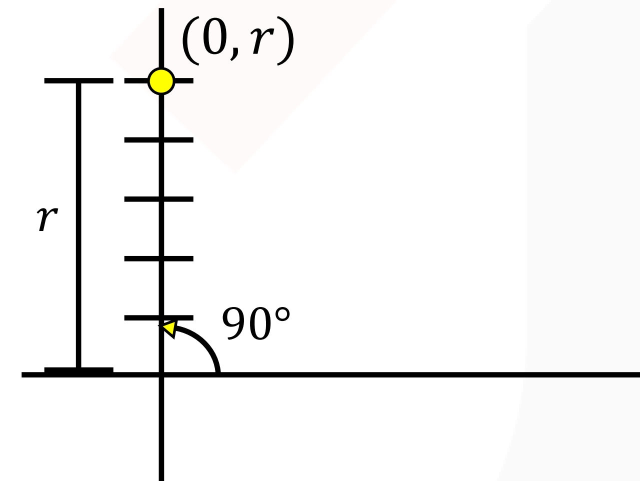
১৩. কোনো বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্কের কোটি 90° হলে ঐ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের ভূজ-

ক. $x = r$

খ. $x = 0$ ✓

গ. $y = r$

ঘ. $y = 0$



$$x = r\cos\theta$$
$$= r\cos 90^\circ$$
$$= 0$$

MCQ

১৪. $(6, 5)$, $(-9, -4)$ ও $(-5, 0)$ বিন্দুগুলো দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?

ক. -12

খ. -6

গ. 6

ঘ. 12

MCQ

১৫. $A(-1,3)$, $B(4,0)$ এবং $C(-8,6)$ শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট ত্রিভুজের -

(i) ভরকেন্দ্রের স্থানাংক $\left(-\frac{5}{3}, 3\right)$

(ii) AB বাহুর মধ্যবিন্দুর স্থানাংক $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

(iii) $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল 4 বর্গ একক

নিচের কোনটি সঠিক??

A. i , ii ✓

B. i , iii

C. ii, iii

D. i, ii, iii

DOWNLOAD THE APP

MCQ

10 MINUTE SCHOOL

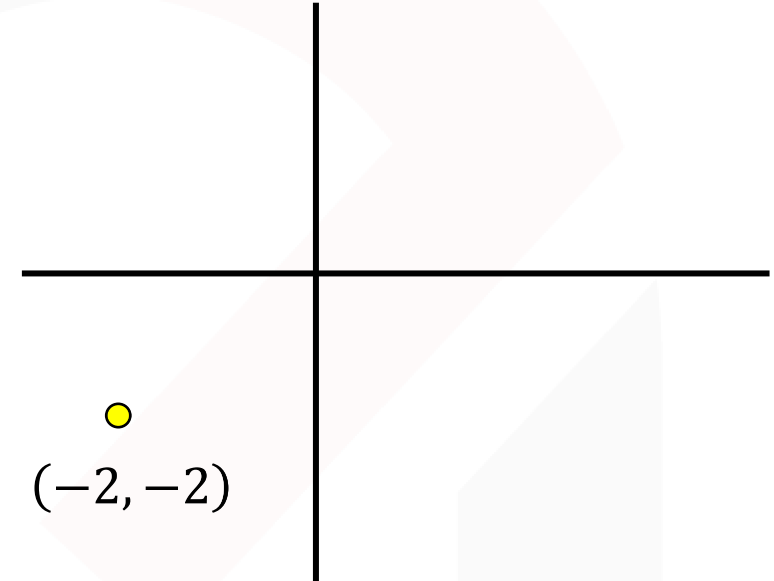
১৬. $(-2, -2)$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক কোনটি?

ক. $\left(3\sqrt{2}, \frac{-3\pi}{4}\right)$

✔. $\left(2\sqrt{2}, \frac{-3\pi}{4}\right)$

গ. $\left(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{4}\right)$

ঘ. $\left(3\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$



$$r = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{8}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

MCQ

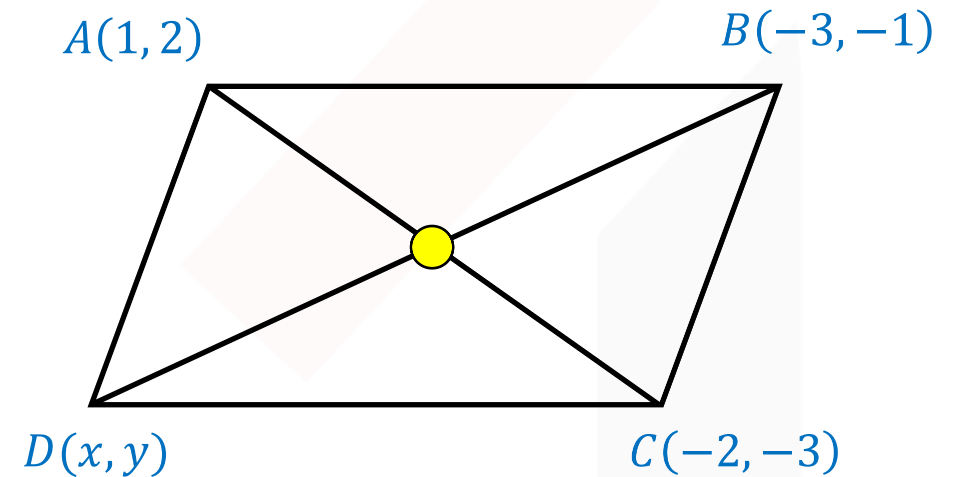
১৭. $ABCD$ সামান্তরিকের চারটি শীর্ষবিন্দু $A(1,2)$, $B(-3,-1), C(-2,-3), D(x,y)$, $(x,y) =$কত?

ক. $(1,-1)$

খ. $(-1,1)$

✔ গ. $(2,0)$

ঘ. $(-2,2)$



তাবিজ

$$x = 1 + (-2) - (-3)$$
$$= 1 - 2 + 3$$
$$= 2$$

$$y = 2 + (-3) - (-1)$$
$$= 2 - 3 + 1$$
$$= 0$$

$$(x, y) = (2, 0)$$

MCQ

১৮. $(\alpha, 0)$, $(0, b)$ ও $(1, 1)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হওয়ার শর্ত কোনটি?

ক. $a + b = ab$ ✓

খ. $a - b = ab$

গ. $a - b + ab = 0$

ঘ. $a + b = 0$

$$\frac{b-0}{0-a} = \frac{1-b}{1-0}$$

$$\Rightarrow b = -a + ab$$

$$\Rightarrow a + b = ab$$

MCQ

১৯. $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক কোনটি?

ক. $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$

খ. $\left(2, \frac{3\pi}{4}\right)$

✓. $\left(2, \frac{5\pi}{4}\right)$

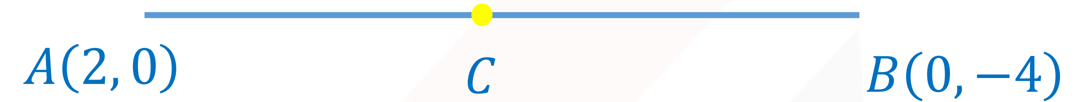
ঘ. $\left(2, \frac{7\pi}{4}\right)$



MCQ

উদ্দীপকের আলোকে ২০ নং প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

$A(2,0)$, $B(0,-4)$, AB এর মধ্যবিন্দু C ।



২০. C বিন্দুর স্থানাংক-

ক. $(2,4)$

খ. $(1,-2)$ ✔

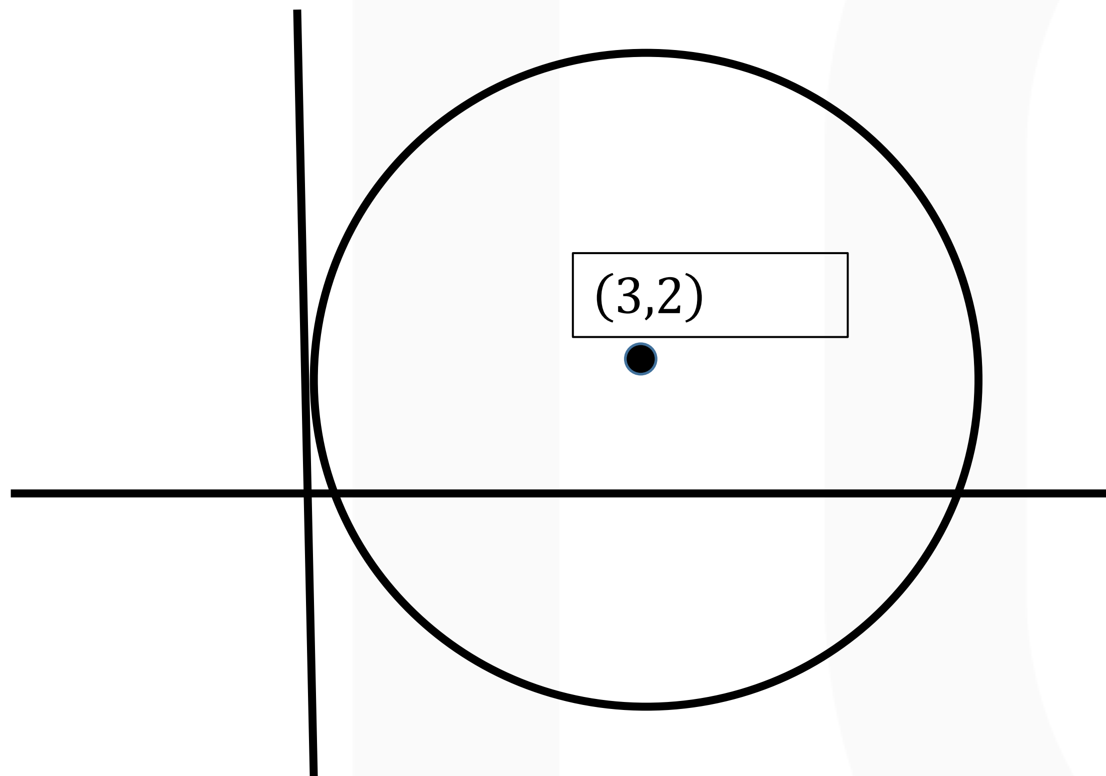
গ. $(2,1)$

ঘ. $(0,0)$

$$C = \left(\frac{2+0}{2}, \quad \frac{0-4}{2}\right)$$

$$C = (1,-2)$$

প্রশ্নমালা 3.5



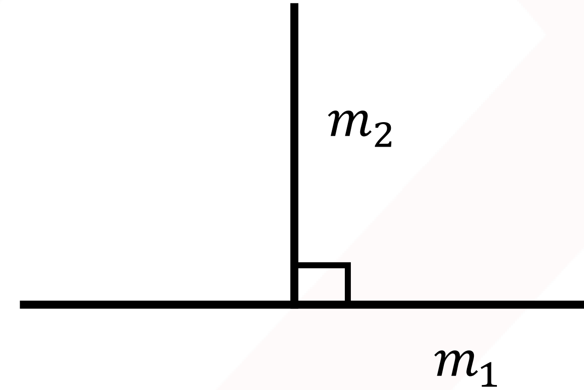
$(1-y)^2 \rightarrow$ $r = 1 - y$

$r^2 = (y-1)^2$

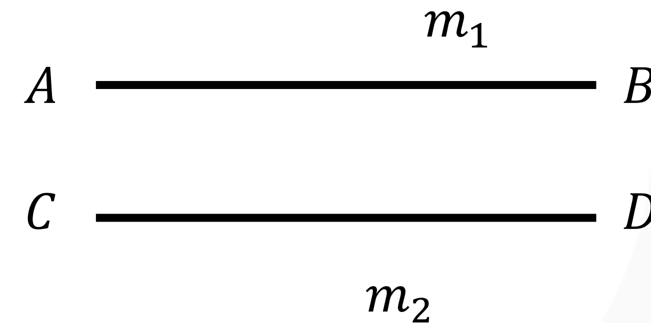
$r = y - 1$

দুইটি সরলরেখা লম্ব ও সমান্তরাল হওয়ার শর্ত

$m_1 \times m_2 = -1$ (লম্ব)



$m_1 = m_2$ (সমান্তরাল)



ঢাল

দুইটি বিন্দু $(x_1\ y_1)$ (x_2, y_2)

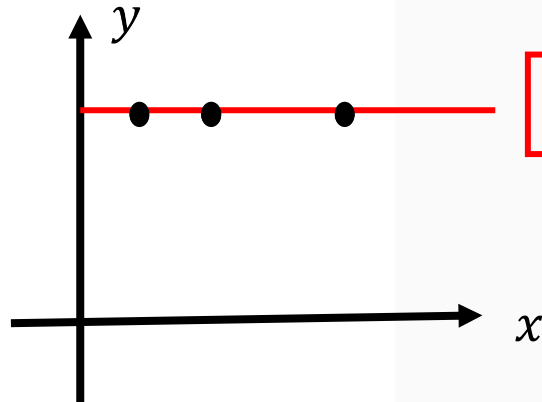
ঢাল, $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{\text{কোটিদ্বয়ের পার্থক্য}}{\text{ভুজদ্বয়ের পার্থক্য}}$

(6, 3) ও (3, 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার ঢাল =?

$$m = \frac{2-3}{3-6} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

সমান্তরাল রেখার সমীকরণ

* x অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, $y = b$

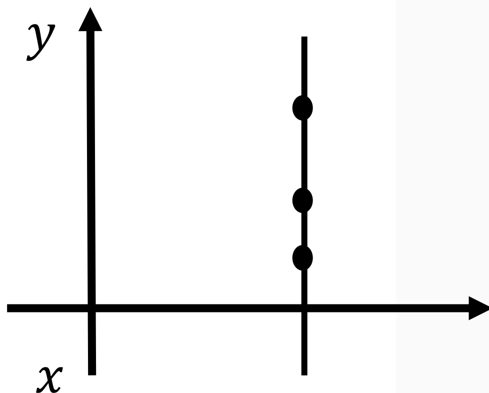


$y = b$

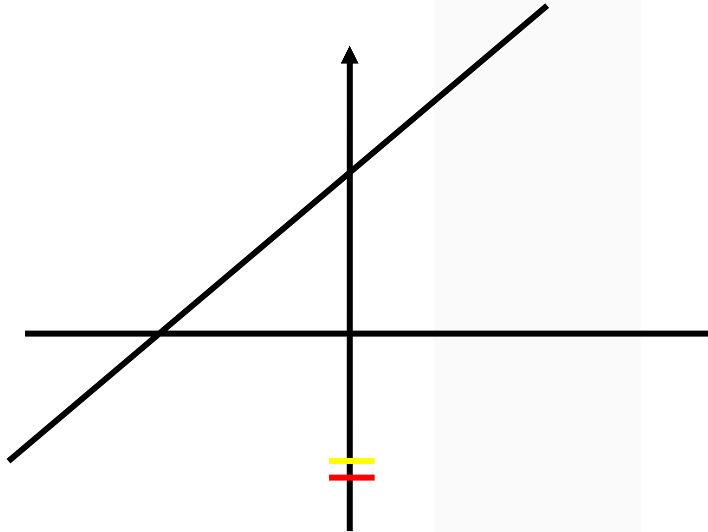
$y = 3,$ $y = -5,$ ইত্যাদি

* x অক্ষের সমীকরণ, $y = 0$

* y অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, $x = a$



$x = 5,$ $x = -2,$ ইত্যাদি



y অক্ষকে কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে ছেদ করে এবং x অক্ষের সাথে একটি ধনাত্মক কোণ উৎপন্ন করে এরূপ রেখার সমীকরণ

$$y = mx + c$$

$m =$ ঢাল

$c = y$ অক্ষের ছেদকাংশ

* $3x - 2y + 6 = 0$ রেখার ঢাল ও y অক্ষের ছেদকাংশ

$\Rightarrow 3x + 6 = 2y$

$\Rightarrow y = \frac{3}{2}x + 3$

দুইটি বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ

* দুইটি বিন্দু $(x_1,\ y_1)$ ও (x_2, y_2) গামী রেখার সমীকরণ ,

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2}$$

* $(2,\ 5)$ ও $(-4, 3)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ ,

$$\Rightarrow \frac{x - (-4)}{-4 - 2} = \frac{y - 3}{3 - 5}$$

$$\Rightarrow -2x - 8 = -6y + 18$$

$$\Rightarrow 6y - 2x - 26 = 0$$

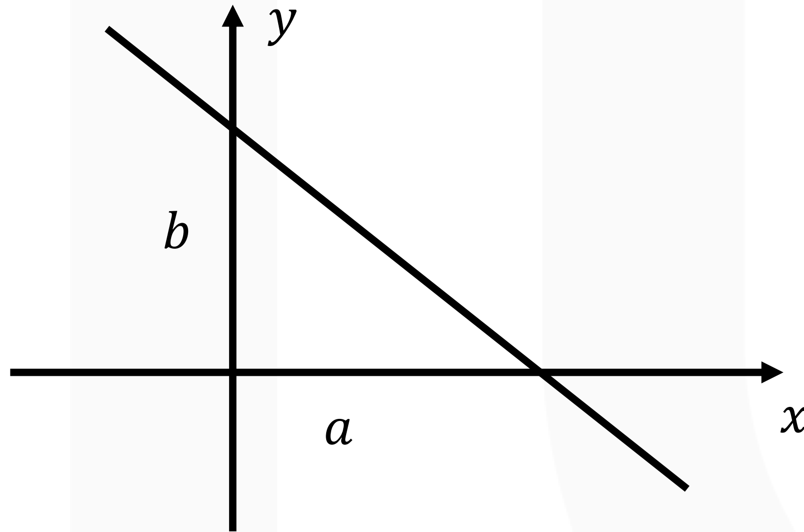
$$\Rightarrow x - 3y + 13 = 0$$

অক্ষদ্বয়ের খন্ডিতাংশ দেয়া থাকলে সরলরেখার সমীকরণ

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$a = x$ অক্ষের ছেদকাংশ $(\pm)$

$b = y$ অক্ষের ছেদকাংশ $(\pm)$



* $3x - 4y + 9 = 0$ রেখার ঢাল ও অক্ষদ্বয়ের খন্ডিতাংশ নির্ণয় কর।

Sol^n:

$$3x - 4y = -9$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$$

ঢাল, $m = \frac{3}{4}$

$$y = mx + c$$

আবার,

$$3x - 4y = -9$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{-9} - \frac{4y}{-9} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-3} + \frac{y}{\frac{9}{4}} = 1$$

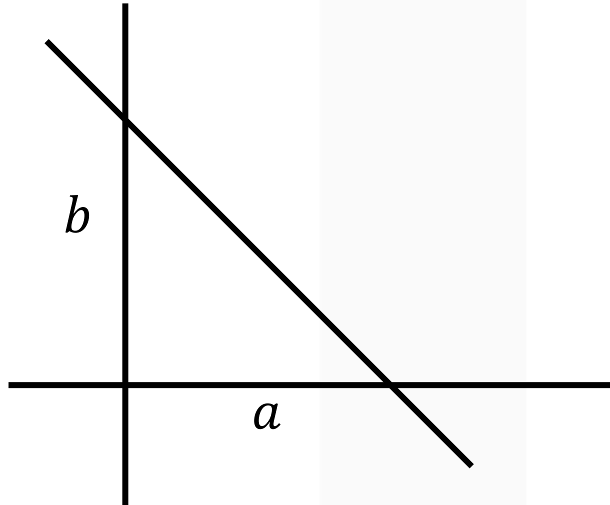
a ← -3, $\frac{9}{4}$ → b

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

x অক্ষের খন্ডিতাংশ $= -3$

y অক্ষের খন্ডিতাংশ $= \frac{9}{4}$

* একটি সরলরেখা অক্ষদ্বয় থেকে সমমানের যোগবোধক অংশ ছেদ করে এবং $(3,2)$ বিন্দুগামী। সরলরেখার সমীকরণ $=?$



$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

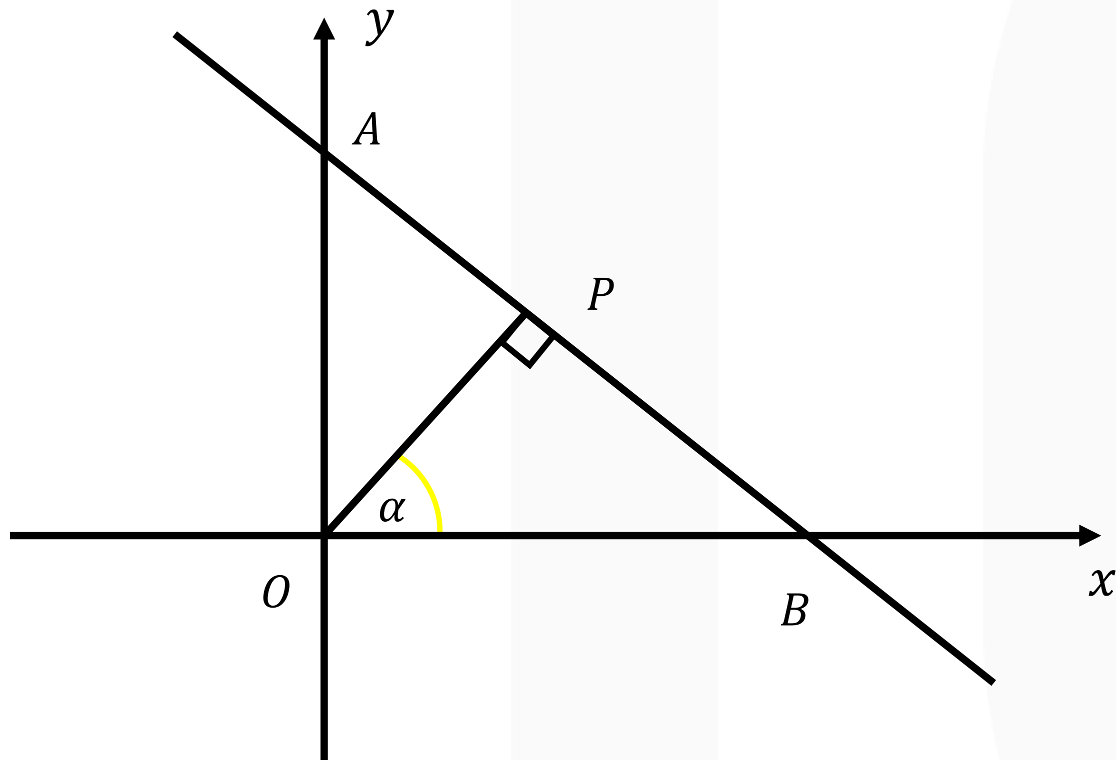
$$\Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$$

$$\Rightarrow x+y=a \ldots\ldots(i)$$

(i) রেখাটি $(3,2)$ বিন্দুগামী।

$$\therefore 3+5=a$$
$$\Rightarrow a=5$$

$\therefore$ সরলরেখার সমীকরণ, $x+y=5$



$x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$

α সর্বদা ধনাত্মক x অক্ষের সাথে কোণ।

$P =$ মূলবিন্দু থেকে রেখাটির ওপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য

দুইটি সমীকরণ একই রেখা নির্দেশ করার শর্ত

$2x + y - 6 = 0 \ldots\ldots\ldots..(i)$

$a_1x + b, y + c_1 = 0$

$4x + 2y - 12 = 0 \ldots\ldots\ldots..(ii)$

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

অবশ্যই All Theory + 3.5 এর কিছু Math

Problems

(31) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দুগামী এবং x- অক্ষের সাথে $(a) 60°$ কোণ উৎপন্ন করে।

(a) আমরা জানি, মূলবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y = mx \ldots \ldots (i)$

যেখানে রেখার ঢাল $m = \tan 60° = \sqrt{3}$

m এর মান (i) নং এ বসাই,

$y = \sqrt{3}x$

$\therefore y - \sqrt{3}x = 0$; যা নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ। **Answer**

Problems

(31) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দুগামী এবং x- অক্ষের সাথে $(b) 135°$ কোণ উৎপন্ন করে।

(b) আমরা জানি, মূলবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y = mx \ldots\ldots (i)$

যেখানে রেখার ঢাল $m = \tan 135°$

$= \tan(180° - 45°)$

$= -\tan 45°$

$= -1$

m এর মান (i) নং এ বসাই,

$y = -x$

$\therefore x + y = 0$; যা নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ। **Answer**

Problems

(32) দুটি সরলরেখার উভয়ে $(3, -4)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা যথাক্রমে x- অক্ষের সমান্তরাল এবং এর উপর লম্ব। রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

আমরা জানি, x অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $y = b \dots \dots (i)$

এবং x অক্ষের উপর লম্ব সমীকরণ $x = a \dots \dots (ii)$

(i) নং রেখাটি $(3, -4)$ বিন্দু দিয়ে যায়, সুতরাং আমরা পাই, $-4 = b$ বা, $b = -4$

(i) নং এ b এর মান বসিয়ে পাই, $y = -4$

$\therefore y + 4 = 0$

আবার, (ii) নং রেখাটি $(3, -4)$ বিন্দু দিয়ে যায়, সুতরাং আমরা পাই, $3 = a$ বা, $a = 3$

(ii) নং এ a এর মান বসিয়ে পাই, $x = 3$

$\therefore x - 3 = 0$

অর্থাৎ রেখাদ্বয়ের সমীকরণ যথাক্রমে, $y + 4 = 0$ এবং $x - 3 = 0$। **Answer**

Problems

(33) $ax + by = c$ এবং $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$, একই সরলরেখা নির্দেশ করলে p এর মান a, b এবং c তে প্রকাশ কর।

প্রদত্ত সমীকরণ, $ax + by = c \dots\dots (i)$

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p \dots\dots (ii)$$

(i) ও (ii) নং একই সরলরেখা নির্দেশ করলে,

$$\Rightarrow \frac{a}{\cos\alpha} = \frac{c}{p}$$

$$\therefore \cos\alpha = \frac{ap}{c} \dots\dots (iii)$$

$$\Rightarrow \frac{b}{\sin\alpha} = \frac{c}{p}$$

$$\therefore \sin\alpha = \frac{bp}{c} \dots\dots (iv)$$

$(iii)^2 + (iv)^2 \Rightarrow$

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \frac{a^2p^2}{c^2} + \frac{b^2p^2}{c^2}$$

$$\Rightarrow 1 = p^2\left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}\right) \qquad \Rightarrow \frac{1}{p^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}$$

$$\Rightarrow p^2 = \frac{c^2}{a^2 + b^2} \qquad \Rightarrow p = \pm\sqrt{\frac{c^2}{a^2+b^2}}$$

$$\therefore p = \pm\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Problems

(34) একটি সরলরেখা (1,2) এবং (3,4) বিন্দু দিয়ে যায় এবং (x, y) বিন্দুটি তার উপর অবস্থিত। দেখাও যে, $x - y + 1 = 0$

(1,2) ও (3,4) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{y-y_1}{y_1-y_2} = \frac{x-x_1}{x_1-x_2}$

$$\Rightarrow \frac{y-2}{2-4} = \frac{x-1}{1-3}$$

$$\Rightarrow \frac{y-2}{-2} = \frac{x-1}{-2}$$

$$\Rightarrow x - 1 - y + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x - y + 1 = 0 \ldots\ldots (i)$$

এখন, (x, y) বিন্দুটি (i) নং এর উপর অবস্থিত।

$$\therefore x - y + 1 = 0$$

Problems

(35) কোনো সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশ (2,3) বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হলে, রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

আমরা জানি, অক্ষদ্বয়কে ছেদ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \ldots \ldots (i)$

(i) রেখাটি x অক্ষকে A বিন্দুতে এবং y অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করলে A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে, $(a, 0)$ ও $(0, b)$

শর্তানুসারে,

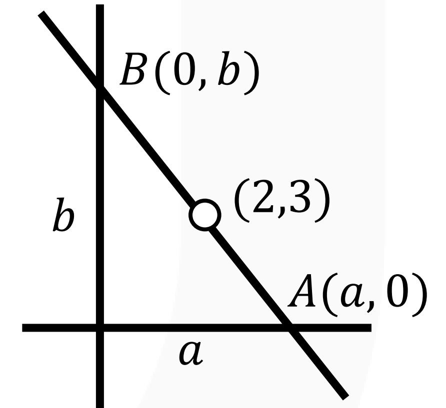
AB এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (2,3)

$$\frac{a+0}{2} = 2$$

$$\therefore a = 4$$

$$\frac{b+0}{2} = 3$$

$$\therefore b = 6$$

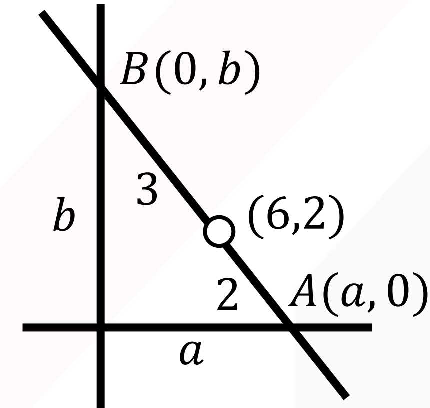


$\therefore$ সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$

$$\Rightarrow 3x + 2y = 12$$

Problems

(36) কোনো সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশ (6,2) বিন্দুতে 2: 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়, সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।



শর্তানুসারে, (6,2) বিন্দুতে AB রেখাটি 2: 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়।

$$\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2} = x$$

$$\Rightarrow \frac{2 \times 0 + 3 \times a}{2 + 3} = 6$$

$$\Rightarrow 3a = 30$$

$$\therefore a = 10$$

$$\frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2} = y$$

$$\Rightarrow \frac{2 \times b + 3 \times 0}{2 + 3} = 2$$

$$\Rightarrow 2b = 10$$

$$\therefore b = 5$$

∴ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1$

$$\Rightarrow \frac{x + 2y}{10} = 1$$

$$\therefore x + 2y = 10$$

Problems

(37) একটি সরলরেখা $(-2, -5)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং x ও y অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে যেন $OA + 2.OB = 0$ হয়, যখন O মূলবিন্দু।

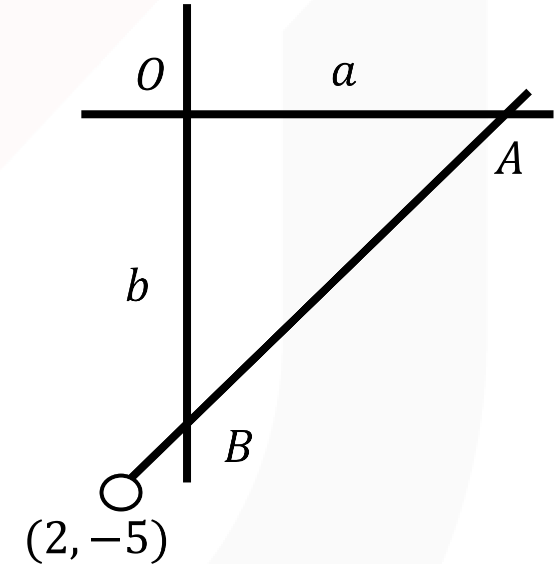
আমরা জানি, অক্ষদ্বয়কে ছেদ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \ldots \ldots (i)$

ধরি, $OA = a$ এবং $OB = b$

শর্তানুসারে, $OA + 2OB = 0$

$\Rightarrow a + 2b = 0$

$\Rightarrow a = -2b \ldots \ldots (ii)$



Problems

(37) একটি সরলরেখা $(-2,-5)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং x ও y অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে যেন $OA + 2.OB = 0$ হয়, যখন O মূলবিন্দু।

যেহেতু, (i) নং রেখাটি $(-2,-5)$ বিন্দু দিয়ে যায়,

$$\frac{-2}{a} + \frac{-5}{b} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{-2b - 5a}{ab} = 1$$

$$\Rightarrow -2b - 5a = ab$$

$$\Rightarrow a - 5a = ab$$ [(ii) নং হতে, $a = -2b$ বসিয়ে]

$$\Rightarrow -4a = ab \quad \Rightarrow b = -4$$

(ii) নং এ b এর মান বসিয়ে পাই,

$$a = -2 \times (-4) = 8$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $\frac{x}{8} - \frac{y}{4} = 1$

$$\Rightarrow x - 2y = 8$$

Problems

(38) একটি সরলরেখা (2,6) বিন্দু দিয়ে যায় এবং যা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খন্ডিতাংশের সমষ্টি 15; রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

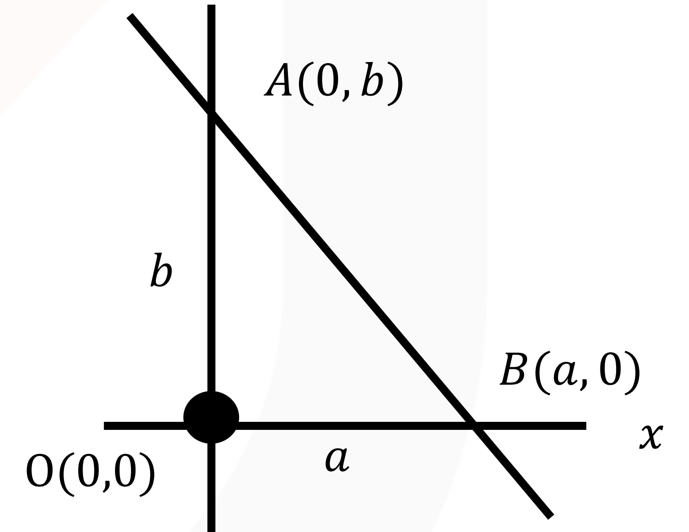
আমরা জানি, অক্ষদ্বয়কে ছেদ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \ldots\ldots(i)$

এখানে, x অক্ষের খন্ডিতাংশ a

আর y অক্ষের খন্ডিতাংশ b

প্রশ্নমতে, $a+b=15$

$\Longrightarrow b=15-a \ldots\ldots(ii)$



Problems

(38) একটি সরলরেখা (2,6) বিন্দু দিয়ে যায় এবং যা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খন্ডিতাংশের সমষ্টি 15; রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

আবার, (i) নং সমীকরণটি (2,6) বিন্দুগামী।

$$\frac{2}{a}+\frac{6}{b}=1$$

$$\Rightarrow 2b+6a=ab$$

$$\Rightarrow 2(15-a)+6a=a(15-a) \quad [b=15-a]$$

$$\Rightarrow 30-2a+6a=15a-a^2$$

$$\Rightarrow a^2-15a+30-2a+6a=0$$

$$\Rightarrow a^2-11a+30=0$$

$$\Rightarrow (a-5)(a-6)=0 \quad \Rightarrow a=5,6$$

(ii) নং এ মান বসিয়ে পাই,

$a=5$ হলে, $b=15-5=10$

$a=6$ হলে, $b=15-6=9$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $\frac{x}{5}+\frac{y}{10}=1 \Rightarrow 2x+y=10$

এবং, $\frac{x}{6}+\frac{y}{9}=1 \Rightarrow 3x+2y=18$

Problems

(39) একটি সরলরেখা অক্ষ দুটি থেকে সমান সমান অংশ ছেদ করে এবং (α, β) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনেকরি, সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \ldots \ldots (i)$

শর্তানুসারে, $a=b$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

$$\therefore \frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$$

$\Longrightarrow x+y=a$ যা (α, β) বিন্দুগামী। অর্থাৎ, $a=\alpha+\beta$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x+y=\alpha+\beta$

Problems

(40) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা অক্ষদ্বয় থেকে সমমানের যোগবোধক অংশ ছেদ করে এবং মূলবিন্দু থেকে যার দূরত্ব 4 একক।

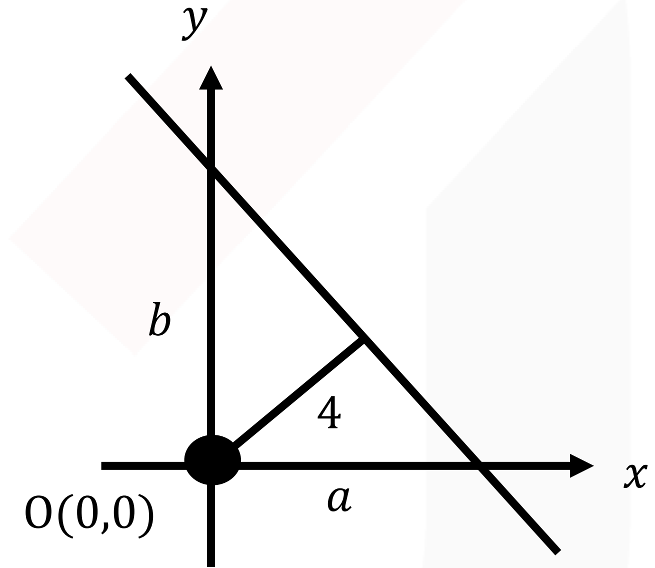
ধরি, সরলরেখার সমীকরণ, $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$

প্রশ্নমতে, $p = 4$

$\therefore x\cos\alpha + y\sin\alpha = 4 \ldots\ldots (i)$

$\Rightarrow \frac{x\cos\alpha}{4} + \frac{y\sin\alpha}{4} = 1$

$\Rightarrow \frac{x}{\frac{4}{\cos\alpha}} + \frac{y}{\frac{4}{\sin\alpha}} = 1$



Problems

(40) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা অক্ষদ্বয় থেকে সমমানের যোগবোধক অংশ ছেদ করে এবং মূলবিন্দু থেকে যার দূরত্ব 4 একক।

প্রশ্নমতে, $a = b$

$$\therefore \frac{4}{\cos\alpha} = \frac{4}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = 1$$

$$\therefore \alpha = 45°$$

অর্থাৎ, $x\cos 45° + y\sin 45° = 4$ [α এর মান বসিয়ে]

$$\Rightarrow x \times \frac{1}{\sqrt{2}} + y \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 4$$

$$\therefore x + y = 4\sqrt{2}$$

Problems

(41) একটি সরলরেখা (1,4) বিন্দুগামী এবং অক্ষদ্বয়ের সাথে প্রথম চতুর্ভাগে 8 বর্গ একক ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ গঠন করে। সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

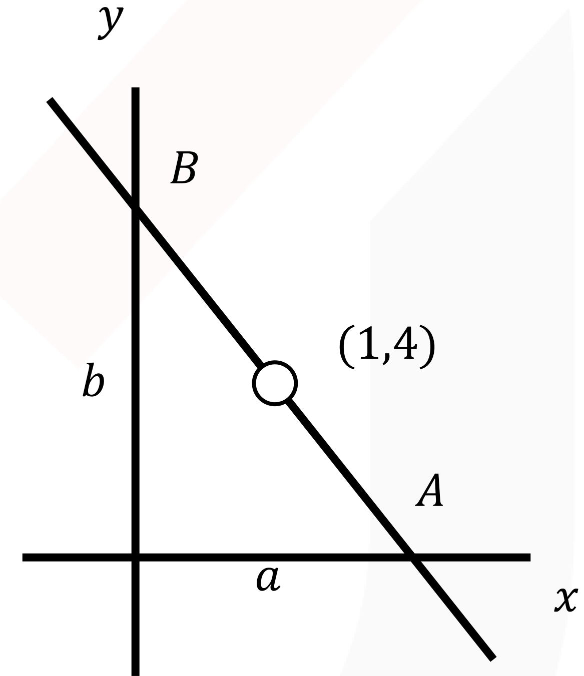
মনেকরি, সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \ldots\ldots(i)$

যেখানে, $OA=a, OB=b$ এবং O মূলবিন্দু।

শর্তানুসারে, $\Delta OAB=8$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}ab=8$$

$$\therefore b=\frac{16}{a} \ldots\ldots(ii)$$



Problems

(41) একটি সরলরেখা (1,4) বিন্দুগামী এবং অক্ষদ্বয়ের সাথে প্রথম চতুর্ভাগে 8 বর্গ একক ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ গঠন করে। সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(i) রেখাটি (1,4) বিন্দু দিয়ে যায়,

$$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{4}{\frac{16}{a}}=1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{a}{4}=1$$

$$\Rightarrow 4+a^2=4a$$

$$\Rightarrow a^2-4a+4=0$$

$$\Rightarrow (a-2)^2=0$$

$$\therefore a=2$$

$$\therefore b=\frac{16}{2}=8$$

$\therefore$ সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{x}{2}+\frac{y}{8}=1$

$$\Rightarrow 4x+y=8$$

Problems

(42) $A(h,k)$ বিন্দুটি $6x - y = 1$ রেখার উপর অবস্থিত এবং $B(k,h)$ বিন্দুটি $2x - 5y = 5$ রেখার উপর অবস্থিত; AB সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

$A(h,k)$ বিন্দুটি $6x - y = 1$ রেখার ওপর অবস্থিত।

$\therefore 6h - k = 1 \ldots\ldots (i)$

$B(k,h)$ বিন্দুটি $2x - 5y = 5$ রেখার ওপর অবস্থিত।

$\therefore 2k - 5h = 5 \ldots\ldots (ii)$

(i) ও (ii) সমাধান করে পাই,

$h = 1 \qquad k = 5$

$\therefore A$ বিন্দুটি $(1,5)$ এবং B বিন্দুটি $(5,1)$

অর্থাৎ, AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x-1}{1-5} = \frac{y-5}{5-1}$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{-4} = \frac{y-5}{4}$$

$$\Rightarrow -x + 1 = y - 5$$

$$\therefore x + y - 6 = 0$$

Problems

(43) দেখাও যে, $x = a, y = b$ এবং $y = mx$ রেখাত্রয়ের দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2m}(b - ma)^2$

ধরি, ΔABC এর AB বাহুটি $x = a \dots \dots (i)$

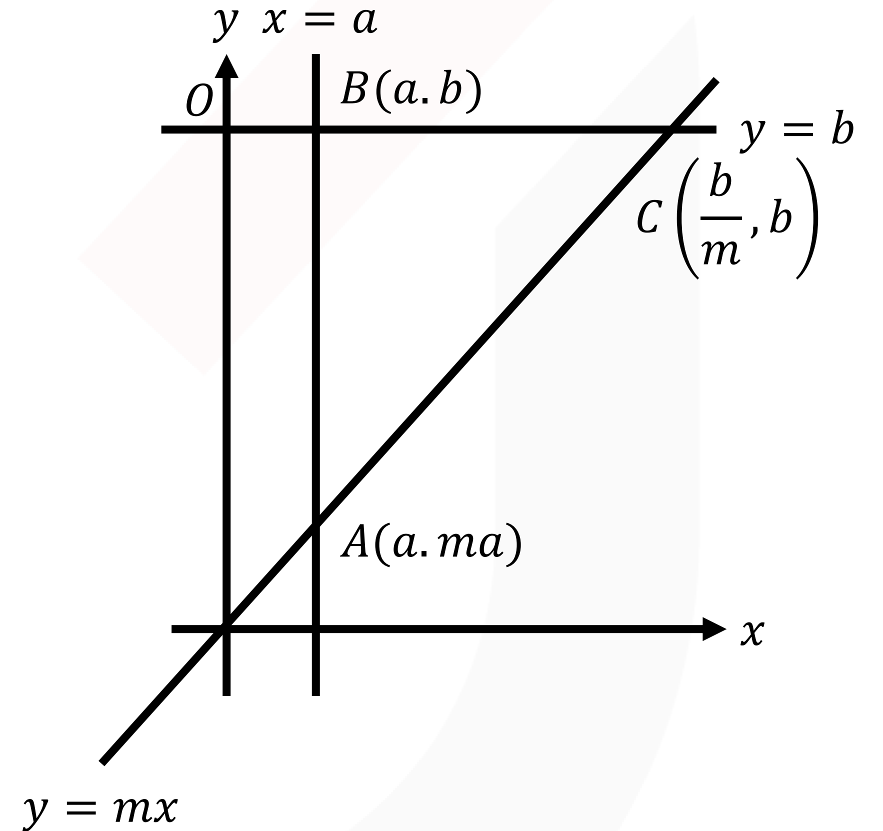
BC বাহুটি $y = b \dots \dots (ii)$

AC বাহুটি $y = mx \dots \dots (iii)$

অর্থাৎ, A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (a, ma)

B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (a, b)

C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{b}{m}, b\right)$



Problems

(43) দেখাও যে, $x = a, y = b$ এবং $y = mx$ রেখাত্রয়ের দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2m}(b - ma)^2$

$\therefore ABC$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} a & ma \\ \frac{b}{m} & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{b}{m} & b \\ a & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ a & ma \end{vmatrix}\right\}$

$$= \frac{1}{2}\left(ab - ab + \frac{b^2}{m} - ab + a^2m - ab\right)$$

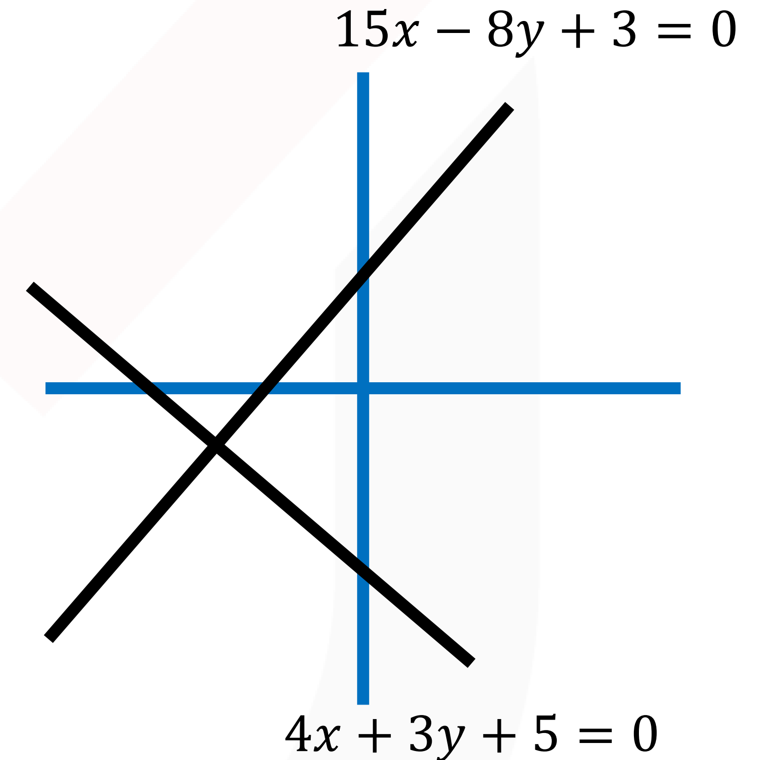
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{m} - 2ab + a^2m\right)$$

Problems

(44) $15x - 8y + 3 = 0$ এবং $4x + 3y + 5 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণদ্বয়ের সমদ্বিখন্ডকদ্বয় x অক্ষকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। PQ এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ, $$\frac{15x - 8y + 3}{\sqrt{15^2 + (-8)^2}} = \pm \frac{4x + 3y + 5}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$\Rightarrow 75x - 40y + 15 = \pm(68x + 51y + 85)$$



$(+)ve$ চিহ্ন নিয়ে,

$$75x - 40y + 15 = +(68x + 51y + 85)$$

$$\Rightarrow 7x - 91y - 70 = 0$$

$$\Rightarrow x - 13y - 10 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{10} - \frac{13y}{10} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{10} + \frac{y}{\frac{-10}{13}} = 1$$

$\therefore$ P এর স্থানাঙ্ক $(10,0)$

Problems

(44) $15x - 8y + 3 = 0$ এবং $4x + 3y + 5 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণদ্বয়ের সমদ্বিখন্ডকদ্বয় x অক্ষকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। PQ এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

$(-)ve$ চিহ্ন নিয়ে,

$$75x - 40y + 15 = -(68x + 51y + 85)$$

$$\Rightarrow 143x + 11y + 100 = 0$$

$$\Rightarrow 143x + 11y = -100$$

$$\Rightarrow \frac{143x}{-100} + \frac{11y}{-100} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{-100}{143}} + \frac{y}{\frac{-100}{11}} = 1$$

$\therefore Q$ এর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{100}{143}, 0\right)$

সমদ্বিখন্ডকদ্বয় x অক্ষকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে।

PQ এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(10 + \frac{100}{143})^2 + (0-0)^2}$

$= \frac{1530}{143}$ একক

Problems

(45) (1,2), (4,4) ও (2,8) বিন্দুত্রয় কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু; ত্রিভুজটির বাহুগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনেকরি, ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে $D(1,2), E(4,4), F(2,8)$।

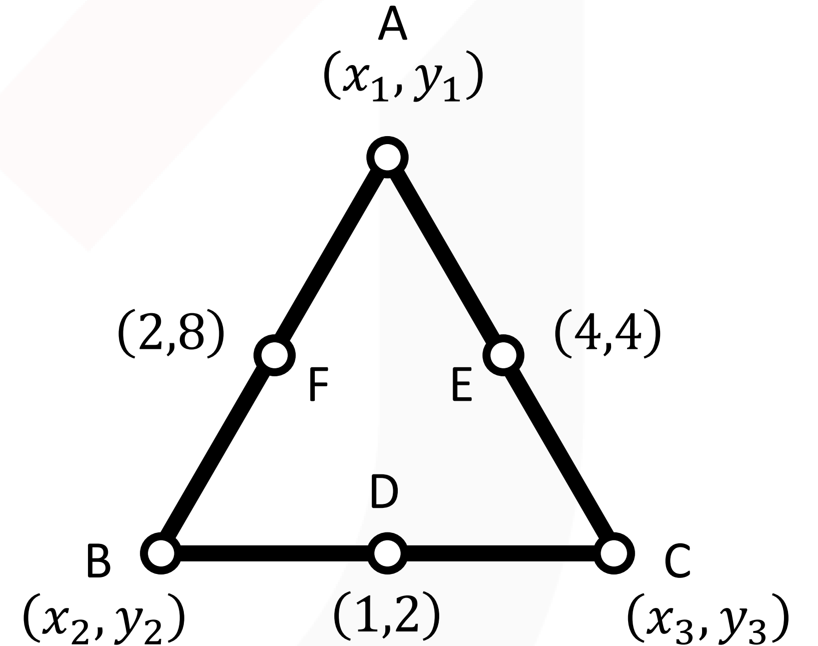
আবার, AB এর মধ্যবিন্দু $= \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

প্রশ্নমতে, $\frac{x_1+x_2}{2} = 2$

$\Rightarrow x_1 + x_2 = 4 \dots\dots (i)$

$\frac{y_1+y_2}{2} = 8$

$\Rightarrow y_1 + y_2 = 16 \dots\dots (ii)$



Problems

(45) (1,2), (4,4) ও (2,8) বিন্দুত্রয় কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু; ত্রিভুজটির বাহুগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর।

BC এর মধ্যবিন্দু $= \left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$

প্রশ্নমতে, $\frac{x_2+x_3}{2} = 1$

$\Rightarrow x_2 + x_3 = 2 \ldots\ldots (iii)$

$\frac{y_2+y_3}{2} = 2$

$\Rightarrow y_2 + y_3 = 4 \ldots\ldots (iv)$

CA এর মধ্যবিন্দু $= \left(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2}\right)$

প্রশ্নমতে, $\frac{x_1+x_3}{2} = 4$

$\Rightarrow x_1 + x_3 = 8 \ldots\ldots (v)$

$\frac{y_1+y_3}{2} = 4$

$\Rightarrow y_1 + y_3 = 8 \ldots\ldots (vi)$

Problems

(45) (1,2), (4,4) ও (2,8) বিন্দুত্রয় কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু; ত্রিভুজটির বাহুগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর।

$(i), (iii), (v)$ নং সমীকরণ সমাধান করে পাই,

$x_1 = 5$ $x_2 = -1$ $x_3 = 3$

$(ii), (iv), (vi)$ নং সমীকরণ সমাধান করে পাই,

$y_1 = 10$ $y_2 = 6$ $y_3 = -2$

∴ ত্রিভুজের বিন্দু তিনটি হলো $A(5,10), B(-1,6), C(3,-2)$

Problems

(45) (1,2), (4,4) ও (2,8) বিন্দুত্রয় কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু; ত্রিভুজটির বাহুগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর।

এখন, AB রেখার সমীকরণ, $\frac{y-10}{10-6} = \frac{x-5}{5+1}$

$$\Longrightarrow 6y - 60 = 4x - 20$$

$$\Longrightarrow 4x + 40 - 6y = 0$$

$$\Longrightarrow 2x - 3y + 20 = 0$$

BC রেখার সমীকরণ, $\frac{y-6}{6+2} = \frac{x+1}{-1-3}$

$$\Longrightarrow -4y + 24 = 8x + 8$$

$$\Longrightarrow 8x + 4y - 16 = 0$$

$$\Longrightarrow 2x + y - 4 = 0$$

AC রেখার সমীকরণ, $\frac{y-10}{10+2} = \frac{x-5}{5-3}$

$$\Longrightarrow 2y - 20 = 12x - 60$$

$$\Longrightarrow 12x - 2y - 40 = 0$$

$$\Longrightarrow 6x - y - 20 = 0$$

Problems

(45) (1,2), (4,4) ও (2,8) বিন্দুত্রয় কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু; ত্রিভুজটির বাহুগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর।

যেহেতু EF, BC বাহুর সমান্তরাল, সুতরাং BC ও EF এর ঢাল পরস্পর সমান।

$\therefore BC$ এর ঢাল $= EF$ এর ঢাল $= \frac{8-4}{2-4} = -2$

-2 ঢাল বিশিষ্ট এবং (1,2) বিন্দুগামী BC রেখার সমীকরণ, $(y-2) = -2(x-1)$

$$\Rightarrow 2x + y - 4 = 0$$

আবার, AB রেখার ঢাল $= DE$ রেখার ঢাল $= \frac{4-2}{4-1} = \frac{2}{3}$

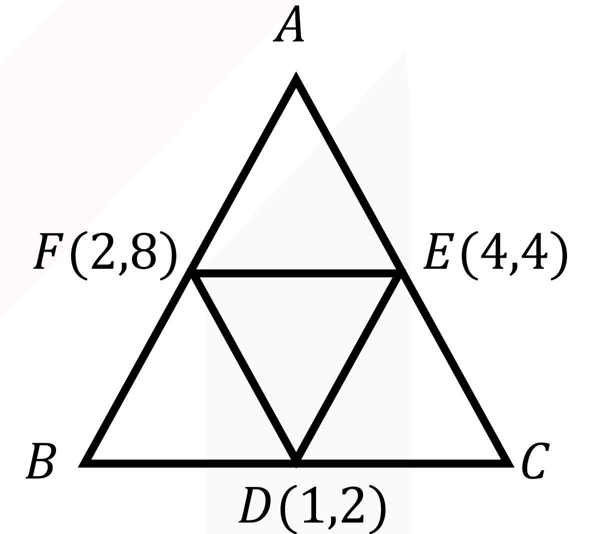
$\frac{2}{3}$ ঢাল বিশিষ্ট এবং (2,8) বিন্দুগামী AB রেখার সমীকরণ, $(y-8) = \frac{2}{3}(x-2)$

$$\Rightarrow 2x - 3y + 20 = 0$$

তদ্রুপ, AC রেখার ঢাল $= DF$ রেখার ঢাল $= \frac{8-2}{2-1} = 6$

6 ঢাল বিশিষ্ট এবং (4,4) বিন্দুগামী AC রেখার সমীকরণ, $(y-4) = 6(x-4)$

$$\Rightarrow 6x - y - 20 = 0$$ **Answer**



Problems

(46) $OABC$ একটি সামান্তরিক। x- অক্ষ বরাবর OA অবস্থিত। OC রেখার সমীকরণ $y = 2x$ এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(4,2)$; A ও C বিন্দুর স্থানাঙ্ক এবং AC কর্ণের সমীকরণ নির্ণয় কর।

দেয়া আছে, OC রেখার সমীকরণ $y = 2x$

BC বাহু x অক্ষের সমান্তরালে হওয়ায় c বিন্দুর কোটি, $y = 2$

এখন, $y = 2x$

$\Longrightarrow 2 = 2x$

$\therefore x = 1$

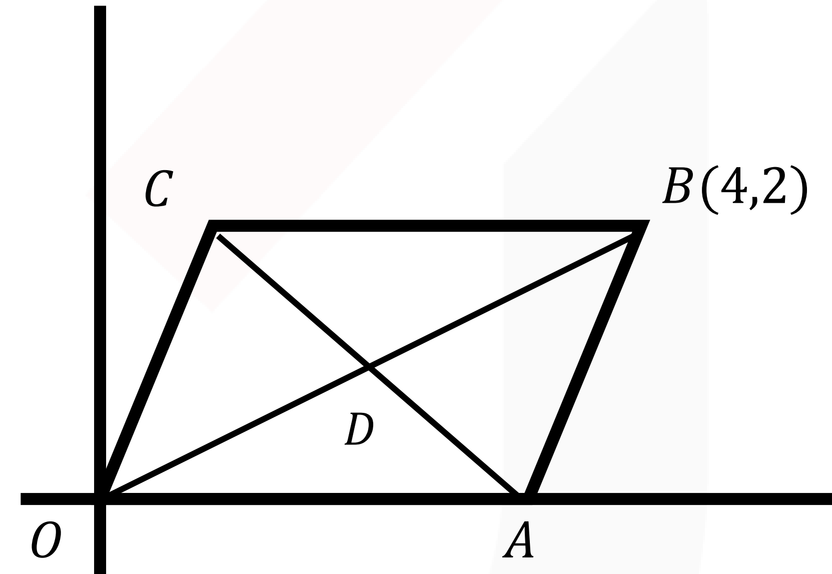
$\therefore C$ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(1,2)$

এখন, OB কর্ণের মধ্যবিন্দু $= \left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+2}{2}\right)$

$= (2,1)$

ধরি, $A \equiv (x, y)$

AC কর্ণের মধ্যবিন্দু $= \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+2}{2}\right)$



Problems

(46) $OABC$ একটি সামান্তরিক। x- অক্ষ বরাবর OA অবস্থিত। OC রেখার সমীকরণ $y = 2x$ এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(4,2)$; A ও C বিন্দুর স্থানাঙ্ক এবং AC কর্ণের সমীকরণ নির্ণয় কর।

$$\frac{x+1}{2} = 2$$

$$\therefore x = 3$$

$$\frac{y+2}{2} = 1$$

$$\therefore y = 0$$

$\therefore$ A বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(3,0)$

$\therefore$ AC কর্ণের সমীকরণ, $\frac{y-0}{0-2} = \frac{x-3}{3-1}$

$$\Rightarrow 2y = -2x + 6$$

$$\Rightarrow x + y - 3 = 0$$

Answer

Problems

(47) $x = 4, x = 8, y = 6$ এবং $y = 10$ রেখাগুলি দ্বারা উৎপন্ন আয়তক্ষেত্রের কর্ণগুলোর সমীকরণ নির্ণয় কর।

DU WRITTERN

প্রদত্ত তথ্যানুসারে,

A, B, C, D বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(4,6), (8,6), (8,10)$ ও $(4,10)$

$\therefore AC$ কর্ণের সমীকরণ, $\frac{y-6}{6-10} = \frac{x-4}{4-8}$

$\Rightarrow -4x + 16 = -4y + 24$

$\Rightarrow x - y = -2$

$\Rightarrow y = x + 2$

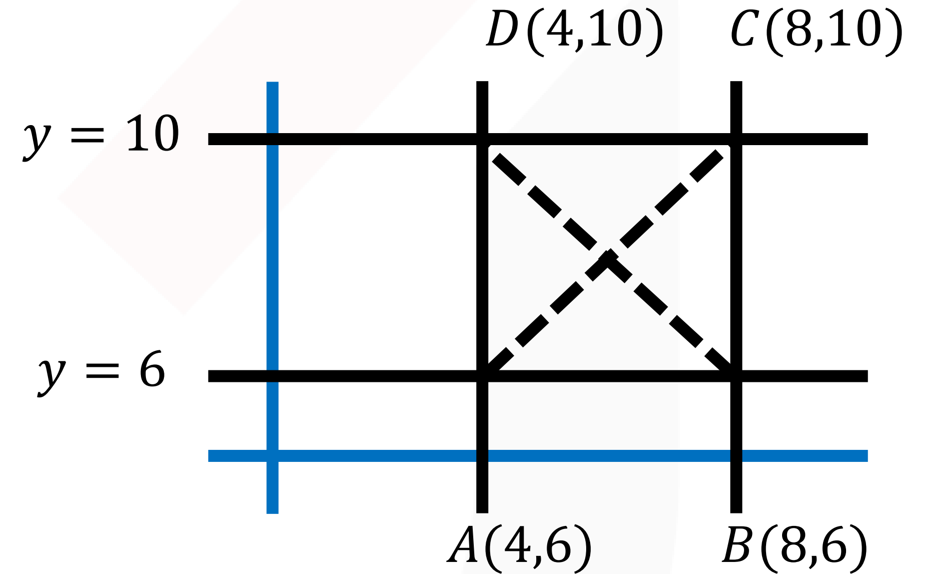
$\therefore AC$ কর্ণের ঢাল, $m_1 = 1$

$\therefore BD$ কর্ণের সমীকরণ, $\frac{y-6}{6-10} = \frac{x-8}{8-4}$

$\Rightarrow -4x + 32 = 4y - 24$

$\Rightarrow x + y = 14$

$\Rightarrow y = -x + 14$



Problems

(47) $x = 4, x = 8 , y = 6$ এবং $y = 10$ রেখাগুলি দ্বারা উৎপন্ন আয়তক্ষেত্রের কর্ণগুলোর সমীকরণ নির্ণয় কর।

$\therefore BD$ কর্ণের ঢাল, $m_2 = -1$

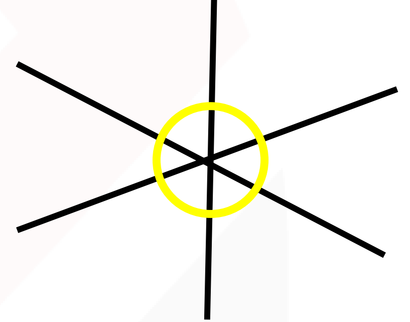
এখন,

$$m_1 \times m_2 = 1 \times (-1) = -1$$

অর্থাৎ, কর্ণ দুটি পরস্পরের উপর লম্ব।

Answer

তিনটি সরলরেখা সমবিন্দু হওয়ার শর্ত



সরলরেখা তিনটি,

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$
$$a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

হলে, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

Problems

(48) $y = x + 1, y = 2x + 2, y = ax + 3$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে $a = ?$

$$x - y + 1 = 0$$

$$2x - y + 2 = 0$$

$$ax - y + 3 = 0$$

রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ a & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow 1(-3 + 2) + 1(6 - 2a) + 1(-2 + a) = 0$$

$$\Longrightarrow -1 + 6 - 2a + -2 + a = 0$$

$$\Longrightarrow 3 - a = 0$$

$$\therefore a = 3$$

Problems

(49) x অক্ষের সমান্তরাল এবং $4x + 3y = 6, x - 2y = 7$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

$$4x + 3y - 6 + k(x - 2y - 7) = 0$$

$$\Longrightarrow 4x + 3y - 6 + kx - 2ky - 7k = 0$$

$$\Longrightarrow x(k + 4) + y(3 - 2k) - 6 - 7k = 0 \ldots \ldots (i)$$

এখন, $k + 4 = 0$ [$\therefore$ x অক্ষের সমান্তরাল রেখায় x এর সহগ 0]

$$\therefore k = -4$$

k এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$y\{3 - 2(-4)\} - 6 - 7(-4) = 0$$

$$\Longrightarrow y(3 + 8) - 6 + 28 = 0$$

$$\Longrightarrow 11y + 22 = 0$$

$$\Longrightarrow y + 2 = 0$$

দুটি সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ

$\angle BAC = \varphi$

$\angle ABX = \theta_1$

$\angle ACX = \theta_2$

(i) $\theta_1 > \theta_2$ হলে,

$$\theta_1 = \theta_2 + \varphi$$

$$\therefore \varphi = \theta_1 - \theta_2$$

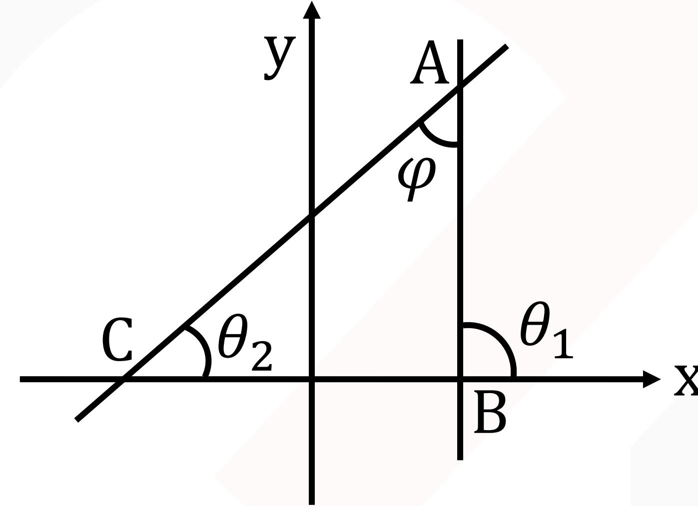
ধরি, AB এর ঢাল $m_1 = \tan\theta_1$

AC এর ঢাল $m_2 = \tan\theta_2$

এখন, $\tan\varphi = \tan(\theta_1 - \theta_2)$

$$= \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 . \tan\theta_2}$$

$$= \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 . m_2} \;\ldots\ldots (i)$$



(ii) $\theta_2 > \theta_1$ হলে,

$$\therefore \varphi = -(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\tan\varphi = -\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 . m_2} \;\ldots\ldots (ii)$$

(i) ও (ii) নং হতে পাই,

$$\tan\varphi = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 . m_2}$$

রেখাদ্বয়ের লম্ব হওয়ার শর্তঃ

$$\theta = 90°$$

$$\Longrightarrow \tan 90° = \infty$$

$$\therefore \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2} = \infty$$

$$\Longrightarrow 1 + m_1.m_2 = 0$$

$$\boxed{\Longrightarrow m_1.m_2 = -1}$$

রেখাদ্বয়ের সমান্তরাল হওয়ার শর্তঃ

$$\theta = 0°$$

$$\Longrightarrow \tan 0° = 0$$

$$\therefore \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2} = 0$$

$$\Longrightarrow m_1 - m_2 = 0$$

$$\boxed{\Longrightarrow m_1 = m_2}$$

একটি সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখা নির্ণয়ের পদ্ধতিঃ

Problems

$$ax + by + c = 0$$
$$ax + by + k = 0$$

(50) এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা (1,2) বিন্দুগামী এবং $3x - 4y + 8 = 0$ রেখার সমান্তরাল।

$3x - 4y + 8 = 0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, $3x - 4y + k = 0$

$$\Rightarrow 3 \times 1 - 4 \times 2 + k = 0$$
$$\Rightarrow k = 8 - 3 = 5$$

$\therefore$ সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, $3x - 4y + 5 = 0$

একটি সরলরেখার লম্বরেখা নির্ণয়ের পদ্ধতিঃ

Problems

$$ax + by + c = 0$$

$$bx - ay + k = 0$$

(51) এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা (1,2) বিন্দুগামী এবং $3x - 4y + 8 = 0$ রেখার লম্ব।

$3x - 4y + 8 = 0$ এর লম্ব রেখার সমীকরণ, $-4x - 3y + k = 0$

$$\Rightarrow -4 \times 1 - 3 \times 2 + k = 0$$

$$\Rightarrow -4 - 6 + k = 0$$

$$\Rightarrow k = 10$$

$\therefore$ লম্ব রেখার সমীকরণ, $-4x - 3y + 10 = 0$

$$\Rightarrow 4x + 3y - 10 = 0$$

Problems

(52) $x - 2y + 1 = 0$ এবং $3x - y + 5 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণ নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রেখা দুটি, $x - 2y + 1 = 0 \dots \dots (i)$

$3x - y + 5 = 0 \dots \dots (ii)$

মনেকরি, (i) ও (ii) রেখা দুটির ঢাল যথাক্রমে m_1 ও m_2

(i) নং থেকে পাই,

$$2y = x + 1$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$\therefore m_1 = \frac{1}{2}$$ [$y = mx + c$ রেখার সাথে তুলনা করে]

(ii) নং থেকে পাই,

$$y = 3x + 5$$

$$\therefore m_2 = 3$$

Problems

(52) $x - 2y + 1 = 0$ এবং $3x - y + 5 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণ নির্ণয় কর।

আমরা জানি, $\tan\theta = \pm\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2}$

$$= \pm\frac{\frac{1}{2} - 3}{1 + \frac{3}{2}}$$

$$= \pm\frac{-5}{5}$$

$$= \pm 1$$

$$\Longrightarrow \tan\theta = \pm\tan 45°$$

$$\therefore \theta = 45°$$

∴ নির্ণেয় সূক্ষ্মকোণের মান 45°

Problems

(53) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা মুলবিন্দু এবং $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ও $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

ধরি, রেখা দুটির ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1+k\left(\frac{x}{b}+\frac{y}{a}-1\right) \ldots\ldots (i)$$

যেহেতু রেখাটি মূলবিন্দুগামী,

$$0+0-1+k(0+0-1)=0$$

$$\Rightarrow -1-k=0$$

$$\Rightarrow k=-1$$

K এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1-\frac{x}{b}+\frac{y}{a}+1=0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a}-\frac{x}{b}+\frac{y}{b}-\frac{y}{a}=0$$

$$\Rightarrow x\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)-y\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=0$$

$$\Rightarrow (x-y)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=0 \quad [a\neq b]$$

$$\Rightarrow x-y=0$$

Problems

(54) AB ও AC রেখা দুটির সমীকরণ যথাক্রমে $y = 2x + 1$ এবং $y = 4x - 1$ হলে, AB এর উপর অঙ্কিত লম্ব AP এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

AB রেখার সমীকরণ, $y = 2x + 1 \;\ldots\ldots (i)$

AC রেখার সমীকরণ, $y = 4x - 1 \;\ldots\ldots (ii)$

(i) ও (ii) নং সমীকরণ সমাধান করে পাই, $A \equiv (1,3)$

AB এর সমীকরণ, $y = 2x + 1$

$\Rightarrow 2x = y - 1$

$\Rightarrow 2x - y + 1 = 0$

AB রেখার লম্ব রেখার সমীকরণ,

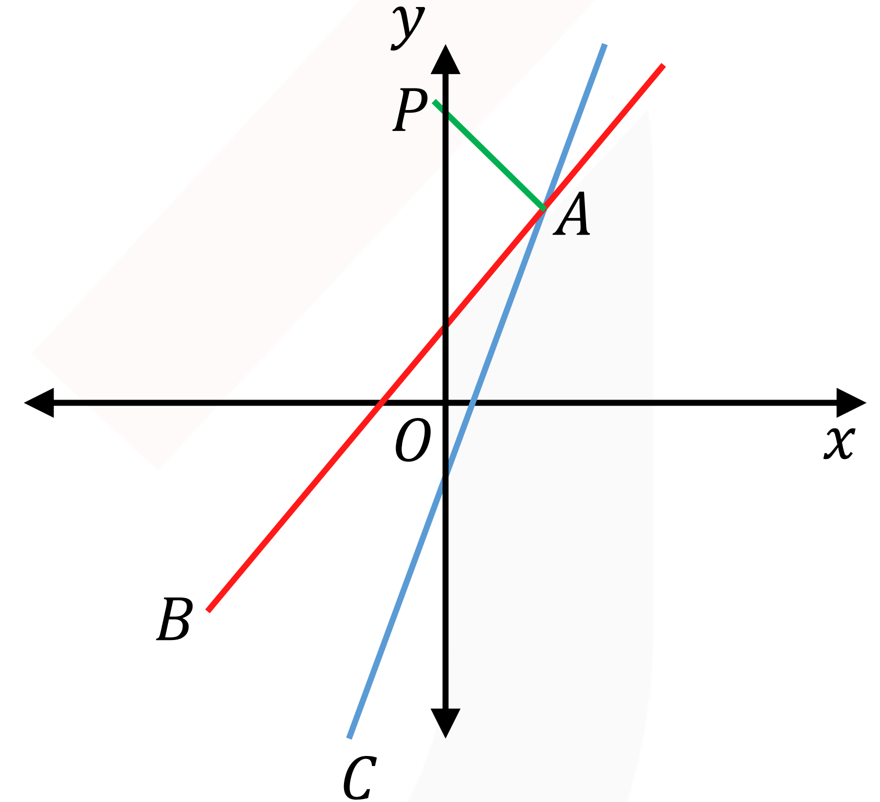
$-x - 2y + k = 0$, যা $(1,3)$ বিন্দুগামী

$\Rightarrow -1 - 2 \times 3 + k = 0$

$\Rightarrow k = 7$

অর্থাৎ, AB রেখার লম্ব রেখার সমীকরণ, $-x - 2y + 7 = 0$

$\Rightarrow x + 2y = 7$



Problems

(55) $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$ রেখার উপর লম্ব এবং প্রদত্ত রেখা ও x অক্ষের ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$$

$$\Rightarrow x.\frac{1}{a}-y.\frac{1}{b}-1=0 \ldots\ldots(i)$$

(i) এর উপর লম্ব রেখার সমীকরণ, $-x.\frac{1}{b}-y.\frac{1}{a}+k=0$ যা $(a,0)$ বিন্দুগামী

অর্থাৎ, $-a.\frac{1}{b}-0.\frac{1}{a}+k=0$

$$\Rightarrow -\frac{a}{b}+k=0$$

$$\therefore k=\frac{a}{b}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $-x.\frac{1}{b}-y.\frac{1}{a}+\frac{a}{b}=0$

$\Rightarrow -ax-by+a^2=0$ [ab দ্বারা গুণ]

$\Rightarrow ax+by-a^2=0$

Problems

(56) দুটি সরলরেখা $(1,3)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x + y = 7$ রেখার সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। তাদের সমীকরণ নির্ণয় কর। দেখাও যে, এরা পরস্পর লম্ব।

মনেকরি, $(1,3)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y - 3 = m(x - 1) \dots \dots (i)$

প্রদত্ত রেখা $2x + y = 7 \Rightarrow y = -2x + 7$ এর ঢাল $= -2$ [$y = mx + c$ এর সাথে তুলনা করে]

(i) রেখাটি প্রদত্তরেখার সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\therefore \tan 45° = \pm \frac{m - (-2)}{1 + m(-2)}$$

$$\Rightarrow 1 = \pm \frac{m - (-2)}{1 + m(-2)}$$

$$\Rightarrow 1 - 2m = \pm(m + 2)$$

$(+)$ চিহ্ন নিয়ে, $1 - 2m = +(m + 2)$

$$\Rightarrow 3m = -1$$

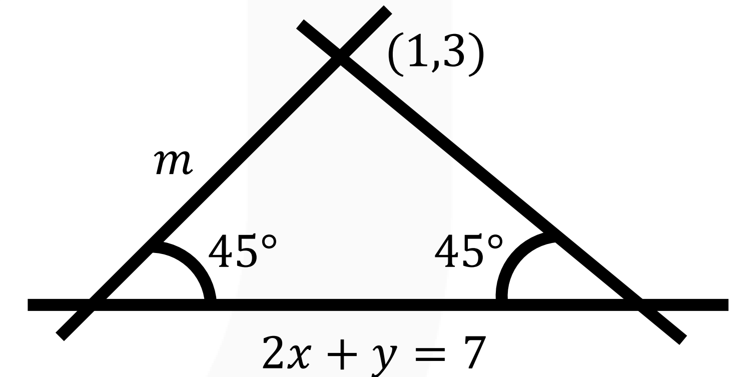
$$\Rightarrow m = -\frac{1}{3}$$

$(-)$ চিহ্ন নিয়ে, $1 - 2m = -(m + 2)$

$$\Rightarrow m = 3$$

এখানে, $m_1 \times m_2 = -\frac{1}{3} \times 3 = -1$

$\therefore$ এরা পরস্পর লম্ব।



Problems

***

(56) দুটি সরলরেখা (1,3) বিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x + y = 7$ রেখার সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। তাদের সমীকরণ নির্ণয় কর। দেখাও যে, এরা পরস্পর লম্ব।

∴ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $y - 3 = -\frac{1}{3}(x - 1)$, যখন $m = -\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow x + 3y = 10$$

এবং, $y - 3 = 3(x - 1)$, যখন $m = 3$

$$\Rightarrow 3x - y = 0$$

Problems

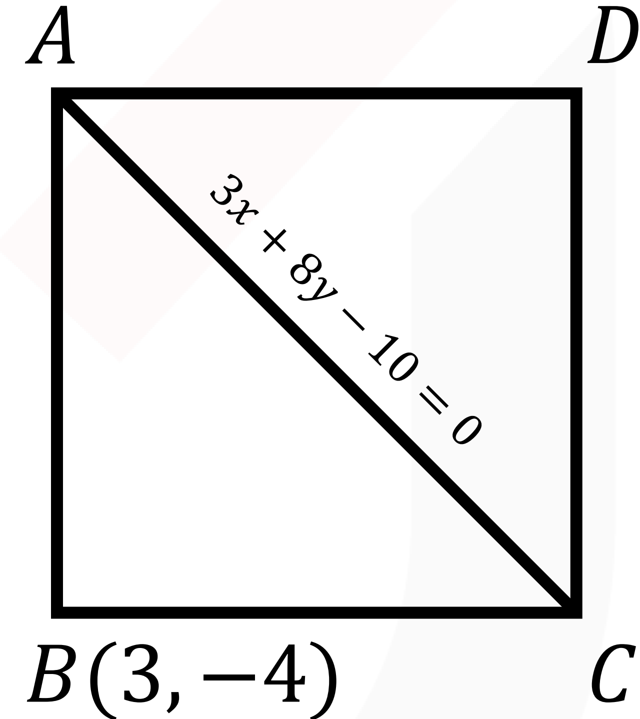
***

(57) $3x + 8y - 10 = 0$ রেখাটি একটি বর্গের কর্ণ নির্দেশ করে এবং বর্গের একটি শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3, -4)$, এ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে বর্গের বাহু দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

ধরি, বর্গের চারটি শীর্ষ বিন্দু যথাক্রমে, A, B, C, D

AC কর্ণের সমীকরণ, $3x + 8y - 10 = 0$

এবং, B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3, -4)$



$(3, -4)$ বিন্দুটি কর্ণের সমীকরণটিতে বসিয়ে পাই,

$$3 \times 3 + 8 \times (-4) - 10$$

$$= 9 - 32 - 10 \neq 0$$

অর্থাৎ, কর্ণটি $(3, -4)$ বিন্দুগামী হতে পারে না।

কর্ণের সমীকরণ, $3x + 8y - 10 = 0$

$$\Rightarrow 8y = -3x + 10$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{8}x + \frac{10}{8}$$

$y = mx + c$, এর সাথে তুলনা করে, কর্ণের ঢাল $m_1 = -\frac{3}{8}$

Problems

(57) $3x + 8y - 10 = 0$ রেখাটি একটি বর্গের কর্ণ নির্দেশ করে এবং বর্গের একটি শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3, -4)$, এ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে বর্গের বাহু দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

আমরা জানি, $\tan\theta = \pm\frac{m - m_1}{1 + m.m_1}$

$$\Rightarrow \tan 45° = \pm\frac{m + \frac{3}{8}}{1 + \left(\frac{-3m}{8}\right)}$$

$$\Rightarrow 1 = \pm\frac{m + \frac{3}{8}}{1 - \frac{3m}{8}}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{3m}{8} = \pm\left(m + \frac{3}{8}\right)$$

(+) চিহ্ন দিয়ে, $1 - \frac{3m}{8} = \left(m + \frac{3}{8}\right)$

$$\Rightarrow 1 - \frac{3}{8} = \frac{3m}{8} + m = \frac{11m}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{8} = \frac{11m}{8}$$

$$\therefore m = \frac{5}{11}$$

(−) চিহ্ন দিয়ে, $1 - \frac{3m}{8} = -m - \frac{3}{8}$

$$\Rightarrow 1 + \frac{3}{8} = -m + \frac{3m}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{-5m}{8} = \frac{11}{8}$$

$$\therefore m = -\frac{11}{5}$$

Problems

(57) $3x + 8y - 10 = 0$ রেখাটি একটি বর্গের কর্ণ নির্দেশ করে এবং বর্গের একটি শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3, -4)$, এ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে বর্গের বাহু দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

$\frac{5}{11}$ ঢালবিশিষ্ট এবং $(3, -4)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$$y - (-4) = \frac{5}{11}(x - 3)$$

$$\Rightarrow y + 4 = \frac{5}{11}(x - 3)$$

$$\Rightarrow 11y + 44 = 5x - 15$$

$$\Rightarrow 5x - 11y - 59 = 0$$

$\frac{-11}{5}$ ঢালবিশিষ্ট এবং $(3, -4)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$$y - (-4) = \frac{-11}{5}(x - 3)$$

$$\Rightarrow y + 4 = \frac{-11}{5}(x - 3)$$

$$\Rightarrow 5y + 20 = -11x + 33$$

$$\Rightarrow 11x + 5y - 13 = 0$$

Problems

(58) মূলবিন্দু এবং (x_1, y_1) বিন্দুর সংযোগ সরলরেখা যদি $(b, 0)$ এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার উপর লম্ব হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $x_1x_2 + y_1y_2 = bx_1$ ।

ধরি, $O(0,0), A(x_1, y_1)$

OA রেখার ঢাল, $m_1 = \frac{y_1 - 0}{x_1 - 0} = \frac{y_1}{x_1}$

আবার, $B(b, 0), C(x_2, y_2)$

BC রেখার ঢাল, $m_2 = \frac{y_2 - 0}{x_2 - b} = \frac{y_2}{x_2 - b}$

যেহেতু প্রথম রেখাটি ২য় রেখাটির উপর লম্ব তাই, $m_1 \times m_2 = -1$

$$\Rightarrow \frac{y_2}{x_2 - b} \times \frac{y_1}{x_1} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{y_2y_1}{x_2x_1 - x_1b} = -1$$

$$\Rightarrow y_2y_1 = (x_2x_1 - x_1b)(-1)$$

$$\Rightarrow y_2y_1 = -x_2x_1 + x_1b$$

$$\therefore x_1x_2 + y_1y_2 = bx_1$$

Problems

(59) (2,3) বিন্দু হতে $4x + 3y - 7 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে বিন্দুটি থেকে সরলরেখার লম্ব-দূরত্ব নির্ণয় কর।

দেয়া আছে,

একটি সরলরেখার সমীকরণ $4x + 3y - 7 = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

$4x + 3y - 7 = 0$ রেখার ওপর লম্ব রেখার সমীকরণ,

$3x - 4y + k = 0$, যা $(2,3)$ বিন্দু দিয়ে যায়।

$\Rightarrow 3 \times 2 - 4 \times 3 + k = 0$

$\Rightarrow 6 - 12 + k = 0$

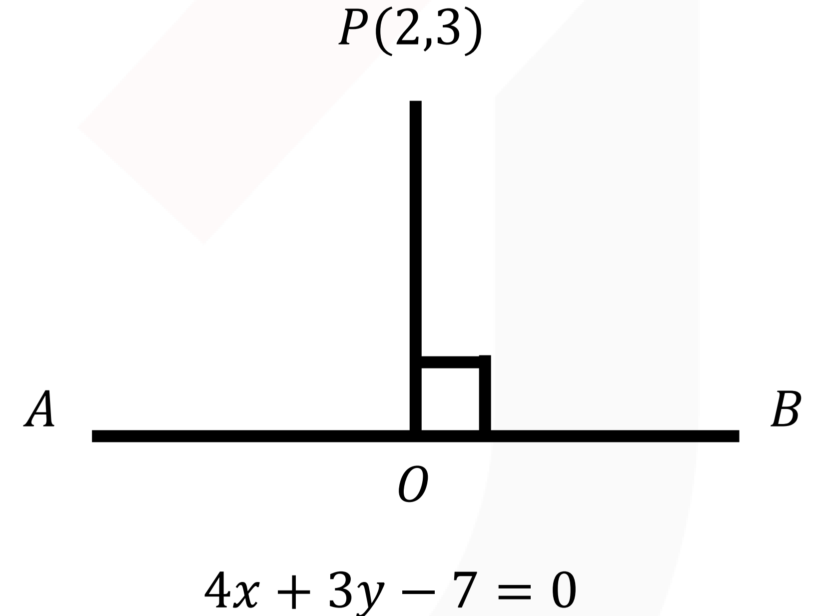
$\therefore k = 6$

$\therefore$ লম্ব রেখার সমীকরণ $3x - 4y + 6 = 0 \ldots\ldots (ii)$

ধরি, রেখা দুটির ছেদ বিন্দু $O(x, y)$

(i) ও (ii) সমাধান করে পাই,

$$x = \frac{2}{5}, y = \frac{9}{5}$$



Problems

(59) (2,3) বিন্দু হতে $4x + 3y - 7 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে বিন্দুটি থেকে সরলরেখার লম্ব-দূরত্ব নির্ণয় কর।

$\therefore O$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right)$

$\therefore$ (2,3) বিন্দু হতে সরলরেখাটির লম্ব দূরত্ব $= \sqrt{\left(2 - \frac{2}{5}\right)^2 + \left(3 - \frac{9}{5}\right)^2}$

$$= \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{100}{25}}$$

$$= \frac{10}{5}$$

$= 2$ একক

Problems

(60) দেখাও যে, $x = t, y = 2t + 1$, এবং $x = 2t, y = -t - 4$ রেখা দুটি $(-2, -3)$ বিন্দুতে পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করে।

$$x = t, \quad y = 2t + 1$$

$$\Rightarrow y = 2x + 1 \dots \dots (i)$$

(i) নং রেখার ঢাল, $m_1 = 2$

আবার, $x = 2t, \quad y = -t - 4$

$$\Rightarrow t = \frac{x}{2}, \quad \Rightarrow y = -\frac{x}{2} - 4$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - 4 \dots \dots (ii)$$

$$\Rightarrow x + 2y + 8 = 0$$

(ii) নং রেখার ঢাল, $m_2 = -\frac{1}{2}$

এখন,

$$m_1 \times m_2 = 2 \times -\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

$\therefore$ রেখাদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে।

Problems

(60) দেখাও যে, $x = t, y = 2t + 1$, এবং $x = 2t, y = -\mathrm{t} - 4$ রেখা দুটি $(-2, -3)$ বিন্দুতে পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করে।

এখন, $y = 2x + 1$ এবং $x + 2y + 8 = 0$ রেখাদ্বয়কে সমাধান করে পাই,

$$x + 2y + 8 = 0$$

$$\Longrightarrow x + 2(2x + 1) + 8 = 0$$

$$\Longrightarrow x + 4x + 2 + 8 = 0$$

$$\Longrightarrow 5x = -10$$

$$\therefore x = -2$$

$$\therefore y = 2 \times (-2) + 1 = -3$$

অর্থাৎ, এদের ছেদবিন্দু $(-2, -3)$

$\therefore$ রেখাদ্বয় পরস্পরকে $(-2, -3)$ বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করে।

Problems

(61) $ax + by + c = 0, bx + cy + a = 0$ এবং $cx + ay + b = 0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে, প্রমাণ কর যে, $a + b + c = 0$।

দেয়া আছে,

$$ax + by + c = 0 \ldots\ldots (i)$$

$$bx + cy + a = 0 \ldots\ldots (ii)$$

$$cx + ay + b = 0 \ldots\ldots (iii)$$

$(i), (ii)$ এবং (iii) রেখা সমবিন্দু হলে, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ b+c+a & c & a \\ c+a+b & a & b \end{vmatrix} = 0 \qquad [C_1' = C_1 + C_2 + C_3]$$

$$\Rightarrow (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = 0 \qquad [r_1' = r_1 - r_2]$$

Problems

(61) $ax+by+c=0, bx+cy+a=0$ এবং $cx+ay+b=0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে, প্রমাণ কর যে, $a+b+c=0$ ।

$$\Rightarrow (a+b+c)\begin{vmatrix}0 & b-c & c-a\\ 0 & c-a & a-b\\ 1 & a & b\end{vmatrix}=0 \qquad [r_2'=r_2-r_3]$$

$$\Rightarrow (a+b+c)\{(b-c)(a-b)-(c-a)^2\}=0$$

$$\Rightarrow (a+b+c)(ab-b^2-ca+bc-c^2+2ca-a^2)=0$$

$$\Rightarrow (a+b+c)(-2)(ab-b^2-ca+bc-c^2+2ca-a^2)=0\times(-2)$$

$$\Rightarrow (a+b+c)(-2ab+2b^2+2ca-2bc+2c^2-4ca+2a^2)=0$$

$$\Rightarrow (a+b+c)\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ac+a^2)\}=0$$

$$\Rightarrow (a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$$

যেহেতু, $a\neq b\neq c$

$$\therefore (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$$

$$\therefore a+b+c=0$$

Problems

(62) x অক্ষের সমান্তরাল এবং $4x + 3y - 6 = 0$ ও $x - 2y - 7 = 0$ রেখাদ্বয়ের সমবিন্দু রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

x অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $y = b$

দেওয়া আছে, $4x + 3y - 6 = 0 \dots\dots (i)$

$x - 2y - 7 = 0 \dots\dots (ii)$

(i) ও (ii) নং রেখার ছেদবিন্দুগামী রেখা $y = b$

এখন, (i) ও (ii) নং রেখা সমাধান করে পাই, $x = 3,\ y = -2$

আবার, $y = b$ হতে পাই, $b = -2$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখা, $y = -2$

$\therefore y + 2 = 0$

Problems

(63) দুটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যাদের অক্ষদ্বয়ের ছেদক অংশের সংখ্যামান সমান এবং যারা $2x + 3y - 1 = 0$ ও $x - 2y + 3 = 0$ রেখা দুটির সাথে সমবিন্দু।

ধরি, রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$\Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1 \ [a = b]$ [সাংখিক মান সমান বলা থাকলে ($\pm$) হবে।]

$\Rightarrow x \pm y = a \ldots\ldots\ldots (i)$

এখন, $2x + 3y - 1 = 0$ এবং $x - 2y + 3 = 0$ রেখাদ্বয়ের সমীকরণ সমাধান করে এদের ছেদবিন্দু পাই $(-1,1)$

যেহেতু (i) নং রেখাটি এদের সমবিন্দু তাই (i) নং রেখাটি $(-1,1)$ বিন্দুগামী।

এখন,

(+) চিহ্ন নিয়ে,

$x + y = a$

$\Rightarrow -1 + 1 = a$

$\therefore a = 0$

(−) চিহ্ন নিয়ে,

$x - y = a$

$\Rightarrow -1 - 1 = a$

$\therefore a = -2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x + y = 0$ এবং $x - y + 2 = 0$

Problems

(64) সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $4x - 3y = 1$ ও $2x - 5y = -3$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং অক্ষদ্বয়ের সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে।

$4x - 3y = 1$ এবং $2x - 5y = -3$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $(1,1)$

ধরি, $(1,1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ, $y - 1 = m(x - 1) \dots\dots (i)$

শর্তানুসারে, $m = \tan(\pm 45)$ [অক্ষদ্বয়ের সাথে সমান কোণ উৎপন্ন করে]

$\therefore m = \pm 1$

(i) নং থেকে পাই,

$$y - 1 = \pm 1(x - 1)$$

(+) চিহ্ন নিয়ে, $y - 1 = x - 1$

$\Rightarrow x - y = 0$

(−) চিহ্ন নিয়ে, $y - 1 = 1 - x$

$\Rightarrow x + y - 2 = 0$

$\Rightarrow x + y = 2$

Problems

(65) P বিন্দুটি $x - 3y = 2$ রেখা উপর অবস্থিত এবং তা $(2,3), (6, -5)$ বিন্দু দুটি হতে সমদূরবর্তী। P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

ধরি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1), যা $x - 3y = 2$ রেখার উপর অবস্থিত।

$\therefore x_1 - 3y_1 = 2 \ldots \ldots (i)$

আবার ধরি, $A \equiv (2,3)$ এবং $B = (6, -5)$

প্রশ্নমতে, $AP = BP \Rightarrow AP^2 = BP^2$

$$\Rightarrow (2 - x_1)^2 + (3 - y_1)^2 = (6 - x_1)^2 + (-5 - y_1)^2$$

$$\Rightarrow 4 - 4x_1 + x_1^2 + 9 - 6y_1 + y_1^2 = 36 - 12x_1 + x_1^2 + 25 + 10y_1 + y_1^2$$

$$\Rightarrow 8x_1 - 16y_1 - 48 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 - 2y_1 - 6 = 0 \ldots \ldots (ii)$$

(i) ও (ii) নং সমীকরণ সমাধান করে পাই,

$$x_1 = 14, y_1 = 4$$

$\therefore P$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(14,4)$

Problems

(66) $ABCD$ সামান্তরিকের AB ও BC বাহুদ্বয়ের সমীকরণ যথাক্রমে $2x + y - 8 = 0$ ও $x - y + 2 = 0$ এবং D বিন্দুর স্থানাংক $(2, -4)$; অপর বাহুদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

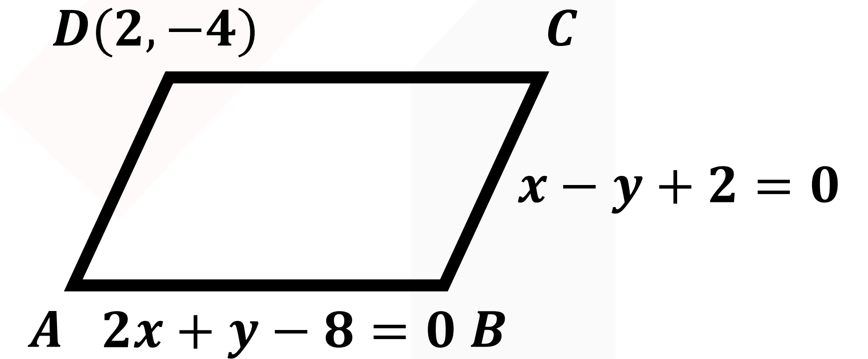
এখানে, CD রেখা AB রেখার সমান্তরাল।

AB রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, $2x + y + k = 0$, যা $(2, -4)$ বিন্দুগামী।

$$\Rightarrow 2 \times 2 + (-4) + k = 0$$

$$\Rightarrow 4 - 4 + k = 0$$

$$\therefore k = 0$$



$\therefore$ CD রেখার সমীকরণ, $2x + y = 0$

আবার, BC এর সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, $x - y + k = 0$, যা $(2, -4)$ বিন্দুগামী

$$\Rightarrow k = -6$$

$\therefore$ AD রেখার সমীকরণ, $x - y = 6$

দুটি অসমান্তরাল রেখার অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখন্ডক সমীকরণ

AB রেখার সমীকরণ, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

CD রেখার সমীকরণ, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

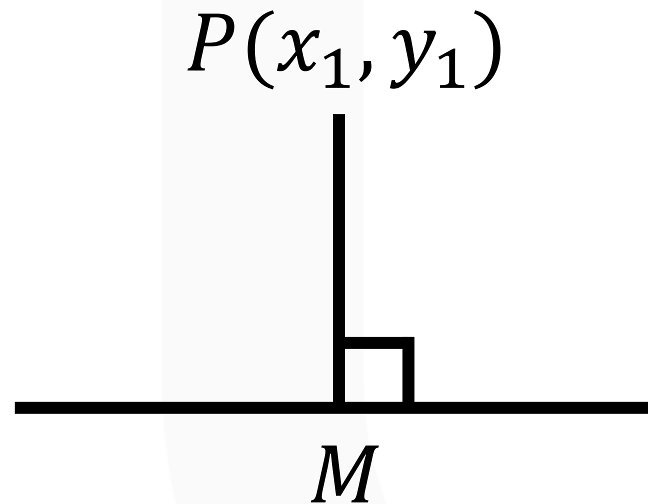
চিহ্নের উপর ভিত্তি করে সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডক ও স্থুলকোণের সমদ্বিখন্ডক চিহ্নিত করা হয়।

(i) যদি $a_1a_2 + b_1b_2 > 0$ হয়, তবে $(+)$ চিহ্ন নিয়ে স্থূল কোণের সমদ্বিখন্ডক ও $(-)$ চিহ্ন নিলে সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডক পাওয়া যাবে।

(ii) যদি $a_1a_2 + b_1b_2 < 0$ হয়, তবে $(-)$ চিহ্ন নিয়ে স্থূল কোণের সমদ্বিখন্ডক ও $(+)$ চিহ্ন নিলে সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডক পাওয়া যাবে।

$P(x_1, y_1)$ বিন্দু থেকে $ax + bx + c = 0$ সরলরেখার লম্ব দূরত্ব

$$PM = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Problems

(67) $(3, -2)$ বিন্দু থেকে $12x - 5y + 6 = 0$ রেখার অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য কত?

$$\text{লম্ব দূরত্ব} = \frac{|12\times3-5(-2)+6|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}$$

$$= \frac{52}{13}$$

$$= 4 \text{ একক}$$

দুটি সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব

$$PM = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Problems

(68) $4x - 3y + 2 = 0$ এবং $8x - 6y - 9 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দুরত্ব কত?

১ম রেখা,

$$4x - 3y + 2 = 0$$

২য় রেখা,

$$8x - 6y - 9 = 0$$

$$\Rightarrow 4x - 3y - \frac{9}{2} = 0$$

দূরত্ব $= \frac{\left|-\frac{9}{2}-2\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}$

$= \frac{13}{10}$ একক

মূলবিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ

1. $$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = +\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

[যদি c_1 ও c_2 একই চিহ্ন বিশিষ্ট হয়]

2. $$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = -\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

[যদি c_1 ও c_2 বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হয়]

Problems

(69) $(\sqrt{3},1)$ বিন্দু হতে $\sqrt{3}x - y + 8 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর এবং ঐ লম্ব x অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

$P(\sqrt{3},1)$হতে AB এর উপর অংকিত লম্বের দৈর্ঘ্য, $PD = \frac{3-1+8}{\sqrt{3+1}} = 5$

এখন, $\sqrt{3}\,x - y + 8 = 0$

$\Rightarrow y = \sqrt{3}\,x + 8$ রেখার ঢাল $\mathrm{m}_1 = \sqrt{3}$

ধরি, এর উপর লম্বের ঢাল $= m_2$

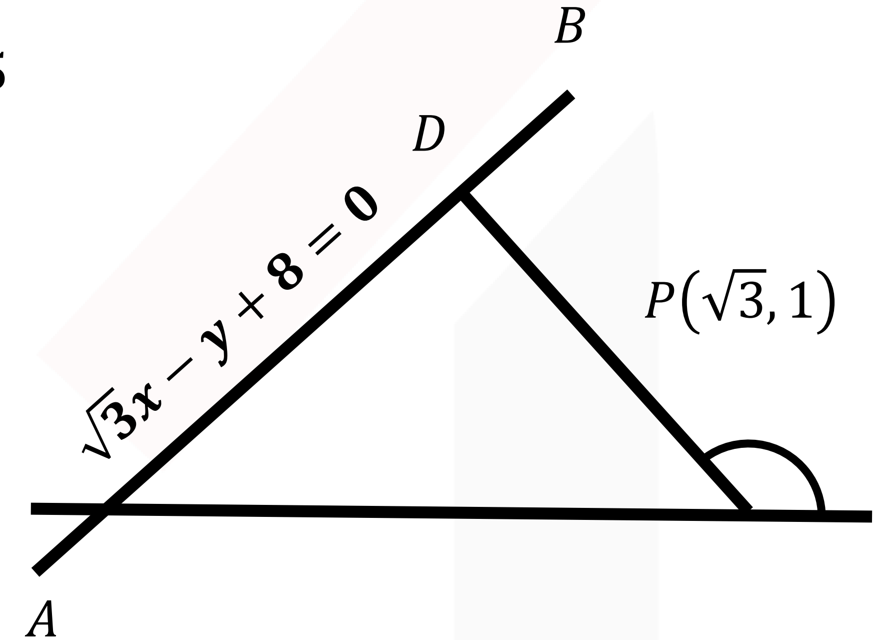
$$\Rightarrow m_2\sqrt{3} = -1$$

$$\therefore m_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

এই লম্ব x অক্ষের সাথে θ কোণ তৈরি করলে

$$m_2 = \tan\theta$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \therefore \theta = 150^\circ$$



DOWNLOAD THE APP

Problems

10 MINUTE SCHOOL

(70) $4x - 3y = 8$ রেখার সমান্তরাল এবং তা হতে 2 একক দূরে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

$4x - 3y = 8$ রেখার সমান্তরাল যেকোনো রেখার সমীকরণ $4x - 3y + K = 0$

রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \frac{|-K-8|}{\sqrt{4^2+3^2}}$

$= \frac{|8+K|}{5}$

প্রশ্নমতে, $\frac{|8+K|}{5} = 2$

$\Rightarrow 8 + K = \pm 10$

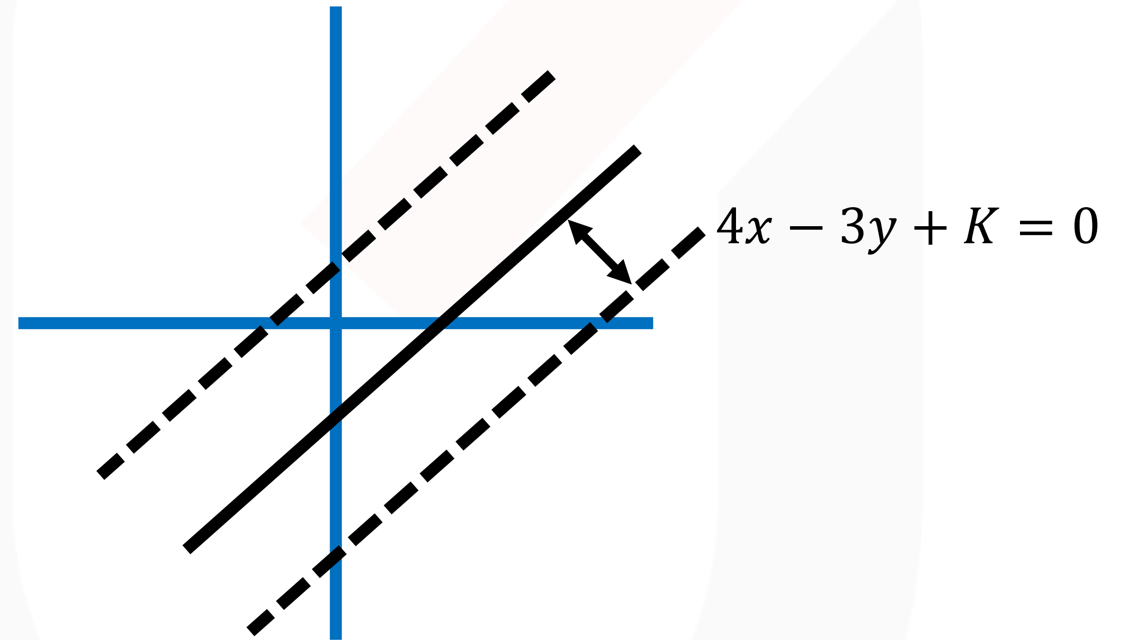
$\Rightarrow K = \pm 10 - 8$

(+) নিয়ে, $K = 2$

(−) নিয়ে, $K = -18$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $4x - 3y + 2 = 0$

$4x - 3y - 18 = 0$



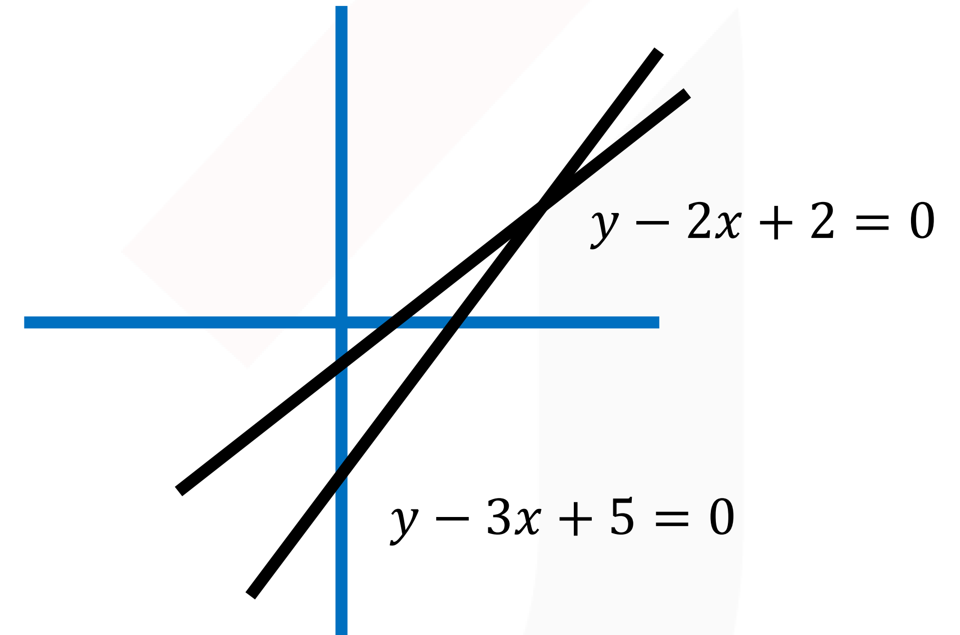
Problems

(71) $y - 2x + 2 = 0$ ও $y - 3x + 5 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং মূলবিন্দু হতে যার দূরত্ব $\frac{7}{\sqrt{2}}$ একক এরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

রেখাদ্বয়, $y - 2x + 2 = 0 \ldots\ldots\ldots..(i)$

$y - 3x + 5 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$

$(i),(ii)$ সমাধান করে পাই, $(x, y) = (3,4)$



$(3,4)$ বিন্দুগামী, m ঢালবিশিষ্ট যেকোনো সরলরেখার সমীকরণ,

$$y - 4 = m(x - 3)$$

$$\Rightarrow y - 4 = mx - 3m$$

$$\Rightarrow mx - y - 3m + 4 = 0$$

$$\Rightarrow mx - y + (4 - 3m) = 0 \ldots\ldots(iii)$$

Problems

(71) $y-2x+2=0$ ও $y-3x+5=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং মূলবিন্দু হতে যার দূরত্ব $\frac{7}{\sqrt{2}}$ একক এরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(0,0) হতে (iii) এর লম্ব দূরত্ব $=\frac{|4-3m|}{\sqrt{1+m^2}}$ [(iii) নং $(x,y)=(0,0)$ বসিয়ে]

প্রশ্নমতে, $\frac{|4-3m|}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{7}{\sqrt{2}} \implies \frac{(4-3m)^2}{1+m^2}=\frac{49}{2}$

$\implies 49+49m^2=2(16-24m+9m^2)$

$\implies 31m^2+48m=17=0$

$\implies (m+1)(31m+17)=0$

$\implies m=-1,-\frac{17}{31}$

সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ,

$y-4=-(x-3)$

$\implies x+y-7=0$

এবং, $y-4=-\frac{17}{31}(x-3)$

$\implies 17x+31y=175$

Problems

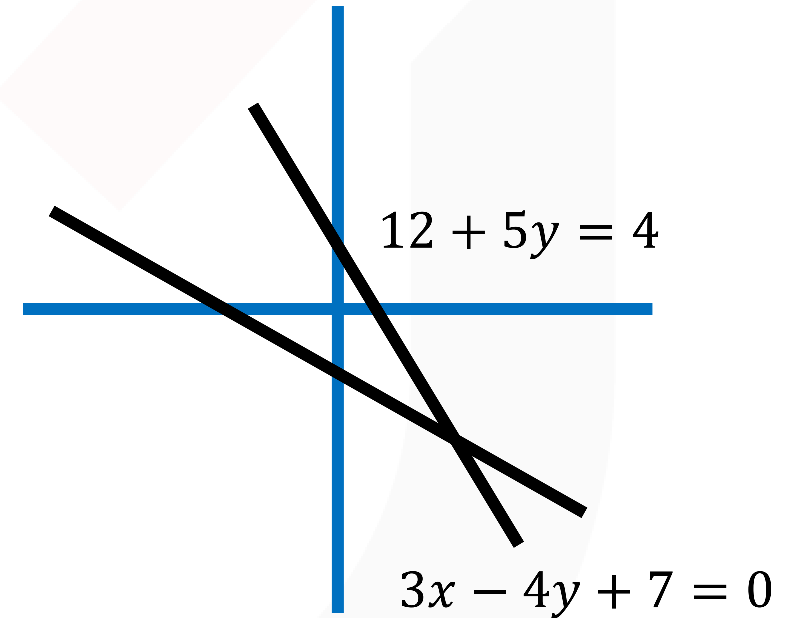
(72) $12x + 5y = 4$ ও $3x + 4y + 7 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণসমূহের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। এদের মধ্যে কোনটি মূলবিন্দু অন্তর্ধারী কোণের সমদ্বিখন্ডক?

$3x + 4y + 7 = 0$ এবং $12x + 5y = 4$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখন্ডকদ্বয়ের সমীকরণ,

$$\frac{3x + 4y + 7}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \pm \frac{12x + 5y - 4}{\sqrt{12^2 + 5^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{3x + 4y + 7}{5} = \pm \frac{12x + 5y - 4}{13}$$

$$\Rightarrow 39x + 52y - 91 = \pm(60x + 25y - 20)$$



Problems

(72) $12x + 5y = 4$ ও $3x + 4y + 7 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণসমূহের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। এদের মধ্যে কোনটি মূলবিন্দু অন্তর্ধারী কোণের সমদ্বিখন্ডক?

$(+)ve$ চিহ্ন নিয়ে,

$$39x + 52y - 91 = +(60x + 25y - 20)$$

$$\Longrightarrow 21x - 27y + 71 = 0$$

$(-)ve$ চিহ্ন নিয়ে,

$$39x + 52y - 91 = -(60x + 25y - 20)$$

$$\Longrightarrow 39x + 52y - 91 = -60x - 25y + 20$$

$$\Longrightarrow 99x + 77y - 111 = 0$$

$\because$ সমীকরণদ্বয়ের ধ্রুবক পদদ্বয় বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট

$\therefore$ $(-)ve$ চিহ্ন নিয়ে মূলবিন্দু অন্তর্ধারী কোণের সমদ্বিখন্ডক পাওয়া যাবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $99x + 77y - 111 = 0$

Problems

(73) দুটি সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখন্ডকের একটির সমীকরণ $x - 3y + 1 = 0$, যদি সরলরেখাদ্বয়ের একটির সমীকরণ $x - y + 1 = 0$ হয় তবে অপর সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

$x - 3y + 1 = 0 \ldots\ldots\ldots(i)$

$x - y + 1 = 0 \ldots\ldots\ldots(ii)$

সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $(x, y) \equiv (-1,0)$

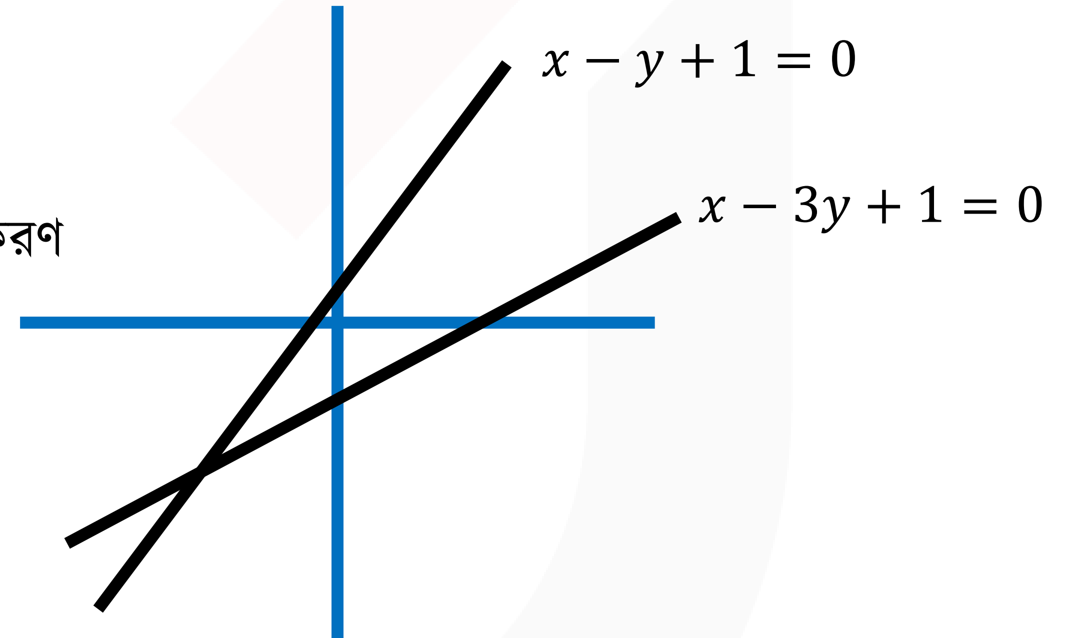
$\because$ অপর সমদ্বিখন্ডক $x - 3y + 1 = 0$ এর উপর লম্ব তাই এর সমীকরণ

$3x + y + K = 0$ যা, $(-1,0)$ বিন্দুগামী।

$\therefore -3 + 0 + K = 0$

$\Rightarrow K = 3$

$\therefore$ সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ $3x + y + 3 = 0$



Problems

(74) $3x - 4y = 2$ এবং $4x - 3y + 1 = 0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোনের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ, $\frac{3x - 4y - 2}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \pm \frac{4x - 3y + 1}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$

$$\Rightarrow 3x - 4y - 2 = \pm(4x - 3y + 1)$$

এখন, $a_1a_2 + b_1b_2 = 4 \times 3 + 4 \times 3 = 24 > 0$

$\therefore$ $(-)ve$ চিহ্ন নিয়ে সমাধানকৃত সমীকরণটি সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ হবে।

$$3x - 4y - 2 = -(4x - 3y + 1)$$

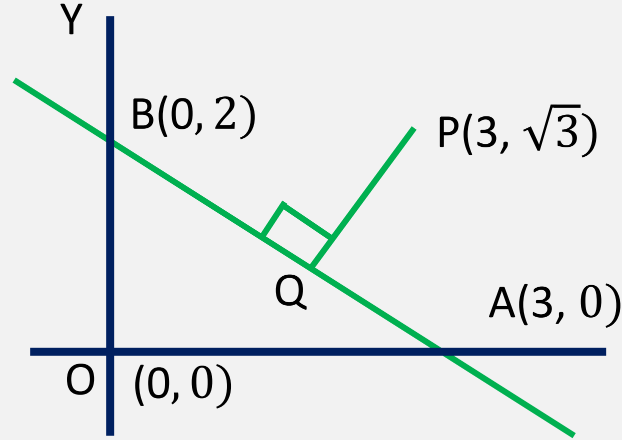
$$\Rightarrow 3x - 4y - 2 + 4x - 3y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 7x - 7y - 1 = 0$$

$\therefore$ সমাধান $\mathbf{7x - 7y - 1 = 0}$

CQ

Question-1



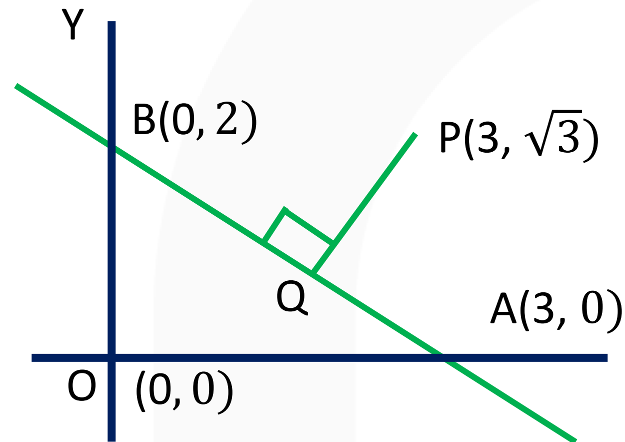
[ঢাকা বোর্ড '১৯]

(ক) P বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

(খ) $AQ:QB = 2:3$ হলে ΔPQB এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

(গ) PA এবং AB সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় করো।

Solution



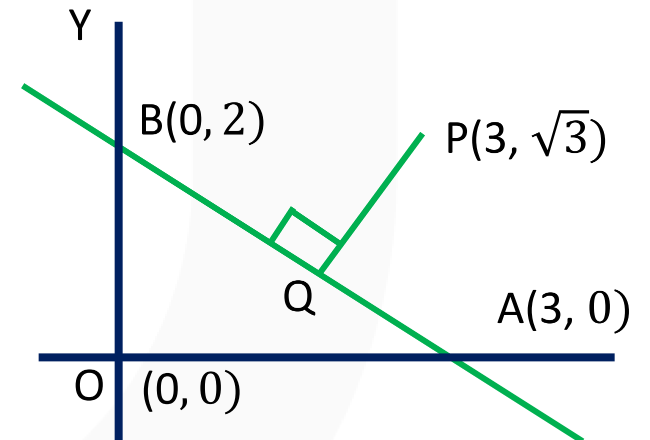
(ক) P বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

মনে করি, $P(3, \sqrt{3})$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ)

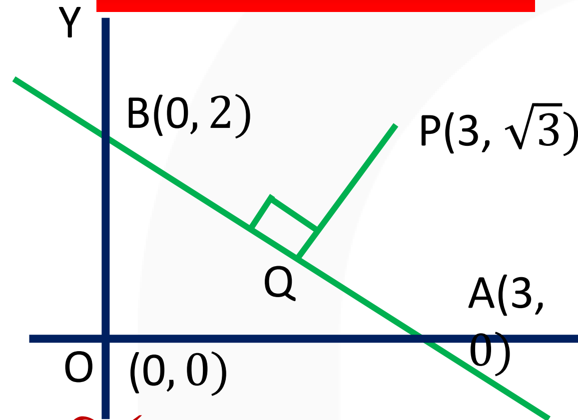
$\therefore r = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$

এবং $tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ বা, $tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\therefore \theta = tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30°$

$\therefore$ **পোলার স্থানাঙ্ক $(2\sqrt{3}, 30°)$ *Ans***



Solution



(খ) $AQ:QB = 2:3$ হলে ΔPQB এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

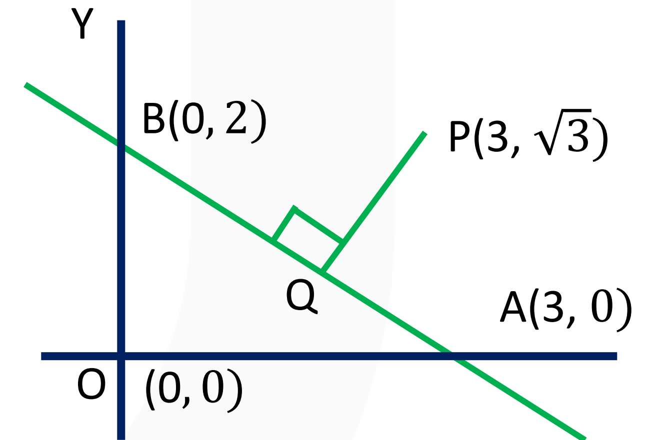
মনে করি, Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) এবং $AQ:QB = 2:3$

$\therefore x = \frac{2\times0+3\times3}{2+3}$ এবং $y = \frac{2\times2+3\times0}{2+3} = \frac{4}{5}$

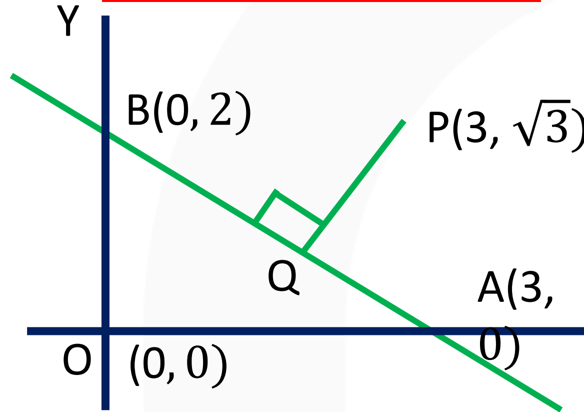
$\therefore Q$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{9}{5}, \frac{4}{5}\right)$

ΔPQB এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 0 & \frac{9}{5} & 3 \\ \sqrt{3} & 2 & \frac{4}{5} & \sqrt{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left\{\left(6+0+\frac{9\sqrt{3}}{5}\right) - \left(\frac{18}{5}+\frac{12}{5}\right)\right\}$

$= \frac{1}{2}.\frac{30+9\sqrt{3}-18-12}{5} = \frac{9\sqrt{3}}{10}$ বর্গ একক। $\quad (\boldsymbol{Ans})$



Solution



(গ) PA এবং AB সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় করো।

PA রেখার সমীকরণ, $\frac{x-3}{3-3} = \frac{y-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-0}$

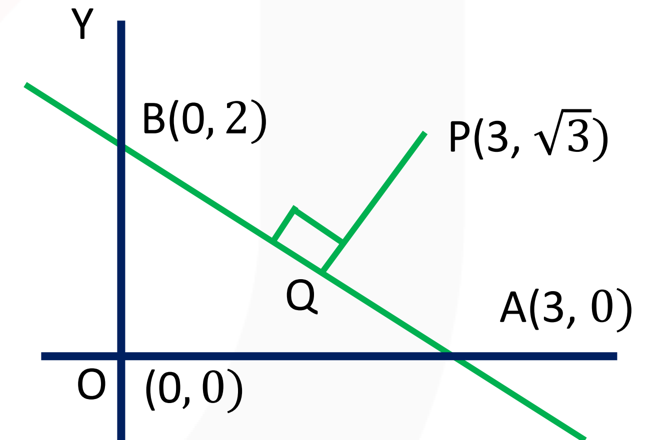
বা, $\frac{x-3}{0} = \frac{y-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$\therefore x - 3 = 0$

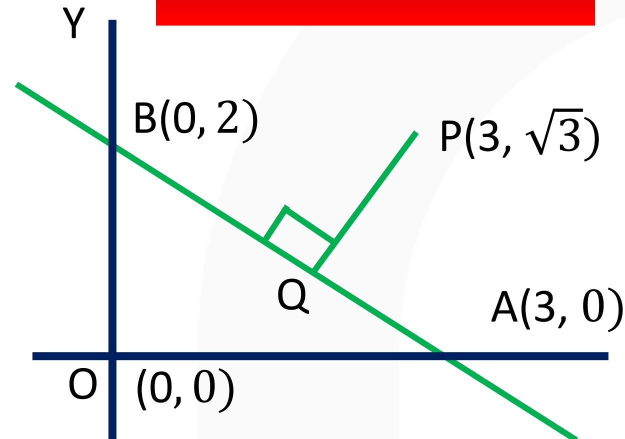
AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

বা, $\frac{2x+3y}{6} = 1$

$\therefore 2x + 3y - 6 = 0$



Solution



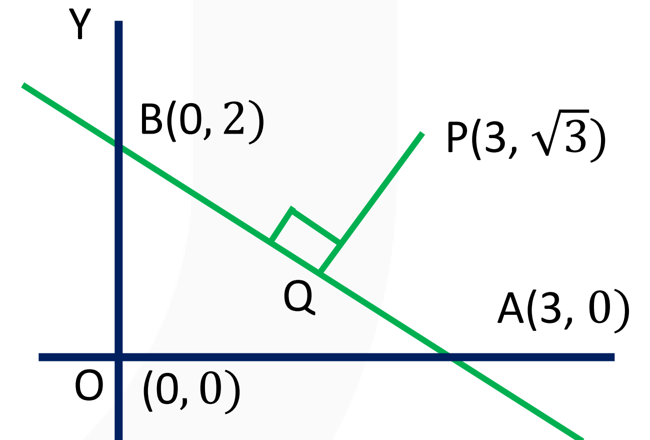
(গ) PA এবং AB সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় করো।

PA ও AB সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ,

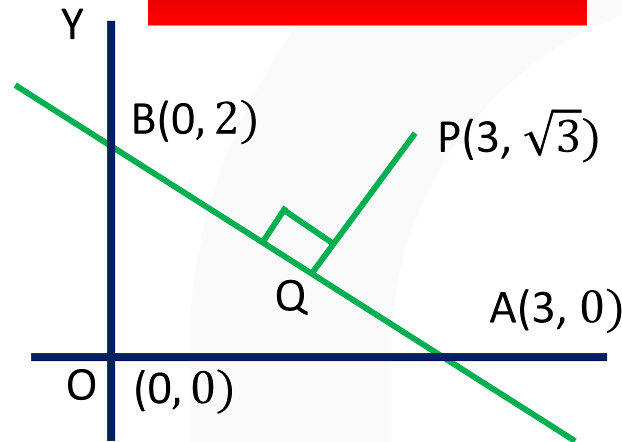
$$\frac{2x+3y-6}{\sqrt{(2)^2+(3)^2}} = \pm\frac{x-3}{\sqrt{(1)^2}}$$

বা, $\frac{2x+3y-6}{\sqrt{4+9}} = \pm(x-3)$

$\therefore 2x+3y-6 = \pm\sqrt{13}(x-3)$



Solution



(গ) PA এবং AB সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় করো।

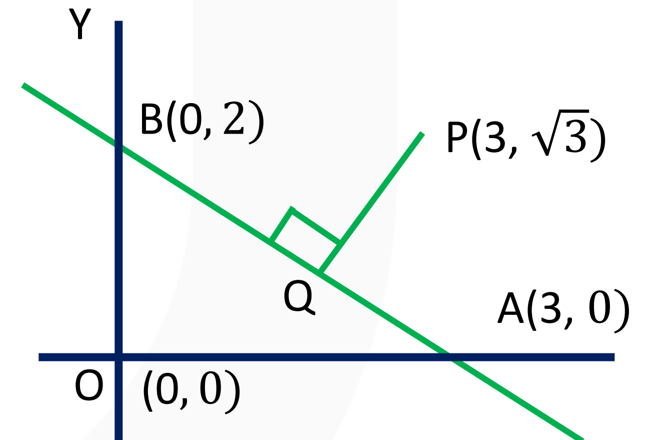
$' + ve'$ নিয়ে $2x + 3y - 6 = \sqrt{13}x - 3\sqrt{13}$

$\therefore (2 - \sqrt{13})x + 3y + 3\sqrt{13} - 6 = 0$ $\quad (\boldsymbol{Ans})$

$' - ve'$ নিয়ে $2x + 3y - 6 = -\sqrt{13}(x - 3)$

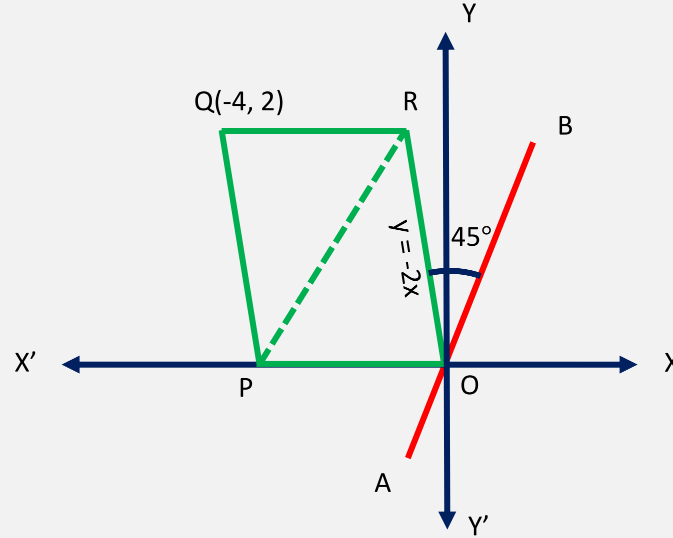
বা, $2x + 3y - 6 + \sqrt{13}x - 3\sqrt{13} = 0$

$\therefore (2 + \sqrt{13})x + 3y - 6 - 3\sqrt{13} = 0$ $\quad (\boldsymbol{Ans})$



CQ

Question–2



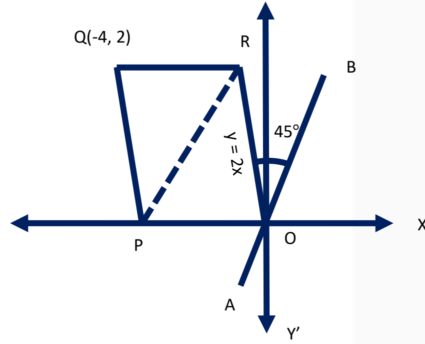
[দিনাজপুর বোর্ড '১৯]

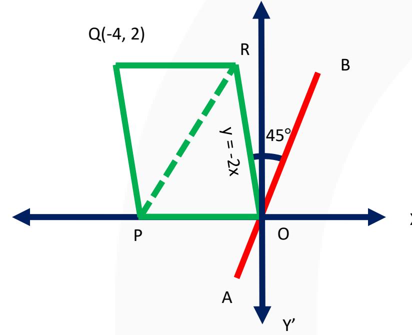
চিত্রে $OPQR$ একটি সামন্তরিক।

(ক) উদ্দীপক হতে AB সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

(খ) উদ্দীপক হতে PR কর্ণের সমীকরণ নির্ণয় করো।

Solution





(ক) উদ্দীপক হতে AB সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

OR রেখার সমীকরণ, $y = -2x$

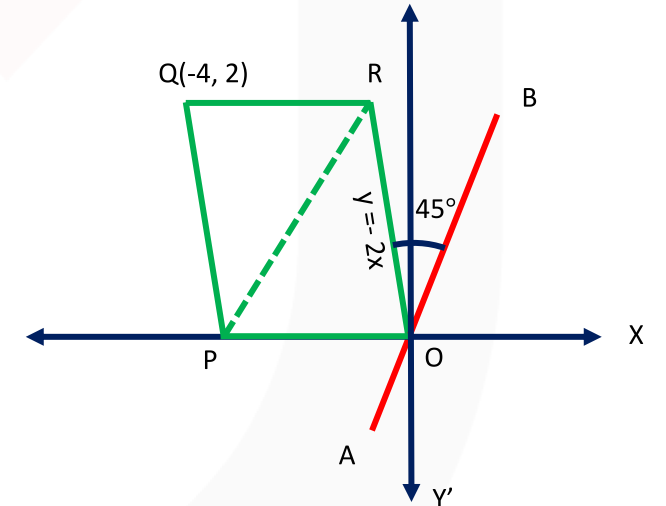
OR রেখার ঢাল, $m_1 = -2$

AB রেখা OR এর সাথে $45°$ উৎপন্ন করে।

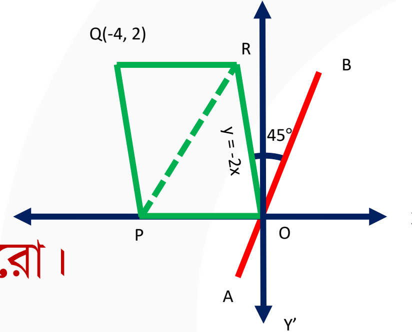
মনে করি, AB রেখার ঢাল, $= m_2$

$\therefore tan45° = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$

বা, $1 = \pm\frac{-2 - m_2}{1 - 2m_2}$



Solution



(ক) উদ্দীপক হতে AB সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

$\therefore 1 - 2m_2 = \pm(-2 - m_2)$

$'+'$ নিয়ে,

$1 - 2m_2 = -2 - m_2$

বা, $1 + 2 = 2m_2 - m_2$

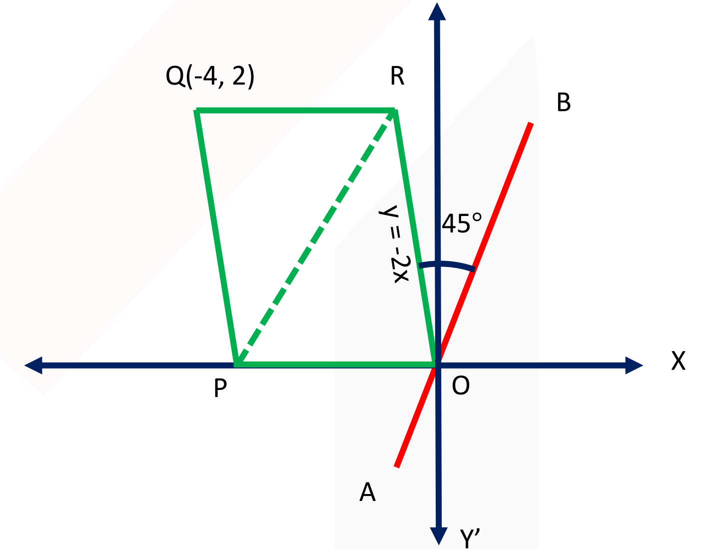
$\therefore m_2 = 3$

$'-'$ নিয়ে,

$1 - 2m_2 = 2 + m_2$

বা, $-2m_2 - m_2 = 1$

$\therefore m_2 = -\frac{1}{3}$

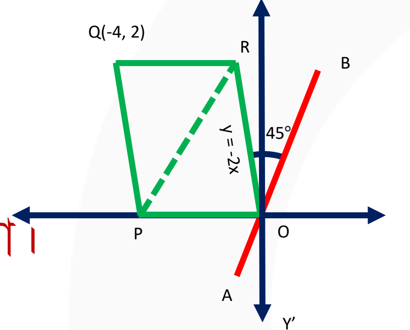


$\because AB$ রেখা মূলবিন্দুগামী এবং চিত্রানুসারে সরলরেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে।

সুতরাং $m_2 = \frac{-1}{3}$ গ্রহণযোগ্য নয়।

$\therefore$ মূলবিন্দুগামী এবং $m_2 = 3$ ঢাল বিশিষ্ট AB রেখার সমীকরণ, $\boldsymbol{y = 3x}$ $(\boldsymbol{Ans})$

Solution



(খ) উদ্দীপক হতে PR কর্ণের সমীকরণ নির্ণয় করো।

চিত্রে, $OPQR$ সামন্তরিক এবং $PO \parallel QR$

মনে করি, x-অক্ষের সমান্তরাল QR রেখার সমীকরণ, $y = K \dots\dots\dots (i)$

(i) নং রেখা $Q(-4, 2)$ বিন্দুগামী। $\therefore K = 2$

K এর মান (i) নং এ বসিয়ে, QR রেখার সমীকরণ, $y = 2 \dots\dots\dots (ii)$

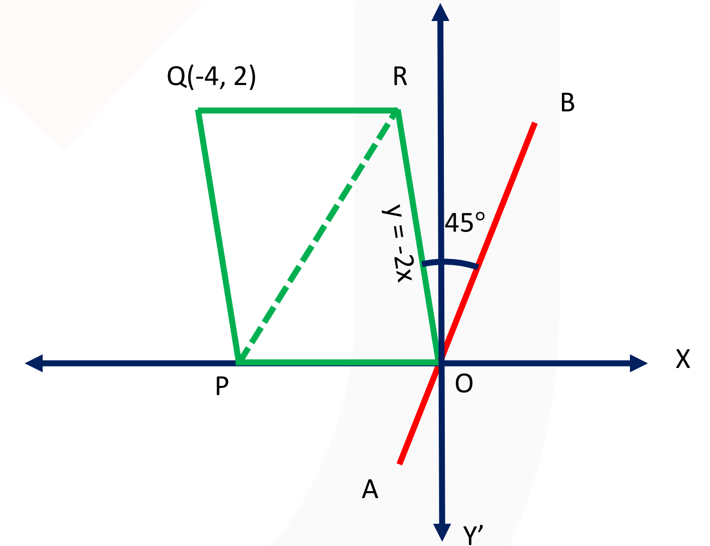
OR রেখার সমীকরণ, $y = -2x \quad \dots\dots\dots (iii)$

(iii) নং এ $y = 2$ বসিয়ে পাই, $2 = -2x \quad \therefore x = -1$

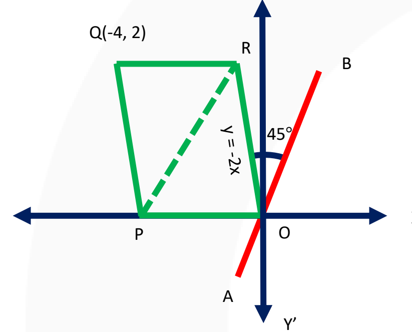
$\therefore$ R বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-1, 2)$

মনে করি, OR এর সমান্তরাল QP রেখার সমীকরণ

$y = -2x + c \dots\dots\dots (iv)$



Solution



(খ) উদ্দীপক হতে PR কর্ণের সমীকরণ নির্ণয় করো।

(iv) রেখা $(-4, 2)$ বিন্দুগামী।

$2 = -2(-4) + c$

বা, $2 = 8 + c$

$\therefore c = -6$

c এর মান (iv) নং এ বসিয়ে পাই,

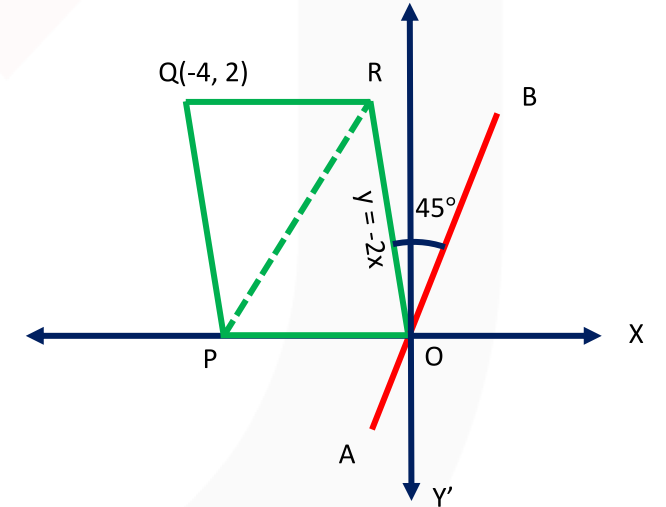
QP রেখার সমীকরণ $y = -2x - 6 \ldots\ldots\ldots (v)$

(v) নং এ $y = 0$ বসিয়ে পাই,

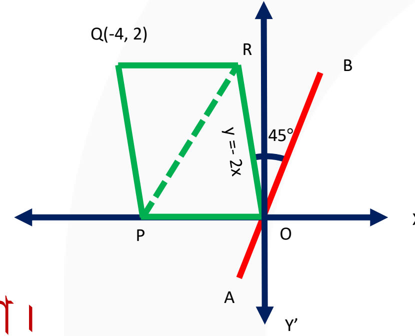
$-2x - 6 = 0$

বা, $-2x = 6$

$\therefore x = -3$



Solution



(খ) উদ্দীপক হতে PR কর্ণের সমীকরণ নির্ণয় করো।

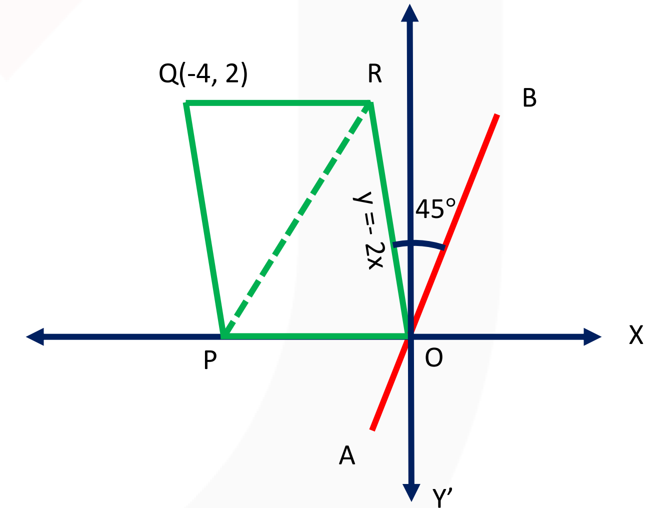
$\therefore P$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-3, 0)$

$\therefore P(-3, 0)$ ও $R(-1, 2)$ বিন্দুগামী PR কর্ণের সমীকরণ,

$$\frac{x+3}{-3+1} = \frac{y-0}{0-2}$$

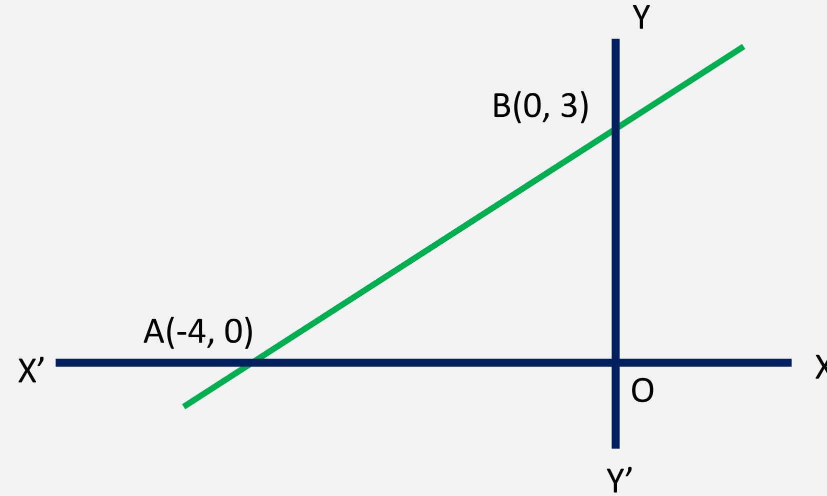
বা, $\frac{x+3}{-2} = \frac{y}{-2}$

$\therefore y = x + 3$ $(\boldsymbol{Ans})$



CQ

Question-3



[যশোর বোর্ড '১৯]

(ক) $(-1, \sqrt{3})$ এর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

(খ) AB রেখার সমত্রিখন্ডক বিন্দুদ্বয়ের সাথে মূলবিন্দু যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

(গ) দুটি সরলরেখা $(-1, 2)$ বিন্দুগামী এবং AB রেখার সাথে $45°$ কোন উৎপন্ন করে। রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় করো।

Solution

(ক) $(-1, \sqrt{3})$ এর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

মনে করি, $(-1, \sqrt{3})$ এর পোলার (r, θ)

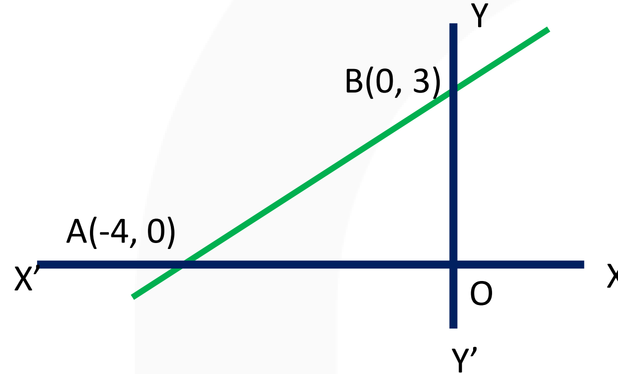
$$\therefore r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

যেহেতু $(-1, \sqrt{3})$ বিন্দুটি দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$$\therefore \theta = \pi - tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}}{-1}\right| = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$(-1, \sqrt{3})$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$ $\quad$ $(\boldsymbol{Ans})$

Solution



(খ) AB রেখার সমদ্বিখণ্ডক বিন্দুদ্বয়ের সাথে মূলবিন্দু যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

AB রেখার $A(-4,0)$ ও $B(0,3)$ দুটি বিন্দু।

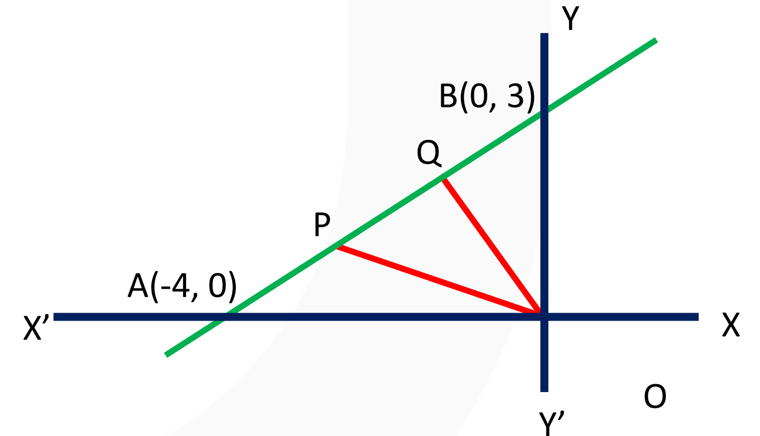
মনে করি, $P(x_1,y_1)$ এবং $Q(x_2,y_2)$ বিন্দুদ্বয় AB এর সমত্রিখন্ডক বিন্দু।

P বিন্দু AB রেখাকে $1:2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

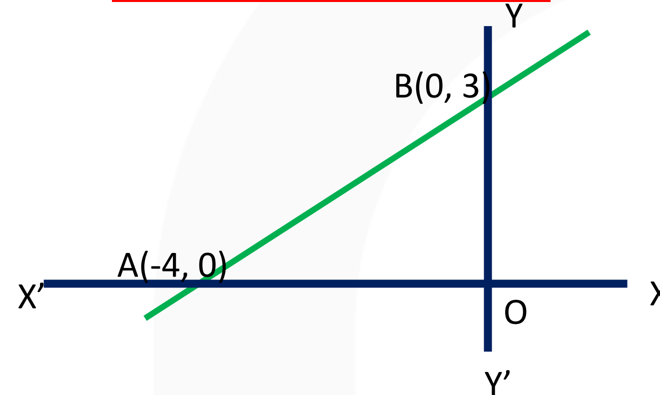
$$\therefore x_1 = \frac{1\times0+2(-4)}{1+2} = -\frac{8}{3}$$

এবং, $y_1 = \dfrac{1\times3+2\times0}{1+2} = 1$

আবার Q বিন্দু AB রেখাকে $2:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।



Solution

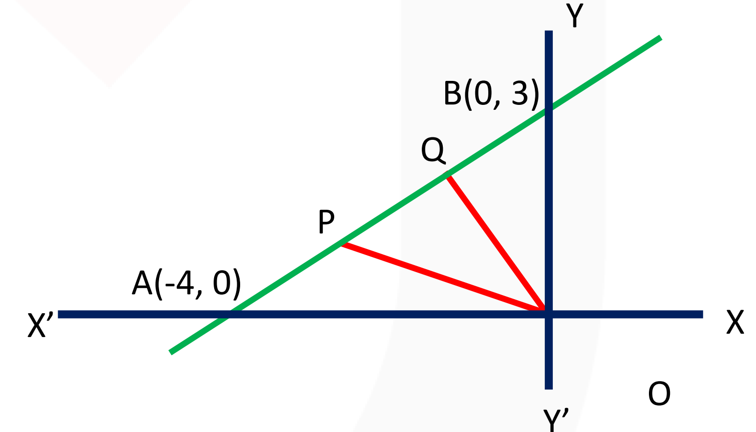


(খ) AB রেখার সমদ্বিখণ্ডক বিন্দুদ্বয়ের সাথে মূলবিন্দু যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

$\therefore\ x_2 = \frac{2\times0+1\times(-4)}{1+2} = -\frac{4}{3}$

এবং, $y_2 = \frac{2\times3+0\times1}{1+2} = 2$

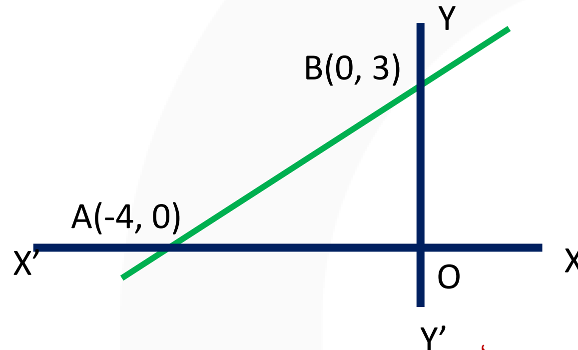
$\therefore$ সমত্রিখন্ডক বিন্দুর স্থানাঙ্ক $P\left(-\frac{8}{3}, 1\right)$ এবং $Q\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$



$\therefore \Delta OPQ$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{3}+\frac{16}{3}\right)$

$= \frac{1}{2}\times\frac{12}{3} = 2$ বর্গ একক। $\quad (Ans)$

Solution



(গ) দুটি সরলরেখা $(-1, 2)$ বিন্দুগামী এবং AB রেখার সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় করো।

AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1$

বা, $\frac{y}{3} = \frac{x}{4} + 1$

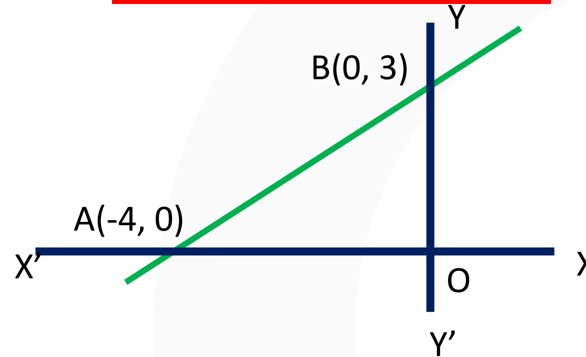
$\therefore y = \frac{3x}{4} + 3$

AB রেখার ঢাল, $m_1 = \frac{3}{4}$

মনে করি, $(-1, 2)$ বিন্দুগামী রেখার ঢাল $= m_2$

তাহলে, সরলরেখাটির সমীকরণ, $y - 2 = m_2(x + 1) \dots \dots \dots (i)$

Solution



(গ) দুটি সরলরেখা $(-1, 2)$ বিন্দুগামী এবং AB রেখার সাথে $45°$ কোন উৎপন্ন করে। রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় করো।

শর্তানুসারে, $tan45° = \pm\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$

বা, $1 = \pm\frac{m_2-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}m_2}$

বা, $1 = \pm\frac{4m_2-3}{4+3m_2}$

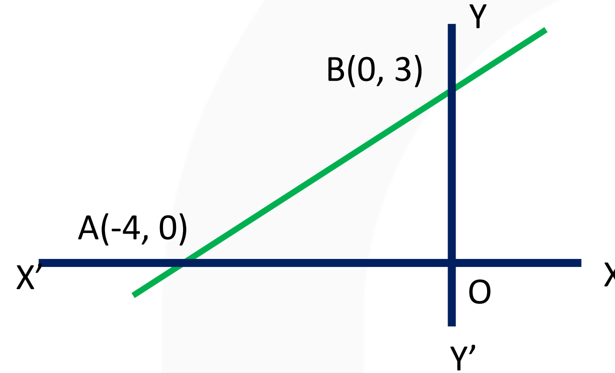
$\therefore 4 + 3m_2 = \pm(4m_2 - 3)$

$'+'$ নিয়ে, $4 + 3m_2 = 4m_2 - 3 \quad \therefore m_2 = 7$

$'-'$ নিয়ে, $4 + 3m_2 = -4m_2 + 3$

বা, $7m_2 = 3 - 4 \quad \therefore m_2 = -\frac{1}{7}$

Solution



(গ) দুটি সরলরেখা $(-1, 2)$ বিন্দুগামী এবং AB রেখার সাথে $45°$ কোন উৎপন্ন করে। রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় করো।

m_2 এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$y - 2 = 7(x + 1)$

বা, $7x + 7 - y + 2 = 0$

$\therefore \mathbf{7x - y + 9 = 0} \quad (Ans)$

এবং, $m_2 = -\frac{1}{7}$ এর মান (i) এ বসিয়ে পাই,

$y - 2 = -\frac{1}{7}(x + 1)$

বা, $7y - 14 = -x - 1$

$\therefore \mathbf{x + 7y - 13 = 0} \quad (Ans)$

MCQ

উদ্দীপকের আলোকে ১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

$4x - 2y = 6$

১. উদ্দীপক সরলরেখাটি x অক্ষকে কোন বিন্দুতে ছেদ করে?

(ক) $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ ✔

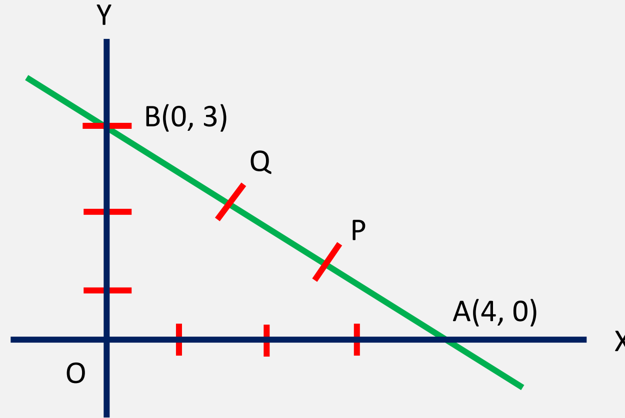
(খ) $(0, -3)$

(গ) $(-3, 0)$

(ঘ) $\left(0, \frac{3}{2}\right)$

CQ

Question–4

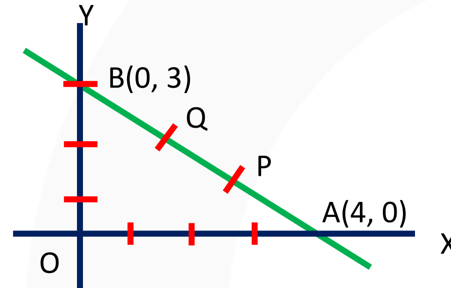


[বরিশাল বোর্ড ‘১৯]

(ক) OP ও OQ সরলরেখার সমীকরণসমূহ নির্ণয় করো।

(খ) PQ সরলরেখার সমান্তরাল এবং $2\frac{2}{5}$ একক দূরবর্তী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

Solution



(ক) OP ও OQ সরলরেখার সমীকরণসমূহ নির্ণয় করো।

চিত্রানুসারে, P বিন্দুটি AB কে $1:2$ অন্তর্বিভক্ত করেছে।

P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) হলে,

$$x_1 = \frac{1\times0+2\times4}{1+2} = \frac{0+8}{3} = \frac{8}{3}$$

এবং, $y_1 = \frac{1\times3+2\times0}{1+2} = \frac{3+0}{3} = 1$

∴ মূলবিন্দু $O(0,0)$ এবং $P(\frac{8}{3}, 1)$ বিন্দুগামী অর্থাৎ OP সরলরেখার সমীকরণ,

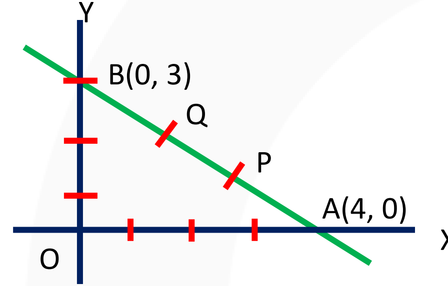
$$y = \frac{1}{\frac{8}{3}}x$$

বা, $y = \frac{3}{8}x$

বা, $8y = 3x$

∴ $\mathbf{3x - 8y = 0}$ $\quad (Ans)$

Solution



(ক) OP ও OQ সরলরেখার সমীকরণসমূহ নির্ণয় করো।

আবার Q বিন্দুটি AB রেখাকে $2:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করেছে।

Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_2, y_2) হলে,

$$x_2 = \frac{2\times0+1\times4}{2+1} = \frac{4}{3}$$

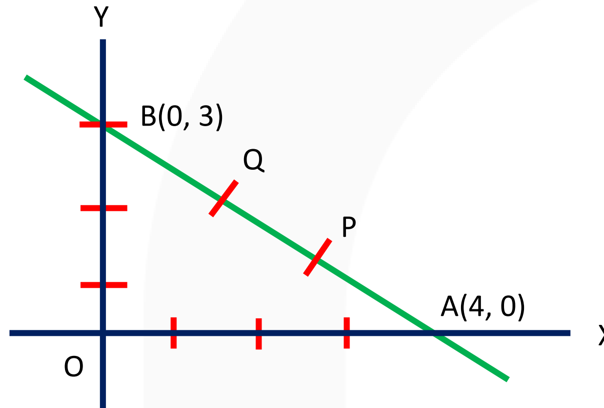
এবং, $y_2 = \frac{2\times3+1\times0}{2+1} = \frac{6}{3} = 2$

মূলবিন্দু $O(0,0)$ এবং $Q(\frac{4}{3}, 2)$ বিন্দুগামী অর্থাৎ OQ সরলরেখার সমীকরণ, $y = \frac{2}{\frac{4}{3}}x$

বা, $y = \frac{3}{2}x$

$\therefore \mathbf{3x - 2y = 0} \quad (\boldsymbol{Ans})$

Solution



(খ) PQ সরলরেখার সমান্তরাল এবং $2\frac{2}{5}$ একক দূরবর্তী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

PQ রেখা $A(4,0)$ ও $B(0,3)$ বিন্দুগামী।

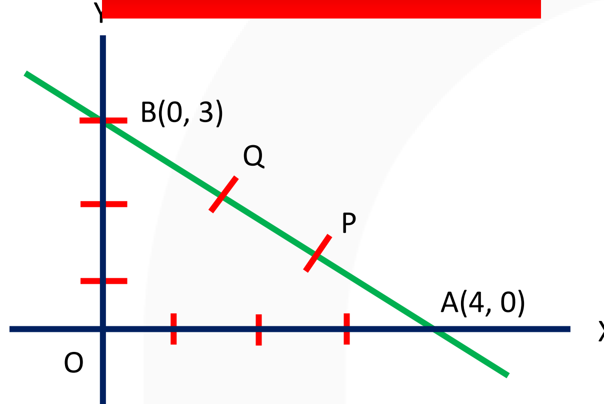
PQ রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$

$$\therefore 3x+4y=12$$

PQ রেখার সমান্তরাল যেকোনো রেখার সমীকরণ,

$3x+4y+k=0 \dots\dots\dots(i)$ [k ইচ্ছামূলক ধ্রুবক]

Solution



(খ) PQ সরলরেখার সমান্তরাল এবং $2\frac{2}{5}$ একক দূরবর্তী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

শর্তমতে, $\left|\frac{k+12}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = 2\frac{2}{5}$

বা, $\frac{|k+12|}{5} = \frac{12}{5}$

$\therefore k + 12 = \pm 12$

$'+'$ চিহ্ন নিয়ে, $k + 12 = 12$

$\therefore k = 12 - 12 = 0$

$'-'$ চিহ্ন নিয়ে, $k + 12 = -12$

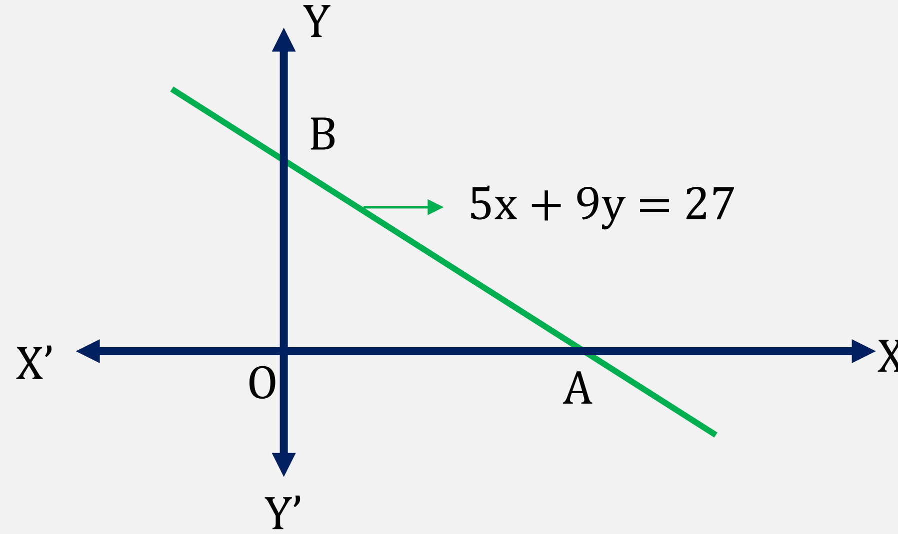
$\therefore k = -12 - 12 = -24$

k এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{3x + 4y - 24 = 0} \\ \text{এবং } \mathbf{3x + 4y = 0} \end{array}\right\} \quad (\boldsymbol{Ans})$$

CQ

Question–5



[ঢাকা, দিনাজপুর, সিলেট ও যশোর বোর্ড '১৮]

(ক) $(-4, -4)$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

(খ) AB রেখার 4 একক দূরবর্তী সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

(গ) দুইটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো যা $(5, 4)$ বিন্দুগামী এবং AB সরলরেখার সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে।

Solution

(ক) $(-4,-4)$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

ধরি, $(-4,-4)$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক (r,θ)

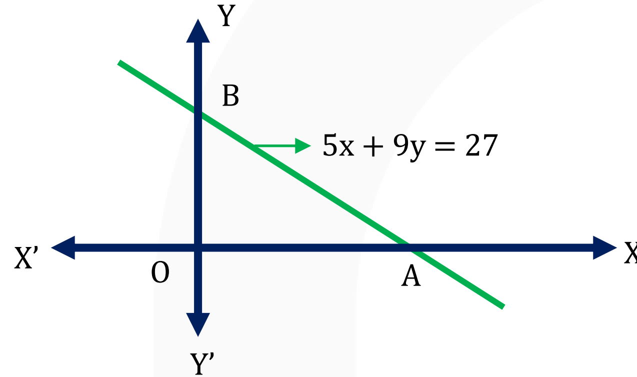
$$\therefore r = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2}$$

যেহেতু, $(-4,-4)$ বিন্দুটি ৩য় চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$$\therefore \theta = \pi + tan^{-1}\left|\frac{-4}{-4}\right| = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

$\therefore$ নির্ণেয় পোলার স্থানাঙ্ক $\left(4\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$

Solution



(খ) AB রেখার 4 একক দূরবর্তী সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

AB সরলরেখার সমীকরণ, $5x + 9y = 27$

$$\therefore 5x + 9y - 27 = 0 \dots\dots\dots (i)$$

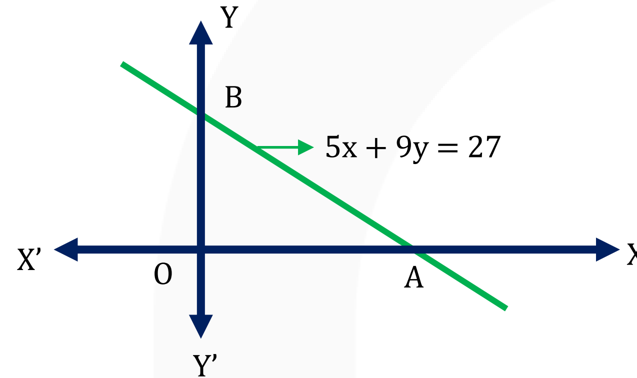
AB রেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ,

$$5x + 9y + k = 0 \dots\dots\dots (ii)$$

(i) ও (ii) নং সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব, $= \frac{|k-(-27)|}{\sqrt{5^2+9^2}} = \frac{|k+27|}{\sqrt{106}}$

প্রশ্নমতে, $\frac{|k+27|}{\sqrt{106}} = 4$

Solution



(খ) AB রেখার 4 একক দূরবর্তী সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

বা, $\frac{k+27}{\sqrt{106}} = \pm 4$

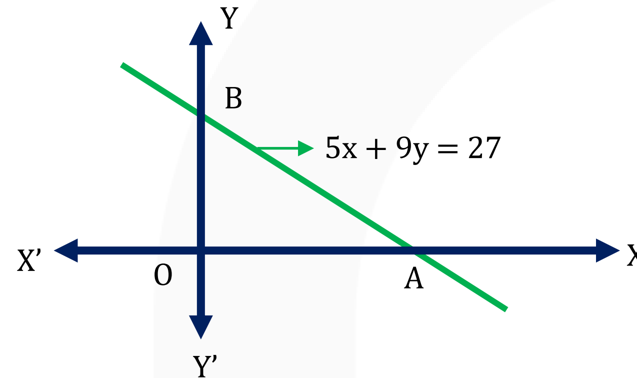
বা, $k + 27 = \pm 4\sqrt{106}$

$\therefore k = -27 \pm 4\sqrt{106}$

k এর মান (ii) এ বসিয়ে পাই,

$$\mathbf{5x + 9y - 27 \pm 4\sqrt{106} = 0} \quad (Ans)$$

Solution



(গ) দুইটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো যা $(5, 4)$ বিন্দুগামী এবং AB সরলরেখার সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে।

AB সরলরেখার সমীকরণ, $5x + 9y = 27$

বা, $9y = -5x + 27$

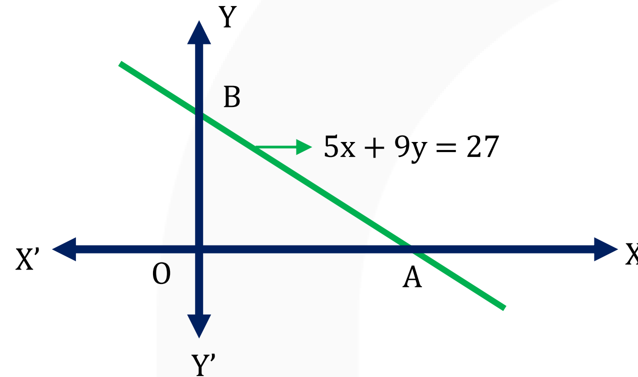
$\therefore y = \frac{-5}{9}x + 3$

এখানে ঢাল, $m_1 = \frac{-5}{9}$

ধরি অপর রেখাটির ঢাল m

$(5, 4)$ বিন্দুগামী এবং m ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ, $y - 4 = m(x - 5) \dots \dots \dots (i)$

Solution



(গ) দুইটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো যা $(5, 4)$ বিন্দুগামী এবং AB সরলরেখার সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে।

শর্তমতে, $tan 45° = \pm \frac{m - m_1}{1 + mm_1}$

বা, $1 = \pm \frac{m + \frac{5}{9}}{1 - \frac{5m}{9}}$

বা, $1 = \pm \frac{\frac{9m+5}{9}}{\frac{9-5m}{9}}$

বা, $1 = \pm \frac{9m+5}{9-5m}$

$\therefore 9m + 5 = \pm(9 - 5m)$

'$+$' চিহ্ন নিয়ে, $9m + 5 = 9 - 5m$

বা, $14m = 4$

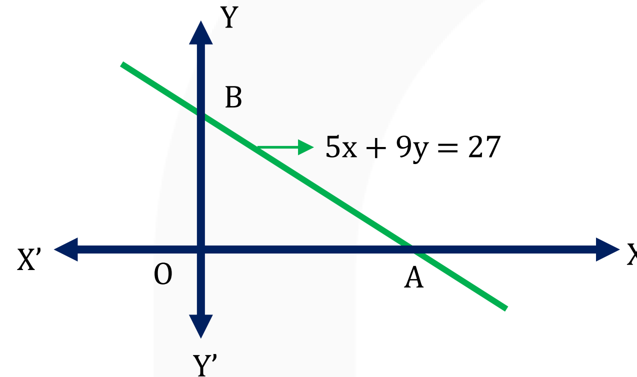
বা, $m = \frac{4}{14}$ $\therefore m = \frac{2}{7}$

'$-$' চিহ্ন নিয়ে, $9m + 5 = -(9 - 5m)$

বা, $4m = -14$

বা, $m = \frac{-14}{4}$ $\therefore m = -\frac{7}{2}$

Solution



(গ) দুইটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো যা $(5, 4)$ বিন্দুগামী এবং AB সরলরেখার সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে।

(i) নং এ $m = \frac{2}{7}$ বসিয়ে পাই,

$$y - 4 = \frac{2}{7}(x - 5)$$

বা, $7y - 28 = 2x - 10$

$\therefore \mathbf{2x - 7y + 18 = 0} \quad (Ans)$

(iii) নং এ $m = -\frac{7}{2}$ বসিয়ে পাই,

$$y - 4 = -\frac{7}{2}(x - 5)$$

বা, $2y - 8 = -7x + 35$

$\therefore \mathbf{7x + 2y - 43 = 0} \quad (Ans)$

CQ

Question-6

$3x + 2y - 6 = 0$ এবং $2x + 3y - 8 = 0$ দুইটি সরলরেখার সমীকরণ।

[রাজশাহী, কুমিল্লা, চট্টগ্রাম ও বরিশাল বোর্ড- '১৮]

(ক) উদ্দীপকে বর্ণিত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং উভয় অক্ষের ধনাত্মক দিক থেকে সমান অংশ ছেদ করে, এইরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

(খ) উদ্দীপকে বর্ণিত রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত স্থূল কোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখা x –অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় করো।

Solution

$3x + 2y - 6 = 0$ এবং $2x + 3y - 8 = 0$ দুইটি সরলরেখার সমীকরণ।

(ক) উদ্দীপকে বর্ণিত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং উভয় অক্ষের ধনাত্মক দিক থেকে সমান অংশ ছেদ করে, এইরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

$3x + 2y - 6 = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

এবং, $2x + 3y - 8 = 0 \ldots\ldots\ldots (ii)$

(i) ও (ii) নং সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী যেকোনো সরলরেখার সমীকরণ, $3x + 2y - 6 + k(2x + 3y - 8) = 0$

$\therefore (2k + 3)x + (3k + 2)y - 6 - 8k = 0 \ldots\ldots\ldots (iii)$

Solution

$3x + 2y - 6 = 0$ এবং $2x + 3y - 8 = 0$ দুইটি সরলরেখার সমীকরণ।

(ক) উদ্দীপকে বর্ণিত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং উভয় অক্ষের ধনাত্মক দিক থেকে সমান অংশ ছেদ করে, এইরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

যেহেতু (iii) নং রেখাটি উভয় অক্ষের ধনাত্মক দিক হতে সমান অংশ ছেদ করে। সুতরাং x ও y এর সহগ সমান হবে। অর্থাৎ, $2k + 3 = 3k + 2$

বা, $3k - 2k = 3 - 2$ $\quad \therefore k = 1$

k এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই,

$(2.1 + 3)x\ (3.1 + 2)y - 6 - 8.1 = 0$

$\therefore 5x + 5y - 14 = 0 \quad (\boldsymbol{Ans})$

Solution

$3x + 2y - 6 = 0$ এবং $2x + 3y - 8 = 0$ দুইটি সরলরেখার সমীকরণ।

(খ) উদ্দীপকে বর্ণিত রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত স্থুল কোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখা x –অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় করো।

মনে করি, (i) ও (ii) নং রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখা অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

(i) ও (ii) নং সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ,

$$\frac{3x+2y-6}{\sqrt{3^2+2^2}} = \pm\frac{2x+3y-8}{\sqrt{2^2+3^2}}$$

$$\therefore 3x + 2y - 6 = \pm(2x + 3y - 8)$$

(i) ও (ii) নং এর ক্ষেত্রে, $a_1 = 3, b_1 = 2, a_2 = 2, b_2 = 3$

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 3 \times 2 + 2 \times 3 = 12 > 0$$

অর্থাৎ, ধনাত্মক চিহ্ন হতে প্রাপ্ত সমদ্বিখণ্ডকটি হবে স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডক।

Solution

$3x + 2y - 6 = 0$ এবং $2x + 3y - 8 = 0$ দুইটি সরলরেখার সমীকরণ।

(খ) উদ্দীপকে বর্ণিত রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত স্থুল কোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখা x –অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় করো।

$\therefore 3x + 2y - 6 = 2x + 3y - 8$

বা, $3x - 2x + 2y - 3y - 6 + 8 = 0$

বা, $x - y + 2 = 0$

$\therefore y = x + 2$

এখানে, ঢাল, $m = tan\theta = 1$

$\therefore \theta = tan^{-1}(1) = 45°$ $\quad (\boldsymbol{Ans})$

CQ

Question-7

দৃশ্যকল্প: I $3x - 4y + 12 = 0$

দৃশ্যকল্প: II $8x + 15y - 12 = 0$

[ঢাকা বোর্ড '১৭]

(ক) দৃশ্যকল্প:*II* নং সরলরেখার সমান্তরাল 2 একক দূরবর্তী সরলরেখার মূলবিন্দু হতে লম্ব দূরত্ব নির্ণয় করো।

(খ) দৃশ্যকল্প:*I* এবং দৃশ্যকল্প:*II* সমীকরণদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের যে সমদ্বিখণ্ডক x –অক্ষের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে তার ঢাল নির্ণয় করো।

Solution

দৃশ্যকল্প: I $3x - 4y + 12 = 0$

দৃশ্যকল্প: II $8x + 15y - 12 = 0$

(ক) দৃশ্যকল্প:II নং সরলরেখার সমান্তরাল 2 একক দূরবর্তী সরলরেখার মূলবিন্দু হতে লম্ব দূরত্ব নির্ণয় করো।

$8x + 15y - 12 = 0 \dots\dots\dots (i)$

(i) নং রেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ,

$8x + 15y + k = 0 \dots\dots\dots (ii)$

(i) ও (ii) নং সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব, $= \frac{|k-(-12)|}{\sqrt{8^2+15^2}} = \frac{|k+12|}{17}$

প্রশ্নমতে, $\frac{|k+12|}{17} = 2$

বা, $\frac{k+12}{17} = \pm 2$

বা, $k + 12 = \pm 34$

বা, $k = \pm 34 - 12$

$\therefore k = -46, 22$

Solution

দৃশ্যকল্প: I $3x - 4y + 12 = 0$

দৃশ্যকল্প: II $8x + 15y - 12 = 0$

(ক) দৃশ্যকল্প:II নং সরলরেখার সমান্তরাল 2 একক দূরবর্তী সরলরেখার মূলবিন্দু হতে লম্ব দূরত্ব নির্ণয় করো।

k এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$8x + 15y - 46 = 0 \dots \dots \dots (iii)$

এবং, $8x + 15y + 22 = 0 \dots \dots \dots (iv)$

মূলবিন্দু $(0,0)$ হতে (iii) নং রেখার লম্ব দূরত্ব, $= \frac{|8.0+15.0-46|}{\sqrt{8^2+15^2}}$

$= \frac{46}{17}$ (Ans)

আবার, মূলবিন্দু $(0,0)$ হতে (iv) নং রেখার লম্ব দূরত্ব,

$= \frac{|8.0+15.0+22|}{\sqrt{8^2+15^2}}$

$= \frac{22}{17}$ (Ans)

Solution

দৃশ্যকল্প: I $3x - 4y + 12 = 0$

দৃশ্যকল্প: II $8x + 15y - 12 = 0$

(খ) দৃশ্যকল্প:I এবং দৃশ্যকল্প:II সমীকরণদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের যে সমদ্বিখণ্ডক x –অক্ষের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে তার ঢাল নির্ণয় করো।

$8x + 15y - 12 = 0 \dots\dots\dots (v)$

এবং, $3x - 4y + 12 = 0 \dots\dots\dots (vi)$

(v) ও (vi) নং এর ক্ষেত্রে, $a_1 = 8,\ b_1 = 15,\ a_2 = 3,\ b_2 = -4$

$a_1a_2 + b_1b_2 = 8.3 + 15.(-4) = -36 < 0$

অর্থাৎ ঋণাত্মক চিহ্ন হতে প্রাপ্ত সমদ্বিখণ্ডকটি হবে স্থুলকোণের সমদ্বিখণ্ডক।

(v) ও (vi) নং রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত স্থুলকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ,

$$\frac{8x+15y-12}{\sqrt{8^2+15^2}} = -\frac{3x-4y+12}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$$

Solution

দৃশ্যকল্প: $I\ 3x - 4y + 12 = 0$

দৃশ্যকল্প: $II\ 8x + 15y - 12 = 0$

(খ) দৃশ্যকল্প:I এবং দৃশ্যকল্প:II সমীকরণদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের যে সমদ্বিখণ্ডক x –অক্ষের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে তার ঢাল নির্ণয় করো।

বা, $\frac{8x+15y-12}{17} = -\frac{3x-4y+12}{5}$

বা, $51x - 68y + 204 = -40x - 75y + 60$

বা, $91x + 144 = -7y$

$\therefore y = -13x - \frac{144}{7}$ রেখাটির ঢাল -13 । ফলে রেখাটি x –অক্ষের সাথে স্থূলকোণ উৎপন্ন করে।

(v) ও (vi) নং রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ,

$$\frac{8x+15y-12}{\sqrt{8^2+15^2}} = \frac{3x-4y+12}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$$

বা, $\frac{8x+15y-12}{17} = \frac{3x-4y+12}{5}$

Solution

দৃশ্যকল্প: I $3x - 4y + 12 = 0$

দৃশ্যকল্প: II $8x + 15y - 12 = 0$

(খ) দৃশ্যকল্প:I এবং দৃশ্যকল্প:II সমীকরণদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের যে সমদ্বিখণ্ডক x –অক্ষের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে তার ঢাল নির্ণয় করো।

বা, $51x - 68y + 204 = 40x + 75y - 60$

বা, $11x + 264 = 143y$

$\therefore y = \frac{1}{13}x + \frac{24}{13}$ রেখাটির ঢাল $\frac{1}{13}$ ফলে রেখাটি x –অক্ষের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore$ নির্ণেয় ঢাল $= \frac{1}{13}$ $\quad (\boldsymbol{Ans})$

CQ

Question-8

$$A(2,4), B(3,1), C(4,5); 2x - y + 2 = 0,\ x - 2y + 3 = 0$$

[রাজশাহী বোর্ড '১৭]

(ক) y –অক্ষ এবং $(k, 4)$ বিন্দু থেকে $A(2,4)$ বিন্দুর দূরত্ব সমান হলে k এর মান নির্ণয় করো।

(খ) C বিন্দু থেকে AB সরলরেখার উপর অংকিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

(গ) উদ্দীপকের আলোকে রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

Solution

$$\boldsymbol{A(2,4), B(3,1), C(4,5); 2x - y + 2 = 0,\ \ x - 2y + 3 = 0}$$

(ক) y –অক্ষ এবং $(k, 4)$ বিন্দু থেকে $A(2, 4)$ বিন্দুর দূরত্ব সমান হলে k এর মান নির্ণয় করো।

y –অক্ষ থেকে $A(2, 4)$ বিন্দুর দূরত্ব $= |2| = 2$

$(k, 4)$ বিন্দু থেকে $A(2, 4)$ বিন্দুর দূরত্ব $= \sqrt{(k-2)^2 + (4-4)^2}$

প্রশ্নমতে, $\sqrt{(k-2)^2 + (4-4)^2} = 2$

বা, $(k-2)^2 + 0 = 2^2$

বা, $k^2 - 4k + 4 = 4$

বা, $k^2 - 4k = 0$

$\therefore k = 0, 4 \quad (\boldsymbol{Ans})$

Solution

$\boldsymbol{A(2,4), B(3,1), C(4,5); 2x - y + 2 = 0,\ x - 2y + 3 = 0}$

(খ) C বিন্দু থেকে AB সরলরেখার উপর অংকিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

AB সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{x-2}{2-3} = \frac{y-4}{4-1}$

বা, $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-4}{3}$

বা, $3x - 6 = -y + 4$

$\therefore 3x + y - 10 = 0 \ldots\ldots\ldots.(i)$

(i) নং সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্ব রেখার সমীকরণ,

$x - 3y + k = 0 \ldots\ldots\ldots(ii)$

(ii) নং $C(4,5)$ বিন্দুগামী।

$4 - 3 \times 5 + k = 0$

বা, $4 - 15 + k = 0$ $\quad \therefore k = 11$

k এর মান (ii) নং এ বসিয়ে, $x - 3y + 11 = 0 \ldots\ldots\ldots(iii)$

Solution

$$A(2,4), B(3,1), C(4,5); 2x-y+2=0,\ x-2y+3=0$$

(খ) C বিন্দু থেকে AB সরলরেখার উপর অংকিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

(i) নং কে 3 দ্বারা গুন করে (iii) নং এর সাথে যোগ করে পাই,

$$9x+3y-30+x-3y+11=0$$

বা, $10x-19=0 \qquad \therefore x=\frac{19}{10}$

x এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{19}{10}-3y+11=0$$

বা, $3y=\frac{19+110}{10}$

$$\therefore y=\frac{129}{30}=\frac{43}{10}$$

$\therefore$ পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x,y)=\left(\frac{19}{10},\frac{43}{10}\right)$ $\qquad$ $(\boldsymbol{Ans})$

Solution

$$A(2,4), B(3,1), C(4,5); 2x - y + 2 = 0,\ x - 2y + 3 = 0$$

(গ) উদ্দীপকের আলোকে রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

$2x - y + 2 = 0 \dots\dots\dots (iv)$

$x - 2y + 3 = 0 \dots\dots\dots (v)$

(iv) ও (v) নং এর ক্ষেত্রে, $a_1 = 2, b_1 = -1, a_2 = 1, b_2 = -2$

এখানে, $a_1a_2 + b_1b_2 = 2 \times 1 + (-1)(-2) = 2 + 2 = 4 > 0$

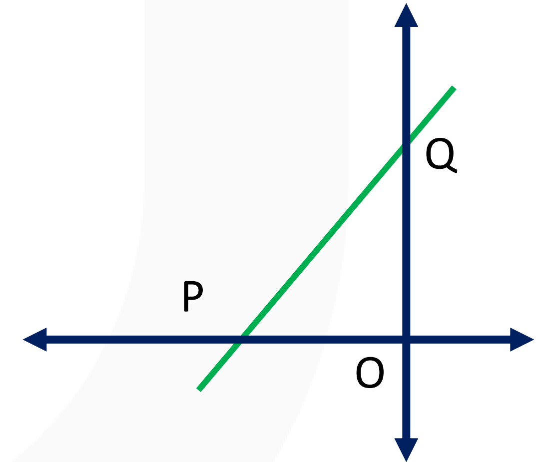
অর্থাৎ, ঋণাত্মক চিহ্ন হতে প্রাপ্ত সমদ্বিখণ্ডকটি হবে সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক।

(iv) ও (v) নং রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ,

$$\frac{2x-y+2}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = -\frac{x-2y+3}{\sqrt{1^2+(-2^2)}}$$

বা, $\frac{2x-y+2}{\sqrt{5}} = -\frac{x-2y+3}{\sqrt{5}}$

বা, $2x - y + 2 = -x + 2y - 3$



Solution

$$A(2,4), B(3,1), C(4,5); 2x - y + 2 = 0,\ x - 2y + 3 = 0$$

(গ) উদ্দীপকের আলোকে রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

বা, $3x - 3y = -5$

বা, $\frac{3x}{-5} - \frac{3y}{-5} = 1$

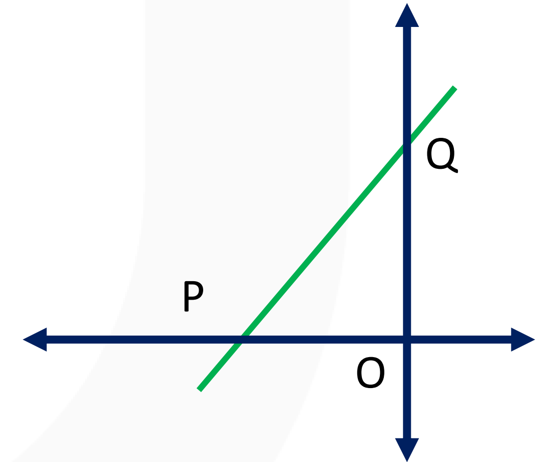
$\therefore \frac{x}{\frac{-5}{3}} + \frac{y}{\frac{5}{3}} = 1$ ইহা x –অক্ষকে $P(\frac{-5}{3}, 0)$ এবং y –অক্ষকে $Q(0, \frac{5}{3})$ বিন্দুতে ছেদ করে। মূলবিন্দু $O(0,0)$

$\therefore OP = \frac{5}{3}$ এবং $OQ = \frac{5}{3}$

$\therefore\ \Delta OPQ$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times OP \times OQ$

$= \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} \times \frac{5}{3}$

$= \frac{25}{18}$ বর্গ একক। $\quad (\boldsymbol{Ans})$



CQ

Question-9

$5x - 4y - 1 = 0$ ও $-8x + 7y + 1 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু ষ্টেশনমাস্টারের কক্ষে অবস্থিত। $4x + 3y - 5 = 0$ রেখা বরাবর রেলপথের একটি লাইন অবস্থিত।

[কুমিল্লা বোর্ড '১৭]

(ক) $(-1, 2)$ এবং $(3, -5)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

(খ) ষ্টেশনমাস্টারের কক্ষ বিন্দু হতে রেললাইনের উপর অঙ্কিত লম্বের সমীকরণ নির্ণয় করো।

(গ) রেললাইনের সাথে $3x - 4y + 6 = 0$ রেখা দ্বারা উৎপন্ন সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় করো।

Solution

(ক) $(-1,2)$ এবং $(3,-5)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

$(-1,2)$ এবং $(3,-5)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$$\frac{x+1}{-1-3} = \frac{y-2}{2+5}$$

বা, $\frac{x+1}{-4} = \frac{y-2}{7}$

বা, $7x + 7 = -4y + 8$

$\therefore 7x + 4y = 1$ $\quad (\boldsymbol{Ans})$

Solution

$5x - 4y - 1 = 0$ ও $-8x + 7y + 1 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু ষ্টেশনমাস্টারের কক্ষে অবস্থিত। $4x + 3y - 5 = 0$ রেখা বরাবর রেলপথের একটি লাইন অবস্থিত। [কুমিল্লা বোর্ড '১৭]

(খ) ষ্টেশনমাস্টারের কক্ষ বিন্দু হতে রেললাইনের উপর অঙ্কিত লম্বের সমীকরণ নির্ণয় করো।

$5x - 4y - 1 = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

$-8x + 7y + 1 = 0 \ldots\ldots\ldots (ii)$

$4x + 3y - 5 = 0 \ldots\ldots\ldots (iii)$

(i) নং কে 7 দ্বারা এবং (ii) নং কে 4 দ্বারা গুন করে যোগ করে পাই,

$35x - 28y - 7 - 32x + 28y + 4 = 0$

বা, $3x - 3 = 0 \quad \therefore x = 1$

x এর মান (ii) নং এ বসিয়ে, $-8.1 + 7y + 1 = 0 \quad \therefore y = 1$

(i) ও (ii) নং রেখার ছেদবিন্দু $(1, 1)$

Solution

$5x-4y-1=0$ ও $-8x+7y+1=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু ষ্টেশনমাস্টারের কক্ষে অবস্থিত। $4x+3y-5=0$ রেখা বরাবর রেলপথের একটি লাইন অবস্থিত।

[কুমিল্লা বোর্ড '১৭]

(খ) ষ্টেশনমাস্টারের কক্ষ বিন্দু হতে রেললাইনের উপর অঙ্কিত লম্বের সমীকরণ নির্ণয় করো।

(iii) নং রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব রেখার সমীকরণ,

$$3x-4y+k=0 \ldots\ldots\ldots (iv)$$

(iv) নং $(1,1)$ বিন্দুগামী।

$$3.1-4.1+k=0 \qquad \therefore k=1$$

k এর মান (iv) নং এ বসিয়ে পাই,

$$3x-4y+1=0 \qquad (\boldsymbol{Ans})$$

Solution

$5x - 4y - 1 = 0$ ও $-8x + 7y + 1 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু ষ্টেশনমাস্টারের কক্ষে অবস্থিত। $4x + 3y - 5 = 0$ রেখা বরাবর রেলপথের একটি লাইন অবস্থিত। [কুমিল্লা বোর্ড '১৭]

(গ) রেললাইনের সাথে $3x - 4y + 6 = 0$ রেখা দ্বারা উৎপন্ন সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় করো।

$4x + 3y - 5 = 0 \ldots \ldots \ldots (i)$

$3x - 4y + 6 = 0 \ldots \ldots \ldots (ii)$

এখানে, $a_1a_2 + b_1b_2 = 4 \times 3 + 3(-4) = 0$

$\therefore$ (i) ও (ii) নং সরলরেখা পরস্পর লম্ব।

সুতরাং রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত প্রতিটি কোণই এক সমকোণ এবং রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোনো সূক্ষ্মকোণ থাকবে না।

$\therefore$ রেললাইনের সাথে $3x - 4y + 6 = 0$ রেখা দ্বারা উৎপন্ন সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় করা সম্ভব নয়।

MCQ

* $A(-2,3), B(-4,2)$ এবং $C(8,6)$ শীর্ষ বিন্দুবিশিষ্ট ত্রিভুজের-

(i) ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$

(ii) AB বাহুর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-3, \frac{5}{2}\right)$

(iii) ΔABC এর ক্ষেত্রফল 4 বর্গ একক

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii

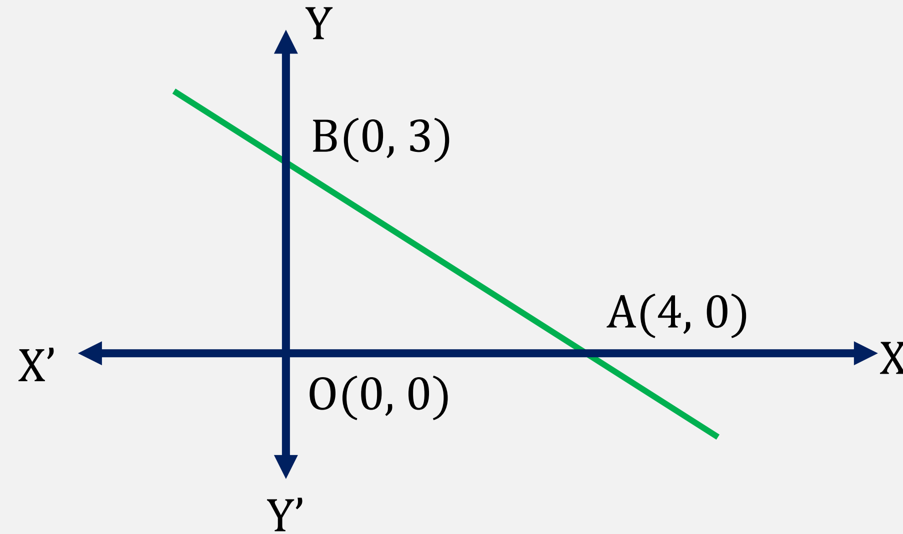
(খ) i ও iii

(গ) ii ও iii

(ঘ) i, ii ও iii

CQ

Question-10



[চট্টগ্রাম বোর্ড '১৭]

(ক) $(3, 5)$ ও $(6, 7)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার লম্বদ্বিখন্ডকের ঢাল নির্ণয় করো।

(খ) দৃশ্যকল্পের আলোকে AB রেখা হতে 3 একক দূরবর্তী সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

(গ) দৃশ্যকল্পের মূলবিন্দু ও AB রেখাংশের সমত্রিখন্ডন বিন্দুদ্বয় যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

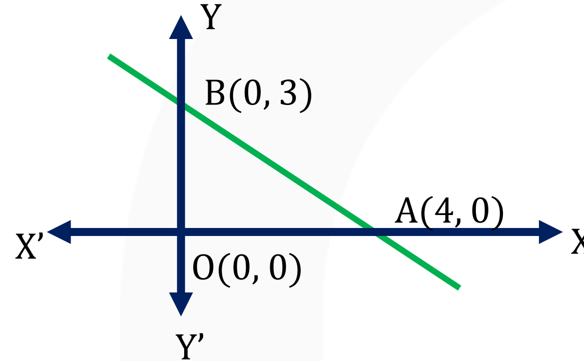
Solution

(ক) $(3,5)$ ও $(6,7)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার লম্বদ্বিখন্ডকের ঢাল নির্ণয় করো।

$(3,5)$ ও $(6,7)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার ঢাল $= \frac{7-5}{6-3} = \frac{2}{3}$

$\therefore$ লম্বদ্বিখন্ডকের ঢাল $\frac{-1}{\frac{2}{3}} = \frac{-3}{2}$ (Ans)

Solution



(খ) দৃশ্যকল্পের আলোকে AB রেখা হতে 3 একক দূরবর্তী সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x-4}{4-0} = \frac{y-0}{0-3}$

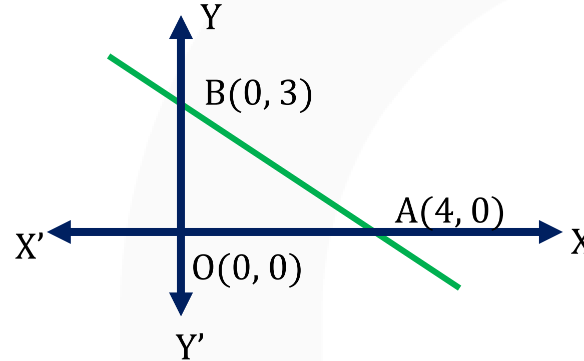
বা, $4y = -3x + 12$

$\therefore 3x + 4y - 12 = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

(i) নং রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, $3x + 4y + k = 0 \ldots\ldots\ldots (ii)$

(i) ও (ii) নং সমান্তরাল রেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব, $= \frac{|k-(-12)|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|k+12|}{5}$

Solution



(খ) দৃশ্যকল্পের আলোকে AB রেখা হতে 3 একক দূরবর্তী সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

প্রশ্নমতে, $\frac{|k+12|}{5} = 3$

বা, $\frac{k+12}{5} = \pm 3$

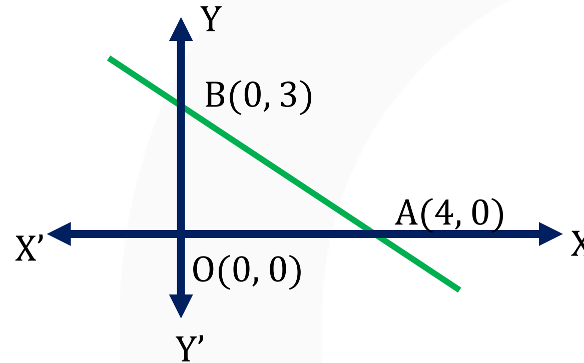
বা, $k = \pm 15 - 12$

$\therefore\ k = 3, -27$

k এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\left.\begin{aligned} 3x + 4y + 3 = 0 \\ 3x + 4y - 27 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (\boldsymbol{Ans})$$

Solution



(গ) দৃশ্যকল্পের মূলবিন্দু ও AB রেখাংশের সমত্রিখন্ডন বিন্দুদ্বয় যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

AB রেখাংশকে $2:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক,

$$E\left(\frac{2\times0+1\times4}{2+1}, \frac{2\times3+1\times0}{2+1}\right) = \left(\frac{4}{3}, 2\right)$$

$1:2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক,

$$E\left(\frac{1\times0+2\times4}{1+2}, \frac{1\times3+2\times0}{1+2}\right) = \left(\frac{8}{3}, 1\right)$$

$$\Delta OEF \text{ এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & \frac{8}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{16}{3} + 0 - 0 - \frac{4}{3} - 0\right) = \frac{1}{2} \times 4 = 2 \text{ বর্গ একক।} \quad (\boldsymbol{Ans})$$

MCQ

(১) $(-1, \sqrt{3})$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক- [এইচএসসি পরীক্ষা ২০১৮]

(ক) $\left(-2, -\frac{\pi}{3}\right)$

(খ) $\left(-2, \frac{\pi}{3}\right)$

(গ) $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$

(ঘ) $\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$ ✓

Solve: $(x, y) = (-1, \sqrt{3})$

$\therefore r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+3} = 2$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right)$

$= \pi - \tan^{-1}\sqrt{3}$

$= \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ পোলার স্থানাঙ্ক $(r, \theta) = \left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$

MCQ

(২) কোনো বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(1, \sqrt{3})$ হলে বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক হবে- [ঢা.বো’ ১৭; দি.বো’ ১৭]

(ক) $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ ✓

(খ) $\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$

(গ) $\left(2, \frac{-\pi}{3}\right)$

(ঘ) $\left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$

Solve: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$(-1, \sqrt{3})$ বিন্দুর ক্ষেত্রে, $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{1+3}$

$= \sqrt{4}$

$= 2$

$\therefore\ \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

MCQ

(৩) $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক কোনটি? [কু.বো' ১৭]

(ক) $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$

(খ) $\left(2, \frac{3\pi}{4}\right)$

(গ) $\left(2, \frac{5\pi}{4}\right)$ ✓

(ঘ) $\left(2, \frac{7\pi}{4}\right)$

Solve:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ এবং $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

$(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ বিন্দুর ক্ষেত্রে, $r = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2}$

$= \sqrt{2+2}$

$= \sqrt{4}$

$= 2$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}\right)$

$= \pi + \tan^{-1}(1)$

$= \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$\therefore$ পোলার স্থানাঙ্ক $(r, \theta) = \left(2, \frac{5\pi}{4}\right)$

MCQ

(৪) কোনো বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্কের কোটি 90° হলে ঐ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের ভূজ- [ব.বো'১৭]

(ক) $x = r$

(খ) $x = 0$ ✔

(গ) $y = r$

(ঘ) $y = 0$

Solve: পোলার স্থানাঙ্কের কোটি 90° হলে ঐ বিন্দু y অক্ষের উপর অবস্থিত

∴ ঐ বিন্দুর ভূজ $x = 0$

বিকল্প:

$\theta = 90°$

$\therefore x = r\cos 90° - 0$

সুতরাং, কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের ভূজ $= 0$

MCQ

(৫) x অক্ষ ও $(-5, -7)$ থেকে $(4, k)$ বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে k এর মান কত? [CU: '13-14, '16-17; BRU: '13-14; MBSTU: '14-15, '13-14; RU: '15-16]

(ক) $\frac{7}{65}$

(খ) $-\frac{65}{70}$

(গ) $\frac{65}{7}$

(ঘ) $-\frac{65}{7}$ ✔

Solve: x অক্ষ থেকে $(4, k)$ বিন্দুর দূরত্ব $= k$

$(-5, -7)$ ও $(4, k)$ বিন্দুর দূরত্ব$= \sqrt{(4+5)^2 + (k+7)^2}$

শর্তানুসারে, $k^2 = 9^2 + (k+7)^2$

বা, $k^2 = 81 + k^2 + 49 + 14k$

বা, $-14k = 130$

বা, $k = -\frac{65}{7}$

MCQ

(৬) $A(1,-2)$ এবং $B(-8,1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশ BA কে $2:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক নিচের কোনটি? [কু.বো'১৭]

(ক) $(-5,-1)$

(খ) $(-2,-1)$ ✔

(গ) $(-2,0)$

(ঘ) $(-5,0)$

Solve: $m_1 = 2,\quad m_2 = 1$

$x_1 = -8\quad x_2 = 1$

$y_1 = 1\quad y_2 = -2$

অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x,y) হলে,

$$x = \frac{2\times 1 + 1\times(-8)}{2+1} = \frac{2-8}{3} = \frac{-6}{3} = -2$$

$$y = \frac{2\times(-2) + 1\times !}{2+1} = \frac{-4+1}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

$(x,y) = (-2,-1)$

MCQ

(৭) কোনো ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুসমূহ $(-1,-2), (2,5)$ এবং $(3,10)$ হলে, তার ক্ষেত্রফল?

[DU: '03-04; HSTU: '04-05; RU: '10-11; CU: '12-13, '10-11; JU: '12-13, '09-10; KU: '12-13]

(ক) $10\ sq.units$

(খ) $15\ sq.units$

(গ) $4\ sq.units$ ✔

(ঘ) $18\ sq.units$

Solve: ধরি, $A \equiv (-1,-2)$, $B \equiv (2,5)$, $C \equiv (3,10)$ (Vanishing Method)

$\equiv 0,0$ $\equiv 3,7$ $\equiv 4,12$

$$\Delta \equiv \frac{1}{2}(36-28) = \frac{1}{2} \times 8 = 4 \text{ বর্গ একক}$$

MCQ

(৮) $3x - 5y + 1 = 0$ সরলরেখার ঢাল- [রা.বো, '১৭]

(ক) $-\frac{5}{3}$

(খ) $\frac{5}{3}$

(গ) $-\frac{3}{5}$

(ঘ) $\frac{3}{5}$ ✔

Solve: $3x - 5y + 1 = 0$

বা, $5y = 3x + 1$

বা, $y = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$

সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ, $y = mx + c$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

ঢাল, $m = \frac{3}{5}$

MCQ

(৯) $3x + 4y + 1 = 0$ রেখার ঢাল কোনটি? [য.বো. '১৭]

(ক) $-\frac{4}{3}$ (খ) $-\frac{3}{4}$

(গ) $\frac{3}{4}$ (ঘ) $\frac{4}{3}$

Solve: প্রদত্ত রেখার সমীকরণ,

$$3x + 4y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 4y = -3x - 1$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$$ যা $y = mx + c$ সমীকরণের অনুরূপ।

$\therefore$ উক্ত রেখার ঢাল, $m = -\frac{3}{4}$

MCQ

(১০) $y = -7x + 9$ রেখার সাথে লম্ব রেখার নতি কত? [ঢা.বো '১৭]

(ক) $\frac{1}{7}$ ✔

(খ) $-\frac{1}{7}$

(গ) -7

(ঘ) 7

Solve:

$y = -7x + 9$ রেখার নতি, $m_1 = 7$

উক্ত রেখায় লম্বরেখার নতি m_2 হলে আমরা জানি,

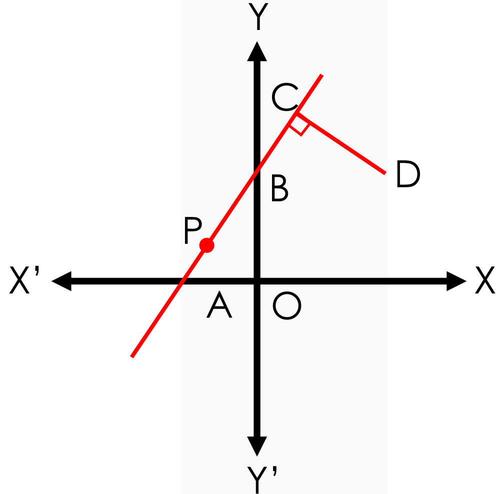
$m_1 . m_2 = -1$

বা, $-7 . m_2 = -1$

$\therefore m_2 = \frac{1}{7}$

MCQ

** উদ্দীপকের আলোকে (১১ ও ১২) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



AB রেখার সমীকরণ $6x - 4y + 24 = 0$ এবং $AP = PB$

(১১) CD রেখার ঢাল কত? [কু.বো. '১৯]

(ক) $-\frac{3}{2}$ (খ) $\frac{3}{2}$

(গ) $-\frac{2}{3}$ ✔ (ঘ) $\frac{2}{3}$

Solve: AB রেখার সমীকরণ $6x - 4y + 24 = 0$

বা, $4y = 6x + 24$

বা, $y = \frac{6}{4}x + 6$

AB রেখার ঢাল $= \frac{3}{2}$

$\because CD \perp AB$ $\therefore CD$ রেখার ঢাল$= -\frac{1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$

MCQ

(১২) OP রেখার সমীকরণ কোনটি? [কু.বো'১৯]

(ক) $y = -\frac{2}{3}x$

(খ) $y = -\frac{3}{2}x$ ✓

(গ) $y = \frac{2}{3}x$

(ঘ) $y = \frac{3}{2}x$

Solve : AB রেখার সমীকরণ, $6x - 4y + 24 = 0$

বা, $6x - 4y = -24$

বা, $\frac{6x}{-24} - \frac{4y}{-24} = 1$

বা, $\frac{x}{-4} + \frac{y}{6} = 1$

$\therefore$ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-4,0)$

B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0,6)$

$\because AP = PB$

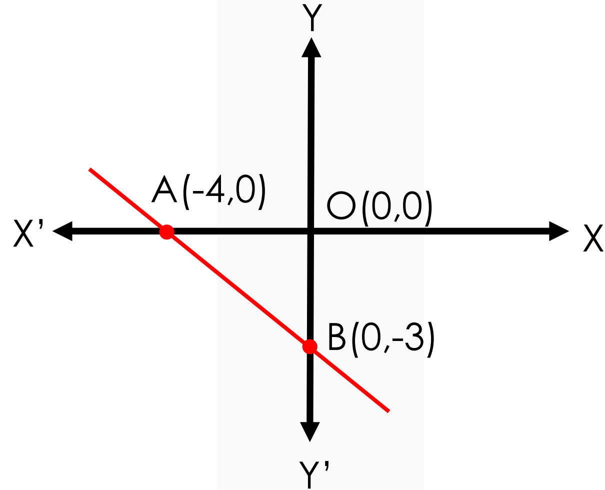
P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{-4+0}{2}, \frac{0+6}{2}\right) = (-2,3)$

$\therefore$ OP রেখার সমীকরণ, $y = \frac{3}{-2}.x$

$$\therefore y = \frac{3}{-2}x$$

MCQ

** উদ্দীপকের আলোকে (১৩ ও ১৪) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



(১৩) AB এর ঢাল কত? [ঢা.বো. '১৯]

(ক) $\frac{4}{3}$

(খ) $\frac{3}{4}$

(গ) $-\frac{3}{4}$ ✔

(ঘ) $-\frac{4}{3}$

Solve: $A(-4,0)$ ও $B(0,-3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার ঢাল,

$$m_{AB} = \frac{0-(-3)}{-4-0} = -\frac{3}{4}$$

MCQ

(১৪) মূল বিন্দু থেকে AB রেখার লম্ব দূরত্ব হলো – [ঢা.বো'১৯]

(ক) 5

(খ) 3

(গ) $\frac{12}{5}$ ✓

(ঘ) $\frac{12}{25}$

Solve : AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{-4}+\frac{y}{-3}=1$

$\therefore 3x+4y+12=0 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

মূলবিন্দু $(0,0)$ হতে (1) নং রেখার লম্ব দূরত্ব $=\left|\frac{12}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|=\frac{12}{5}$

MCQ

(১৫) $x - \sqrt{3y} - \sqrt{3} = 0$ সরলরেখাটির-- [ব.বো'১৭]

i) ঢাল, $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

ii) লম্ব রেখার ঢাল, $-\sqrt{3}$

iii) x অক্ষের খন্ডিতাংশ, $\sqrt{3}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii

(খ) i ও iii

(গ) ii ও iii ✔

(ঘ) i,ii ও iii

Solve : $x-\sqrt{3y} - \sqrt{3} = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

$\Rightarrow \sqrt{3y} = x - \sqrt{3}$

$\therefore y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \sqrt{3}$

সরলরেখার ঢাল $= \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\therefore$(i) নং সঠিক নয়

সরলরেখার উপর লম্ব রেখার ঢাল $= \frac{1}{\frac{-1}{\sqrt{3}}}$

$= -\sqrt{3}$ $\therefore$(ii) নং সঠিক

(i) নং হতে, $x-\sqrt{3y} - \sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow x - \sqrt{3y} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{-1} = 1$

সরলরেখা x অক্ষে খন্ডিতাংশ $= \sqrt{3}$ $\therefore$(iii) নং সঠিক

MCQ

(১৬) $3x-2y+6=0$ সরলরেখা দ্বারা x অক্ষের খন্ডিতাংশ কত একক? [চ.বো'১৭]

(ক) -3

(খ) -2 ✔

(গ) 2

(ঘ) 3

Solve : $3x-2y+6=0$

$$\Rightarrow 3x-2y=-6$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{-6}-\frac{2y}{-6}=1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1$$

যা $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ সমীকরণের অনুরূপ যেখানে a ও b হলো যথাক্রমে x ও y অক্ষের খন্ডিতাংশ।

$\therefore$ x অক্ষের খন্ডিতাংশ $=-2$

MCQ

(১৭) $x-y=2$ এবং $2x-2y+4=0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব—? [ব.বো'১৭]

(ক) $3\sqrt{2}$

(খ) $\frac{3}{\sqrt{2}}$

(গ) $2\sqrt{2}$ ✓

(ঘ) $\sqrt{2}$

Solve : $x-y-2=0 \ldots\ldots\ldots(i)$

$2x-2y+4=0$

$\Rightarrow x-y+2=0 \ldots\ldots\ldots(ii)$

(i) ও (ii) নং পরস্পর সমান্তরাল রেখা

এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব $=\left|\frac{-2-2}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\right|$

$=\left|\frac{-4}{\sqrt{2}}\right|$

$=2\sqrt{2}$

MCQ

(১৮) $x - 2y - 5 = 0$ এবং $2x + 4y - 1 = 0$ দুটি সরলরেখার সমীকরণ? [দি.বো'১৯]

i) রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $\left(\frac{11}{4}, \frac{-9}{8}\right)$

ii) দ্বিতীয় রেখার ঢাল $-\frac{1}{2}$

iii) রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোনের পরিমাণ $0°$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii ✓

(খ) ii ও iii

(গ) i ও iii

(ঘ) i, ii ও iii

Solve : (i) $x - 2y - 5 = 0$

এবং $2x + 4y - 1 = 0$

$$\therefore \frac{x}{2+10} = \frac{y}{-10+1} = \frac{1}{4+4}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{22} = \frac{y}{-9} = \frac{1}{8}$$

$\therefore$ ছেদবিন্দু $\left(\frac{11}{4}, \frac{-9}{8}\right)$

(ii) ২য় রেখার ঢাল $= \frac{\text{এর সহগ}}{\text{এর সহগ}} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

(iii) যেহেতু রেখাদ্বয় একই রেখা বা সমান্তরাল নয়।

$\therefore$ এদের মধ্যবর্তী কোণ $0°$ হতে পারে না।

MCQ

(১৯) $2x+y+6=0$ এবং $4x+2y+4=0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব—? [সি.বো'১৯]

(ক) 4

(খ) $\frac{4}{\sqrt{5}}$ ✔

(গ) $\sqrt{5}$

(ঘ) 5

Solve : $2x+y+6=0$ এবং $4x+2y+4=0$

$\Rightarrow 2x+y+2=0$

এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব $=\left|\frac{c_1-c_2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

$=\frac{|6-2|}{\sqrt{2^2+1^1}}$

$=\frac{4}{\sqrt{5}}$

MCQ

(২০) $4y = 3(x - 4)$ এবং $4y = 3(x - 1)$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী লম্বদূরত্ব= ? [সি.বো'১৯]

(ক) $\frac{15}{9}$

(খ) $\frac{9}{5}$ ✔

(গ) $\frac{9}{4}$

(ঘ) 3

Solve : $4y = 3x - 12 \Rightarrow 3x - 12 = 4y \Rightarrow 3x - 4y - 12 = 0$

এবং $4y = 3x - 3 \Rightarrow 3x - 4y - 3 = 0$

রেখা দুটি সমান্তরাল এবং এদের মধ্যবর্তী লম্বদূরত্ব $= \left|\frac{-12+3}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}\right|$

$= \frac{|-9|}{\sqrt{25}}$

$= \frac{9}{5}$

MCQ

(২১) $y = -2x$ এবং $2y = x$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ = ? [সি.বো'১৯]

(ক) $90°$ ✓

(খ) $\tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)$

(গ) $\tan^{-1}\left(\frac{-5}{4}\right)$

(ঘ) $0°$

Solve : $y = -2x$ এর ঢাল $m_1 = -2$

$2y = x \Rightarrow y = \frac{1}{2}x$ এর ঢাল $m_2 = \frac{1}{2}$

দুটি সরলরেখার ঢালদ্বয়ের গুণফল -1 হলে রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব।

সুতরাং, সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব। অর্থ্যাৎ এদের মধ্যবর্তী কোণ $90°$

MCQ

নিচের তথ্যের আলোকে ২৪ ও ২৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও

$x+2y-6=0$ এবং $x+2y+8=0$ দুটি সরলরেখার সমীকরণ।

(২২) নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) রেখাদ্বয় মূলবিন্দু দিয়ে যায়

(খ) রেখাদ্বয় পরস্পরকে ছেদ করে

(গ) রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব

(ঘ) রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল ✓

Solve :

$x+2y-6=0$ রেখার ঢাল $m_1 = \frac{x \text{ এর সহগ}}{y \text{ এর সহগ}} = -\frac{1}{2}$

$x+2y+8=0$ রেখার ঢাল $m_2 = -\frac{1}{2}$

$\therefore m_1 = m_2$

∴ রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল

MCQ

নিচের তথ্যের আলোকে ২৪ ও ২৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও

$x+2y-6=0$ এবং $x+2y+8=0$ দুটি সরলরেখার সমীকরণ।

(২৩) রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব –

(ক) $-\frac{14}{\sqrt{5}}$

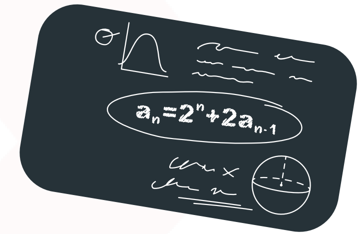
(খ) $-\frac{4}{\sqrt{5}}$

(গ) $\frac{4}{\sqrt{5}}$

(ঘ) $\frac{14}{\sqrt{5}}$ ✔

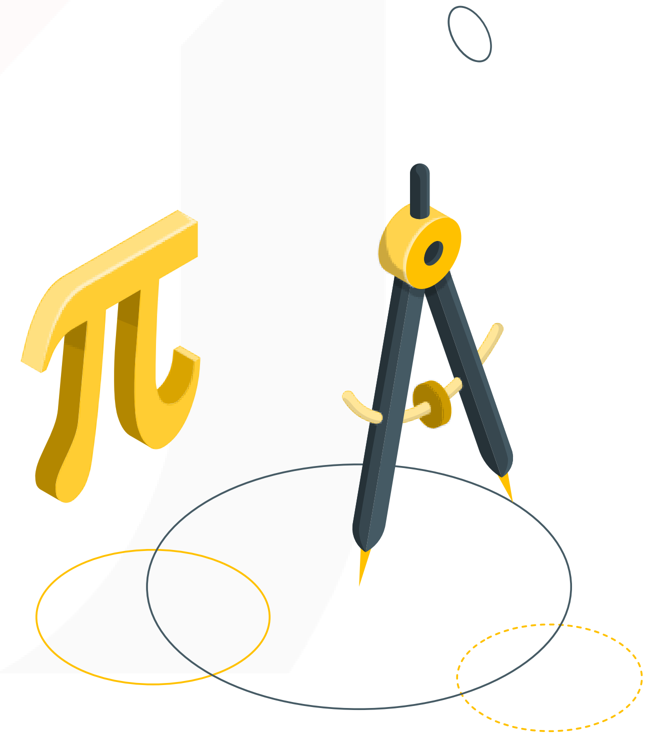
Solve : রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \left|\frac{8-(-6)}{\sqrt{1+4}}\right| = \frac{14}{\sqrt{5}}$





অন্তরীকরণ





অন্তরীকরণ করতে হলে কি কি জানতে হবে ?

- Function*
- Trigonometry*
- Limit

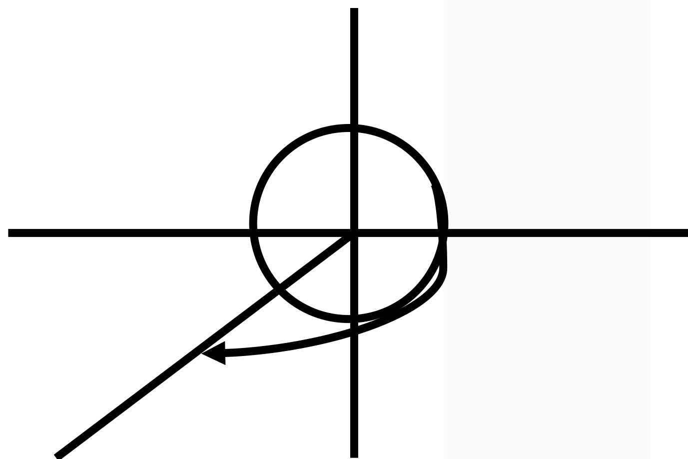
10 1:30

Dedicated → MCQ ( )

CQ

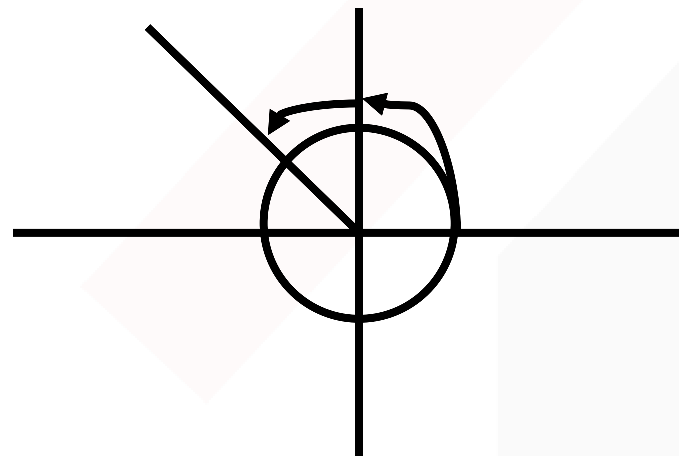
(Quadrant)

$-520°$



৩য়

$520°$



২য়

বাদ যাবে $\left(\frac{n\pi}{2} \pm \theta\right)$

n জোড় হলে → No Change

n বিজোড় হলে →

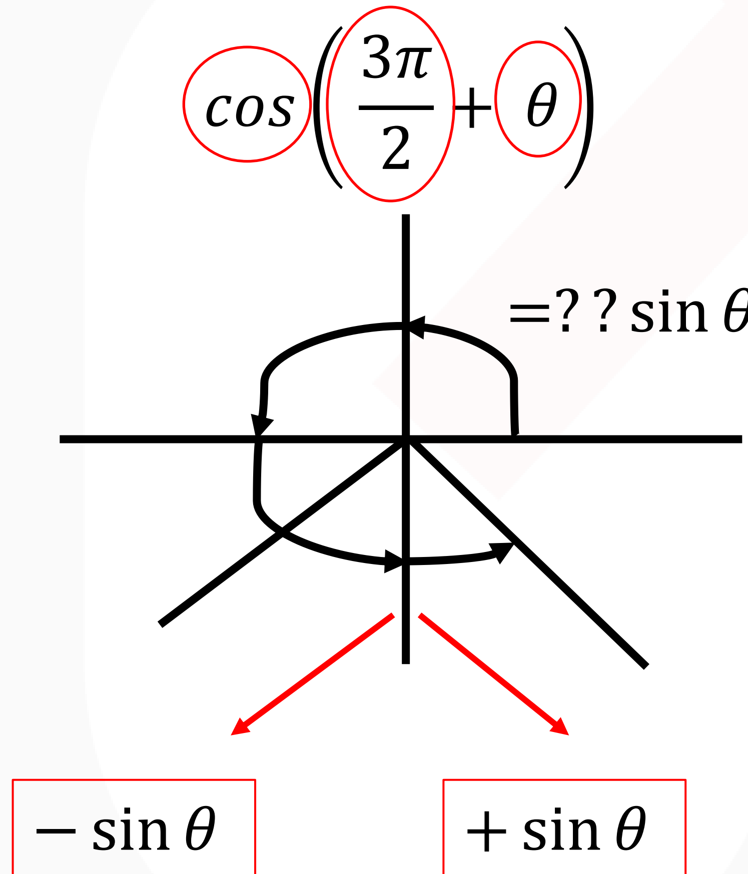
$\sin\theta \rightleftharpoons \cos\theta$

$\tan\theta \rightleftharpoons \cot\theta$

$sec\,\theta \rightleftharpoons \text{cosec}\,\theta$

→ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের পূর্বে $\pm$ হবে

তা নির্ভর করে পরিবর্তনের পূর্বে চতুর্ভাগের উপর।



$cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)$

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(-\theta) =$

$\sec(-\theta) =$

$\cos\theta$

$\sec\theta$

$\text{cosec}(-\theta)$

$\tan(-\theta)$

$\cot(-\theta)$

—

$f(\theta) = \sin\theta$

$f(-\theta) = \sin(-\theta) = -\sin\theta = -f(\theta)$

যুগ্ম Function (even)

$f(-\theta) = f(\theta)$

$f(-x) = f(x)$

$f(x) = x^2$

বিজোড় যুগ্ম Function=

$f(-x) = -f(x)$

paragone

$$\sin(A+B) = \sin A \,.\cos B + \cos A \,.\sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A \,.\cos B - \sin A \,.\sin B$$

$$\sin(A-B) = \sin A \,.\cos B - \cos A \,.\sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A \,.\cos B + \sin A \,.\sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\sin A \cdot \cos B + \cos A \,.\sin B}{\cos A \cdot \cos B - \sin A \,.\sin B}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin A \cos B}{\cos A \,.\cos B} + \dfrac{\cos A \sin B}{\cos A \,.\cos B}}{\dfrac{\cos A \,.\cos B}{\cos A \,.\cos B} - \dfrac{\sin A \,.\sin B}{\cos A \,.\cos B}}$$

$$= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \,.\tan B}$$

$$\cos 2\mathrm{A} = \cos^2\mathrm{A} - \sin^2 \mathrm{A}$$

$$\tan(A+B) = ?$$

$$\cot(A+B) = ?$$

$$\cot(A-B) = ?$$

$$\sin(A+B)+\sin(\mathrm{A}-\mathrm{B}) = \sin A\cdot\cos B+\cos A\,.\sin\beta$$
$$\sin A\cdot\cos B-\cos A\,.\sin\beta$$

$$= 2\sin A\cdot\cos B$$

ধরি,

$$A+B=C$$
$$A-B=D$$

$$A=\frac{C+D}{2}$$

$$B=\frac{C-D}{2}$$

$$\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$

$$\cos(A+B)-\cos(A-B) = -2\sin A.\sin B$$

$$\cos(A-B)-\cos(A+B) = 2\sin A.\sin B$$

$$\cos C - \cos D = -2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$$

$$= 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-c}{2}$$

$$\cos A.\cos B - \sin A.\sin B$$

$$(-)\quad \cos A.\cos B + \sin A.\sin B$$

$$-\sin A.\sin B$$

$\#\ \sin(-\theta) = -\sin\theta$

*** $\boxed{A = B}$

$$\sin(A+B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A . \sin \beta$$

$$\sin(A+A) = \sin A \cdot \cos A + \cos A . \sin A$$

$$\sin 2A = 2 \sin A . \cos A$$

$$= \frac{2 \sin A}{\cos A} . \cos^2 A \quad = \frac{2 \tan A}{\sec^2 A}$$

$$= \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$$

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$$

$$= 2\cos^2 A - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 A$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A . \sin \beta$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$\sin 2A = 2\sin A \,.\, \cos A$$

$$= \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$$

$$\sin\theta = \sin 2 . \frac{\theta}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\theta}{2} . \cos\frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\cos\theta = ?$$

$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$

$= 2\cos^2 A - 1$

$2\cos^2 A = 1 + \cos 2A$

$2\sin^2 A = 1 - \cos 2A$

স্বজাতি

বি জাতি

34 Formula

43

$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

NOTE: Caption Material

$e^{lnx} = ?$

x

Why!

ধরি, $y = e^{lnx}$

$y = ?$

$\Rightarrow lnx = \log_e y$

$x = y$

$\Rightarrow \log_e x = \log_e y$

ধরি,

$\log_{10} x$

$y = 10$

$x = y$

$\log_{10} x = \log_{10} y$

$\log_7 x$

7

$= x$

অনুশীলনী -9(A)

CONCEPT-1

বীজগাণিতিক ফাংশন সংক্রান্ত লিমিট

FORMULA-1

$\left(\frac{0}{0}\right)$ আকার মুক্ত করে লিমিট এর মান বসিয়ে সমাধান করতে হবে।

QUESTION-1

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$$

অনুশীলনী -9(A)

QUESTION-1

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$$

SOLUTION

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} \qquad \left[\frac{0}{0} \text{ আকার}\right]$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2^3}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{(x + 2)}$$

$$= \lim_{x \to -2} (x^2 - 2x + 4)$$

$$= (-2)^2 - 2(-2) + 4$$

$$= 4 + 4 + 4 = 12$$

(Answer)

Problems

QUESTION-2

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{3x^2-4x+1}$$

SOLUTION

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+3x-2x-3}{3x^2-3x-x+1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x(2x+3)-(2x+3)}{3x(x-1)-(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(2x+3)(x-1)}{(3x-1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x+3}{3x-11}$$

- $=\frac{2.1+3}{3.1-1}$

$$=\frac{5}{2}$$

HOMEWORK

- $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{x+3} - \frac{2}{3x+5}\right)$ **Answer :** $\frac{1}{32}$

- $\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x^2-x-12}$ **Answer :** $\frac{1}{7}$

- $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{(x-1)^2}$ **Answer :** 3

অনুশীলনী -9(A)

CONCEPT-2

হর বা লব উভয়টি তে “√” চিহ্ন বিদ্যমান থাকলে

FORMULA-1

$\lim\limits_{x\to o} \frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}}{\sqrt{f(x)}}$ আকার এ থাকলে $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}$ এর বিপরীত রাশি $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}$ দিয়ে লব ও হর কে গুণ করতে হবে।

FORMULA-2

$\lim\limits_{x\to o} \frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}}$ আকার এ থাকলে লব ও হর কে $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}$ দিয়ে গুণ করতে হবে।

Problems

QUESTION-3

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$$

SOLUTION

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} \qquad \left[\frac{0}{0} \text{ আকার}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)}{x(\sqrt{1-x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1-x}\right)^2 - 1^2}{x\left(\sqrt{1-x}+1\right)} \qquad [(a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$$

Problems

QUESTION-3

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x}$$

SOLUTION

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{1-x}\right)^2 - 1^2}{x\left(\sqrt{1-x} + 1\right)} \qquad [(a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - x - 1}{x\left(\sqrt{1-x} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-x}{x\left(\sqrt{1-x} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-1}{\left(\sqrt{1-x} + 1\right)}$$

$$= \frac{-1}{\left(\sqrt{1-0} + 1\right)}$$

$$= \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

HOMEWORK

- $\lim_{x \to 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$ — **Answer :** 6
- $\lim_{x \to 0} \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}$ — **Answer :** $\frac{1}{2a}$
- $\lim_{x \to 3} \frac{3 - x}{\sqrt{1 + x} - \sqrt{7 - x}}$ — **Answer :** -2

অনুশীলনী -9(A)

CONCEPT-3

$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$ আকার সংক্রান্ত লিমিট

FORMULA-1

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$$

QUESTION-4

$$\lim_{x \to a} \frac{x^{\frac{5}{2}} - a^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

Problems

QUESTION-4

$$\lim_{x \to a} \frac{x^{\frac{5}{2}} - a^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

SOLUTION

$$= \lim_{x \to a} \frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^5 - \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^5}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(\sqrt{x}\,)^5 - (\sqrt{a})^5}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

$$= \lim_{\sqrt{x} \to \sqrt{a}} \frac{(\sqrt{x}\,)^5 - (\sqrt{a})^5}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

$$= 5(\sqrt{a})^{5-1}$$

$$= 5(\sqrt{a})^4$$

$$= 5a^2$$

HOMEWORK

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$$

$$\lim_{X\to a}\frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$$

$$\lim_{X\to a}\frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$$

$$= \frac{\lim_{X\to a}\frac{x^m - a^m}{(x - a)}}{\lim_{X\to a}\frac{x^n - a^n}{(x - a)}}$$

$$= \frac{m\,a^{m-1}}{n\,a^{n-1}}$$

$$= \frac{m}{n}a^{m-1-n+1}$$

$$= \frac{m}{n}a^{m-n}$$

অনুশীলনী -9(A)

CONCEPT-4

ত্রিকোণমিতিক ফাংশন সংক্রান্ত লিমিট

FORMULA-1

ফাংশনটি যদি 0/0 আকার এ থাকে তাহলে প্রথমে 0/0 আকার মুক্ত করতে হবে।
তারপর লিমিট এর মান বসিয়ে মান নির্ণয় করতে হবে।

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

2. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$

3. $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$

4. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$

5. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

6. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

যা-তা

$$1+\cos 2x = 2\cos^2 x$$

$$1-\cos 2x = 2\sin^2 x$$

$$1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$$

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= 2\left(\lim_{\frac{x}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \times \frac{x^2}{4}\times\frac{1}{x^2}$$

$$= 2\times 1^2\times\frac{1}{4}\times 1$$

$$= \frac{1}{2}$$

Ans.

Problems

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 7x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{7x}{2}}{3x^2}$$

$$=2\left(\lim_{\frac{7x}{2}\to 0}\frac{sin\,\frac{7x}{2}}{\frac{7x}{2}}\right)^2\times\frac{49x^2}{4}\times\frac{1}{3x^2}$$

$$=2\times 1^2\times\frac{49}{4_{2}}\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{49}{6}\quad Ans.$$

Problems

QUESTION-5

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos x - \sin 2x}{1+\cos 2x}$$

SOLUTION

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos x - \sin 2x}{1+\cos 2x}$$

$$[\because 1+\cos 2x = 2\cos^2 x\,;\, \sin 2x = 2\sin x\,.\cos x]$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos x - 2\sin x\cos x}{2\cos^2 x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos x(1-\sin x)}{2\cos^2 x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{1+\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1+1} = 0$$

Problems

QUESTION-6

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$$

SOLUTION

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\,(1-\cos x)}{x^3\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\frac{1}{\cos x}$$

$$\left[\therefore 1-\cos x=2\sin\frac{x^2}{2}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{\frac{x}{2}\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\times\frac{1}{2}$$

$$=1\times 1\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Problems

QUESTION-7

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$$

SOLUTION

মনেকরি, $x = \frac{\pi}{2} + h$; যখন $x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ তখন, $h \longrightarrow 0$

$$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-h\right)^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}{(-h)^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{h^2} \quad \left[\because 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}\right]$$

$$= \lim_{\frac{h}{2}\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \times \lim_{\frac{h}{2}\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 \quad \left[h \longrightarrow 0 \text{ হলে} \frac{h}{2} \longrightarrow 0\right]$$

$$= \frac{1}{2}$$

Problems

QUESTION-8

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(\cos x+\cos 2x)}{\sin x}$$

SOLUTION

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(\cos x+\cos 2x)}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}(\cos x+\cos 2x)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}.\lim_{x\to 0}(\cos x+\cos 2x)$$

$$=1\times\lim_{x\to 0}(\cos x+\cos 2x)$$

$$=1(1+1)=2$$

HOMEWORK

- $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 7x - \cos 9x}{\cos 3x - \cos 5x}$ **Answer :** 2
- $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}\right)$ **Answer :** 0
- $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\tan x$ **Answer :** 1

HOMEWORK

- $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx}$

  Answer : $\frac{a^2}{b^2}$

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$

  Answer : $\frac{5}{3}$

এখন পর্যন্ত যা যা পড়ানো হয়েছে

1. লিমিট কী?
2. বামদিকবর্তী লিমিট কী?
3. ডানদিকবর্তী লিমিট কী?
4. কখন লিমিট থাকবে,কখন থাকবে না?
5. লিমিটের বৈশিষ্ট্য
6. ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা
7. মাইনকার চিপায় ফাংশন (!)
8. প্রয়োজনীয় সূত্র প্রমাণ ও
9. গাণিতিক সমস্যা সমাধান

Quiz!!!

1. $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin^{-1}\theta}{\theta}$

2. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^\circ}{x}$

Solution

1. ধরি,

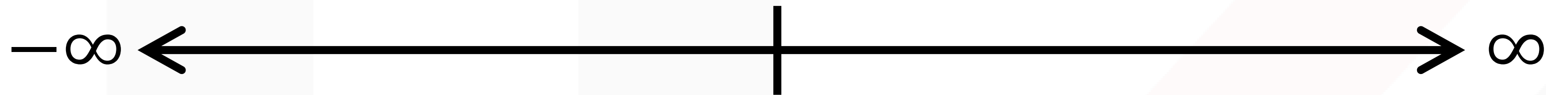
$$\sin^{-1}\theta = x$$
$$\Rightarrow \theta = \sin x$$

$$\theta \longrightarrow 0 \qquad x \longrightarrow 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^\circ}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{\pi x}{180}}{x}$$
$$= \lim_{\frac{\pi x}{180}\to 0}\frac{\sin\frac{\pi x}{180}}{\frac{\pi x}{180}} \times \frac{\pi x}{180} \times \frac{1}{x}$$
$$= 1 \times \frac{\pi}{180}$$
$$= \frac{\pi}{180}$$

Limit Infinity

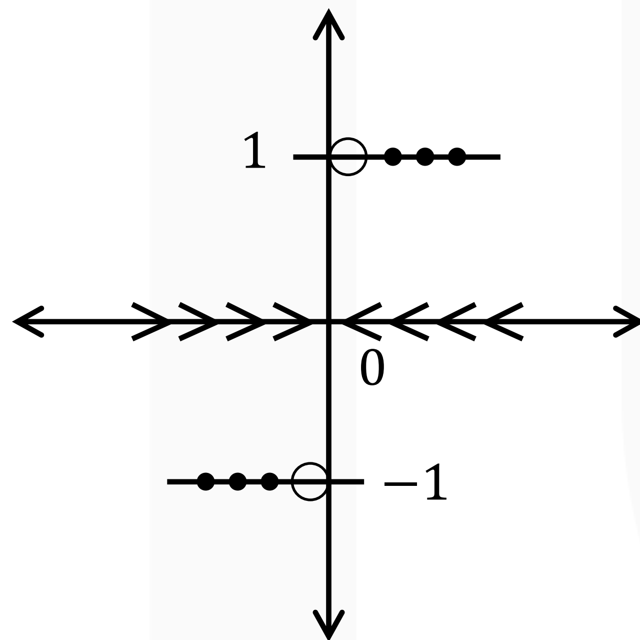


$-\infty \longleftarrow \quad | \quad \longrightarrow \infty$

$\frac{1}{\infty} = 0$ $\qquad$ $\frac{1}{-\infty} = 0$ $\qquad$ → Tends to/ Approaches to

Quiz!!!

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x} = doesn't\ exist$$



$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x} = 1$$

Problems

QUESTION-9

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + 3x^2 - 1}{3x^4 + x^3 - 2x}$$

SOLUTION

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + 3x^2 - 1}{3x^4 + x^3 - 2x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^4\left(1 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(3 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^4}}{3 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}}$$

$$= \frac{1 + \frac{3}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{3 + \frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty}}$$

$$= \frac{1 + 0 - 0}{3 + 0 - 0} \qquad = \frac{1}{3}$$

Problems

QUESTION-10

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$$

SOLUTION

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3^x\left(1 - \frac{3^{-x}}{3^x}\right)}{3^x\left(1 + \frac{3^{-x}}{3^x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(1 - 3^{-x-x})}{(1 + 3^{-x-x})}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(1 - 3^{-2x})}{(1 + 3^{-2x})}$$

$$= \frac{1 - 3^{-\infty}}{1 + 3^{-\infty}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

Problems

QUESTION-11

$$\lim_{x\to\infty} 2^x \sin\frac{b}{2^x}$$

SOLUTION

$$\lim_{x\to\infty} 2^x \sin\frac{b}{2^x}$$

$$= \lim_{\theta\to 0} \frac{b}{\theta}\sin\theta$$

$$= b\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \qquad \left[\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1\right]$$

$$= b.1 = b$$

Let, $\frac{b}{2^x} = \theta$

$$\therefore 2^x = \frac{b}{\theta}$$

যখন $x \longrightarrow \infty$ তখন $\theta \to 0$

অনুশীলনী -9(A)

CONCEPT-6

সূচক ও লগারিদমিক নিয়ম সংক্রান্ত লিমিট

FORMULA

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ; |x| < 1$
- $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ; |x| < 1$
- $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots\cdots\cdots ; |x| < 1$
- $e^x + e^{-x} = 2\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\cdots\cdots\right); |x| < 1$
- $e^x - e^{-x} = 2\left(\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\cdots\cdots\right); |x| < 1$
- $a^x = 1 + \frac{x}{1!}\ln a + \frac{x^2}{2!}(\ln a)^2 + \frac{x^3}{3!}(\ln a)^3 + \cdots\cdots ; |x| < 1$

অনুশীলনী -9(A)

CONCEPT-6 সূচক ও লগারিদমিক নিয়ম সংক্রান্ত লিমিট

FORMULA

- $a^{-x} = 1 - \frac{x}{1!}\ln a + \frac{x^2}{2!}(\ln a)^2 - \frac{x^3}{3!}(\ln a)^3 + \cdots\cdots; |x| < 1$
- $\log_e(1+x)$ বা $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\cdots; |x| < 1$
- $\log_e(1-x)$ বা $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots\cdots; |x| < 1$
- $\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{b}{x}}$ বা $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{x}$ এর সহগ $\times \frac{1}{x}$ এর সহগ $= e^{ab}$

অনুশীলনী -9(A)

প্রমাণ কর যে, $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

ধরি, $P = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$\Rightarrow \ln P = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$\Rightarrow \ln P = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(1+x)$

$\Rightarrow \ln P = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\cdots\right)$

$\Rightarrow \ln P = \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \cdots\cdots\right)$

$\Rightarrow \ln P = 1$

$\Rightarrow \log e^P = 1$

$\therefore P = e \quad \because [\log 2^x = y \Rightarrow x = 2^y]$

$\therefore \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

অনুশীলনী -9(A)

CONCEPT-7: ত্রিকোণমিতিক ও বীজগাণিতিক ফাংশন এর মিশ্রণ সংক্রান্ত লিমিট

QUESTION-12

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ নির্ণয় কর।

SOLUTION

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \left\{ x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\cdots \infty \right\}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left\{ 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - x \text{ এর উচ্চ ঘাতবিশিষ্ট পদসমূহ} \right\} = 1$$

অনুশীলনী -9(A)

CONCEPT-6 সূচক ও লগারিদমিক নিয়ম সংক্রান্ত লিমিট

FORMULA

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; |x| < 1$
- $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots\cdots\cdots; |x| < 1$
- $e^x + e^{-x} = 2\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\cdots\cdots\right); |x| < 1$
- $e^x - e^{-x} = 2\left(\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\cdots\cdots\right); |x| < 1$
- $a^x = 1 + \frac{x}{1!}\ln a + \frac{x^2}{2!}(\ln a)^2 + \frac{x^3}{3!}(\ln a)^3 + \cdots\cdots; |x| < 1$
- $a^{-x} = 1 - \frac{x}{1!}\ln a + \frac{x^2}{2!}(\ln a)^2 - \frac{x^3}{3!}(\ln a)^3 + \cdots\cdots; |x| < 1$

Problems

QUESTION-13

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ নির্ণয় কর।

SOLUTION

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left\{\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots\right) - 1\right\}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots\right)$$

$$= \lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + x \text{ এর উচ্চ ঘাতবিশিষ্ট পদসমূহ}\right) = 1$$

Problems

QUESTION-14

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$$

SOLUTION

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots\infty\right)+\left(1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots\infty\right)-2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\cdots\infty\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(2.\frac{1}{2!}+2.\frac{x^2}{4!}+\cdots\cdots\infty\right) \qquad =2.\frac{1}{2}+0+\cdots\ldots\ldots=1$$

Problems

QUESTION-15

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{ax}$$

SOLUTION

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{ax}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left\{1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\cdots\cdots\cdots\right\}-1}{ax}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x+\frac{4x^2}{2\times 1}+\cdots\cdots}{ax}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(2+2x+\cdots\ldots\ldots)}{ax}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(2+2x+\cdots\ldots\ldots)}{a} \qquad =\frac{(2+2.0+\cdots\ldots\ldots)}{a} \qquad =\frac{2}{a}$$

Problems

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}$$

যখন $x \to 0$ তখন $\sin x \to 0$

$$=\lim_{\sin x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}$$

$$=\lim_{\sin x\to0}\frac{\left(1+\sin x+\frac{\sin^2 x}{2!}+\frac{\sin^3 x}{3!}+\cdots\right)-1}{\sin x}$$

$$=1$$

Problems

QUESTION-16

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - a^{-x}}{x}$$

SOLUTION

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - a^{-x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{a^{-x}(a^{2x} - 1)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} a^{-x} . \lim_{x\to 0}\frac{(a^{2x} - 1)}{x}$$

$$= a^{-0} . \lim_{x\to 0}\frac{\left\{1 + \frac{2x}{1!}(\ln a) + \frac{(2x)^2}{2!}(\ln a)^2 + \frac{(2x)^3}{3!}(\ln a)^3 + \cdots\cdots\infty\right\} - 1}{x}$$

$$= 1. \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1!}(\ln a) + \frac{(2x)^2}{2!}(\ln a)^2 + \frac{(2x)^3}{3!}(\ln a)^3 + \cdots\cdots\infty}{x}$$

Problems

QUESTION-16

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - a^{-x}}{x}$$

SOLUTION

$$= 1.\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1!}(\ln a) + \frac{(2x)^2}{2!}(\ln a)^2 + \frac{(2x)^3}{3!}(\ln a)^3 + \cdots\cdots\infty}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x\ln a\left\{\frac{1}{1!} + \frac{2x}{2!}(\ln a) + \frac{(2x)^2}{3!}(\ln a)^2 + \cdots\cdots\infty\right\}}{x}$$

$$= 2\ln a\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{1!} + \frac{2x}{2!}(\ln a) + \frac{(2x)^2}{3!}(\ln a)^2 + \cdots\cdots\infty\right\}$$

$$= 2\ln a\,.\left\{\frac{1}{1!} + \frac{0}{2!}(\ln a) + \frac{(0)^2}{3!}(\ln a)^2 + \cdots\cdots\infty\right\}$$

$$= 2\ln a\,.\,1 \qquad = 2\ln a$$

Problems

QUESTION-17

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^3\theta-\tan^3\theta}{\tan\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos^3\theta}-\frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1-\sin^3\theta}{\cos^3\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^3\theta}{\cos^3\theta}\times\frac{\cos\theta}{sin\,\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^3\theta}{\cos^3\theta}\times\frac{\cos\theta}{sin\,\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^3\theta}{\cos^2\theta\,sin\,\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta+\sin^2\theta)}{\cos^2\theta\,sin\,\theta}$$

Problems

QUESTION-17

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sec^3\theta - \tan^3\theta}{\tan\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta+\sin^2\theta)}{(1^2-\sin^2\theta)\, sin\,\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta+\sin^2\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)\, sin\,\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin\frac{\pi}{2}+\sin^2\frac{\pi}{2}}{(1+\sin\frac{\pi}{2})\, sin\,\frac{\pi}{2}} = \frac{1+1+1^2}{(1+1).1} = \frac{3}{2}$$

Problems

QUESTION-18

$$\lim_{x\to y}\frac{\sin x-\sin y}{x-y}$$

$$=\lim_{x\to y}\frac{2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{x-y}$$

$$=2\lim_{x\to y}\cos\frac{x+y}{2}\ .\lim_{x\to y}\frac{\sin\frac{x-y}{2}}{x-y}$$

$$=2\cos\frac{y+y}{2}\ .\lim_{\frac{x-y}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{x-y}{2}}{\frac{x-y}{2}}\times\frac{x-y}{2}\times\frac{1}{x-y}$$

$$=2\cos\frac{2y}{2}\ .\frac{1}{2}\qquad=\cos y$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\ \sin\frac{x-y}{2}$$

$x\to y$

$x-y\to 0$

$$\lim_{x\to a} f(x)\,g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\ .\lim_{x\to a} g(x)$$

Problems

QUESTION-19

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 7x-\cos 9x}{\cos 3x-\cos 5x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{7x+9x}{2}\sin\frac{9x-7x}{2}}{2\sin\frac{3x+5x}{2}\sin\frac{3x-5x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x\,\sin x}{\sin 4x\,\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{\sin 4x}$$

$$\cos C-\cos D=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to 0}f(x)}{\lim_{x\to 0}g(x)}$$

$$=\frac{\lim_{8x\to 0}\frac{\sin 8x}{8x}.8x}{\lim_{8x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}.4x}$$

$$=\frac{1\times 2}{1\times 1}$$

$$=2$$

Problems

QUESTION-20

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x-\sin x}{\sin 6x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos\frac{7x+x}{2}\sin\frac{7x-x}{2}}{\sin 6x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 4x\sin 3x}{\sin 6x}$$

$$=2\times\frac{\lim\limits_{x\to 0}\cos 4x\ .\ \lim\limits_{3x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\ .\ 3x}{\lim\limits_{6x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}\ .\ 6x}$$

$$=\frac{2\times 1\times 1\times 3}{1\times 6}$$

$$=\frac{6}{6}$$

$$=1$$

Problems

QUESTION-21

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(\cos x + \cos 2x)}{\sin x}$$

$$= \frac{\lim_{x \to 0} x(\cos x + \cos 2x)}{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \times x}$$

$$= \lim_{x \to 0} (\cos x + \cos 2x)$$

$$= \cos 0 + \cos(2 \times 0)$$

$$= 1 + 1$$

$$= 2$$

Problems

QUESTION-22

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n.n\left(1+\frac{1}{n}\right)n(2+\frac{1}{n})}{6n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+0)\times(2+0)}{6} \quad = \frac{2}{6} \quad = \frac{1}{3}$$

Problems

QUESTION-23

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{r=1}^{n} r^3$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots..r^3)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \left\{\frac{n.n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2}\right\}^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \frac{n^2.n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{4}$$

$$\sum_{r=1}^{n} r^3$$

$$= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots..r^3$$

$$= \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{4}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^2}{4}$$

$$= \frac{1}{4}$$

Problems

$$S_n = \sum_{n-1} n^2 + 2\sum_{n=1} n$$

QUESTION-24

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1.3 + 2.4 + \cdots + n(n+2)}{n^3}$$

$$U_1 = 1.3 = 3 = 1^2 + 2.1$$

$$U_2 = 2.4 = 8 = 2^2 + 2\,.\,2$$

....

....

....

$$U_n = n(n+2) = n^2 + 2n$$

$$U_1 + U_2 + U_3 + \cdots U_n = (1^2 + 2^2 + \cdots n^2) + 2(1 + 2 + \cdots + n)$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= n(n+1)\left\{\frac{(2n+1)}{6} + 1\right\}$$

$$= n \cdot (n+1)\left(\frac{2n+1+6}{6}\right)$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

Problems

QUESTION-24

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1.3 + 2.4 + \cdots + n(n+2)}{n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}}{n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+7)}{6n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n.n\left(1+\frac{1}{n}\right)n(2+\frac{7}{n})}{6n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+0)\times(2+0)}{6}$$

$$= \frac{2}{6}$$

$$= \frac{1}{3}$$

Problems

QUESTION-25

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}3x}{4x}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\frac{4}{3}\sin\theta}$$

$$= \frac{3}{4}\times\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{3}{4}$$

ধরি,

$$\sin^{-1}3\,x = \theta$$

$$\Rightarrow 3x = \sin\theta$$

$$\Rightarrow 3x4x = 4x\sin\theta$$

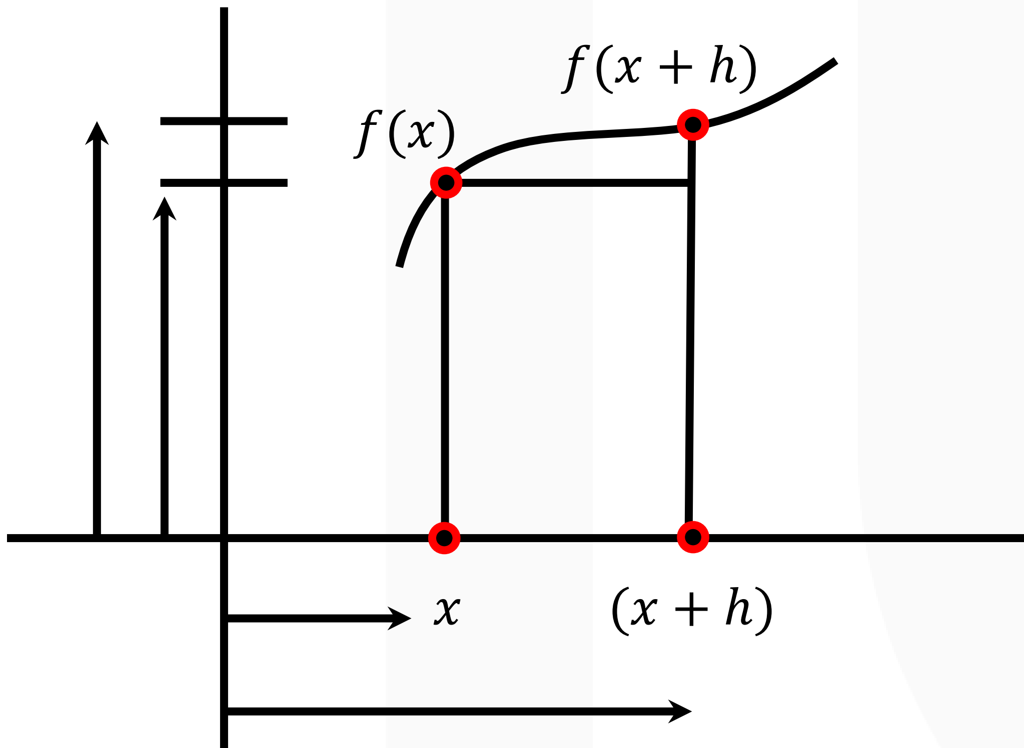
$$\Rightarrow 4x = \frac{4}{3}\sin\theta$$

যখন $x \to 0$ $\theta \to 0$

মূল নিয়মে অন্তরীকরণ

স্বাধীন চলক x এর পরিবর্তনের সাপেক্ষে অধীন চলক y এর ক্ষুদ্রতম পরিবর্তনের হার কে অন্তরজ (derivative) বলে।

অন্তরীকরণ → অন্তরজ নির্ণয়ের প্রক্রিয়া



$$\Delta x = x + h - x$$
$$= h$$

$$\Delta y = f(x+h) - f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

মূল নিয়মে অন্তরীকরণ

$$f(x) = x^n$$

$$\therefore f(x+h) = (x+h)^n$$

$$= \left\{x(1+\frac{h}{x})\right\}^n$$

$$= x^n(1+\frac{h}{x})^n$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^n(1+\frac{h}{x})^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^n}{h}\left\{\left(1+\frac{h}{x}\right)^n - 1\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^n}{h}\left\{(1+n\frac{h}{x}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{h^2}{x^2}+\cdots)-1\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^n}{h}\left[\frac{nh}{x}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{h^2}{x^2}+\cdots\right]$$

মূল নিয়মে অন্তরীকরণ

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^n}{h} \times h \left[n\frac{1}{x} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{h}{x^2} + \cdots \right]$$

$$= x^n \left[n\frac{1}{x} + 0 + \cdots \right]$$

$$= x^n . n . x^{-1}$$

$$= n . x^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$$

মূল নিয়মে অন্তরীকরণ

a^x

$f(x) = a^x$

$$f(x+h) = a^{x+h}$$
$$= a^x . a^h$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^x . a^h - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^x}{h} \{a^h - 1\}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^x}{h} \{a^h - 1\}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^x}{h} \left[\left\{ 1 + h \ln a + \frac{h^2}{2!} (\ln a)^2 \right\} - 1 \right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^x}{\cancel{h}} \times \cancel{h} \left\{ \ln a + \frac{h}{2!} (\ln a)^2 + \cdots \right\}$$

$$= a^x \{\ln a + 0 + \cdots\}$$

$$= a^x \ln a$$

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$$

মূল নিয়মে অন্তরীকরণ

$\ln x$

$f(x) = \ln(x)$

$f(x+h) = \ln(x+h)$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\ln\ (x+h) - \ln\ (x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{h}{x} - \frac{1}{2}\frac{h^2}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{h^3}{x^3} - \cdots\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\times h\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{h}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{h^2}{x^3} - \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{x} - 0 + 0 - \cdots$$

$$= \frac{1}{x}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}}$$

মূল নিয়মে অন্তরীকরণ

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \ldots \ldots$$

x^n
e^x
a^n
$\ln x$
$\log_e x$

} HW

DOWNLOAD THE APP

মূল নিয়মে অন্তরীকরণ

10 MINUTE SCHOOL

$\sin x$

$f(x) = \sin(x)$

$f(x+h) = \sin(x+h)$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{x+h+x}{2}\sin\frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$= \lim_{\frac{h}{2}\to 0}\frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\ \sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= 2\cos\frac{2x+0}{2}\lim_{\frac{h}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\times\frac{h}{2}\times\frac{1}{h}$$

$$= \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

মূল নিয়মে অন্তরীকরণ

$$f(x) = \tan x$$

$$f(x+h) = \tan(x+h)$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\tan(x+h) - \tan(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin x}{\cos x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{\sin(x+h)\cos x - \sin x \cos(x+h)}{\cos(x+h)\cos x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{\sin(x+h-x)}{\cos(x+h)\cos x}\right]$$

$$= \frac{\lim_{h\to 0} \frac{sinh}{h}}{\lim_{h\to 0} \cos(x+h) . \cos x}$$

$$= \frac{1}{\cos(x+0) . \cos x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$$

Formulas

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_{10} x) = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln 10} \quad ***$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\log_{10} x = \log_e x \times \log_{10} e$$

$$= \log x \times \frac{1}{\log_e 10}$$

$$= \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Formulas

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -cosec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{cosec}\, x) = -\mathrm{cosec}\, x \cot x$$

CO থাকলে (Negative)

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

$$\frac{d}{dx} c\, f(x) = c \frac{d}{dx} f(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

অন্তরীকরণ

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{\mathrm{x}\ln a}$$

অন্তরীকরণ

u, v } x এর ফাংশন

(1) $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + \log_a x) = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(\log_a x)$$

$$= 2x + \frac{1}{\text{xln}\, a}$$

অন্তরীকরণ

$$(2)\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a x \times \ln x) = \log_a x\,\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\,\frac{d}{dx}(\log_a x)$$

$$= \log_a x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot \frac{1}{x \ln a}$$

$$= \frac{1}{x}\left(\log_a x + \frac{\ln x}{\ln a}\right)$$

অন্তরীকরণ

(3) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{\ln x}\right) = \frac{\ln x \frac{d}{dx}(x^n) - x^n \cdot \frac{d}{dx}(\ln x)}{(\ln x)^2}$$

$$= \frac{\ln x\, n \cdot x^{n-1} - x^n \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

$$= \frac{\ln x\, n x^{n-1} - x^n . x^{-1}}{(\ln x)^2}$$

$$= \frac{n \cdot \ln x \cdot x^{n-1} - x^{n-1}}{(\ln x)^2}$$

$$= \frac{x^{n-1}(n \ln x - 1)}{(\ln x)^2}$$

Ans.

অন্তরীকরণ

4. $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$

$$= \frac{(\sqrt{x}-1)\frac{d}{dx}(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}+1)\frac{d}{dx}(\sqrt{x}-1)}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-1)\frac{1}{2\sqrt{x}} - (\sqrt{x}+1)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1-\sqrt{x}-1)}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(-2)}{(\sqrt{x}-1)^2}$$

$$= \frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$$

Ans.

অন্তরীকরণ

5. $\frac{d}{dx}\left(\frac{x\sin x}{1+\cos x}\right)$ *****

$$= \frac{(1+\cos x)\frac{d}{dx}(x\ \sin x) - x\sin x\frac{d}{dx}(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{(1+\cos x)(x\,cos\,\mathrm{x}+\sin x) - x\sin x\,(-\sin \mathrm{x})}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{x cos\,x+\sin x + x\cos^2 x + \sin x\cos \mathrm{x} + x\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{x + x\cos x + \sin \mathrm{x} + \sin x\,cos\,x}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{x(1+\cos x) + \sin x\,(1+\cos x)}{(1+\cos x)}$$

$$= \frac{(1+\cos x)(x+\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{(1+\cos x)(x+\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{x+\sin x}{1+\cos x}$$

Ans.

অন্তরীকরণ

6. $\frac{d}{dx}\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}$

এখানে, $\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}$

$$=\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}}$$

$$=\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}}$$

$$=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}$$

$$=1$$

Ans.

$$\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\sin x}}$$

H.W

অন্তরীকরণ

7. $\dfrac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x}$

$= \dfrac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x}$

$= \dfrac{\cos x - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{1 - \cos x}$

$= \dfrac{\cos x - \cos^2 x + \sin^2 x}{1 - \cos x}$

$= \dfrac{\cos x\,(1 - \cos x) + (1 - \cos^2 x)}{1 - \cos x}$

$= \dfrac{\cos x\,(1 - \cos x) + (1 + \cos x).\,(1 - \cos x)}{1 - \cos x}$

$= \dfrac{(1 - \cos x) + (\cos x + 1 + \cos x)}{1 - \cos x}$

$= 2\cos x + 1$

$\therefore \dfrac{d}{dx}(2\cos x + 1) = -2\sin x$

Ans.

DOWNLOAD THE APP

সংযোজিত ফাংশনের অন্তরজ

10 MINUTE SCHOOL

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \cdots \cdots$$ [Chain Rule]

$$y = \ln(\sin 2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin 2x} . \cos 2x . 2$$

$$= 2 \cot 2x$$

$y = \ln u$ $\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} = \frac{1}{\sin 2x}$	$u = \sin v$ $\frac{du}{dv} = \cos v$ $= \cos 2x$	$v = 2x$ $\frac{dv}{dx} = 2$

অন্তরীকরণ

$8.\ y = \ln(\sin 2x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin 2x}\frac{d}{dx}(\sin 2x)$$

$$= \frac{1}{\sin 2x}.\cos 2x\frac{d}{dx}(2x)$$

$$= 2\cot 2x$$

Ans.

অন্তরীকরণ

9. $y = \cos^2 x$

$$\frac{dy}{dx} = 2\cos x \frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= 2\cos x\,(-\sin x)$$

$$= -2\sin x \cos x$$

$$= -2\sin 2x$$

Ans.

অন্তরীকরণ

10. $y = \cos\sqrt{x}$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin\sqrt{x}\,\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$= -\sin\sqrt{x}\,.\,\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

Ans.

অন্তরীকরণ

11. $y = \sin^2(\ln x)^2$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{\sin^2(\ln x)^2\}$$

$$= 2\sin(\ln x)^2 \frac{d}{dx}\{\sin(\ln x)^2\}$$

$$= 2\sin(\ln x)^2 . \cos(\ln x)^2 \frac{d}{dx}(\ln x)^2$$

$$= 2\sin(\ln x)^2 . \cos(\ln x)^2\, 2\ln x \frac{d}{dx}(\ln x)$$

$$= 2 \times \boxed{2\sin(\ln x)^2 . \cos(\ln x)^2} \ln x . \frac{1}{x}$$

$$= \frac{2}{x} \sin 2(\ln x)^2 \ln x$$

Ans.

অন্তরীকরণ

12. $\dfrac{x\sin x}{1+\cos x}$

$$=\frac{x.2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} \quad \left[1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}\right]$$

$$=x\tan\frac{x}{2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x\tan\frac{x}{2}\right)$$

$$=x.\frac{d}{dx}\tan\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}.\frac{d}{dx}x$$

$$=x.\sec^2\frac{x}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right)+\tan\frac{x}{2}.1$$

$$=x.\sec^2\frac{x}{2}.\frac{1}{2}+\tan\frac{x}{2}$$

$$=\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}$$

Ans.

HOME WORK

1. $2x^\circ \cos 3x^\circ$

2. $e^{2 \ln \tan 5x}$

3. $\ln \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$

4. $\sin^2[\ln(\sec x)]$

5. $\cos(\ln x) + \ln(\tan x)$

অন্তরীকরণ

$$2x^\circ \cos 3x^\circ$$

$$= 2\frac{\pi x}{180}\cos\frac{3\pi x}{180}$$

$$= \frac{\pi x}{90}\cos\frac{\pi x}{60}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi x}{90}\cos\frac{\pi x}{60}\right)$$

$$= \frac{\pi x}{90}\frac{d}{dx}\left(\cos\frac{\pi x}{60}\right) + \cos\left(\frac{\pi x}{60}\right)\frac{d}{dx}\frac{\pi x}{90}$$

$$= \frac{\pi x}{90}\left(-\sin\frac{\pi x}{60}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi x}{60}\right) + \cos\left(\frac{\pi x}{60}\right).\frac{\pi}{90}$$

$$= -\frac{\pi x}{90}\left(\sin\frac{\pi x}{60}\right)\frac{\pi}{60} + \frac{\pi}{90}\cos\left(\frac{\pi x}{60}\right).$$

$$= \frac{\pi}{90}\left(\cos\left(\frac{\pi x}{60}\right) - \frac{\pi x}{90}\sin\frac{\pi x}{60}\right)$$

বিপরীত ফাংশনের অন্তরজ

$$y = \sin x \quad \therefore x = \sin^{-1} y$$

$$(x, y)^{-1} = (y, x)$$

(কোণ, মান)$^{-1}$ = (মান, কোণ)

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

বিপরীত ফাংশনের অন্তরজ

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x)$$

$$\therefore y = \sin^{-1} x$$

$$\therefore x = \sin y$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \cos y$$

$$= \sqrt{\cos^2 y}$$

$$= \sqrt{1 - sin^2 y}$$

$$= \sqrt{1 - x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Formulas

1. $$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2. $$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$$

3. $$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

4. $$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

5. $$\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

6. $$\frac{d}{dx}(\mathrm{cosec}^{-1}x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Caution : $\sin^{-1}x \neq \frac{1}{\sin x}$

$$\sin(\sin^{-1}x) = x = \sin^{-1}(\sin x)$$

বিপরীত ফাংশনের অন্তরজ

1. $\frac{dy}{dx}(\tan^{-1} e^{x})$

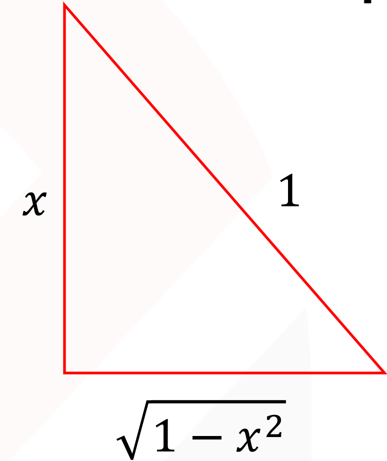
$= \frac{1}{1+(e^{x})^{2}} \frac{d}{dx}(e^{x})$

$= \frac{1}{1+e^{2x}} . e^{x}$

$= \frac{e^{x}}{1+e^{2x}}$

বিপরীত ফাংশনের অন্তরজ

2. $\frac{d}{dx}\tan(\sin^{-1}x)$



$$= \frac{d}{dx}\tan\left(\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= \frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)\frac{d}{dx}(x) - x\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\right)}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}\cdot 1 - x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\frac{d}{dx}(1-x^2)}{1-x^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2} - \frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}(0-2x)}{1-x^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

বিপরীত ফাংশনের অন্তরজ

$$= \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$= \frac{\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 + x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$= \frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{(1-x^2)^1(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$$

$$= (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

বিপরীত ফাংশনের অন্তরজ

3. $\sqrt{\sin^{-1} x^5}$

$$= \frac{d}{dx}\left(\sqrt{\sin^{-1} x^5}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin^{-1} x^5}} \cdot \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x^5)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin^{-1} x^5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(x^5)^2}} \frac{d}{dx}(x^5)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin^{-1} x^5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^{10}}} \cdot 5x^4$$

$$= \frac{5x^4}{2\sqrt{\sin^{-1} x^5} \cdot \sqrt{1-x^{10}}}$$

বিপরীত ফাংশনের অন্তরজ

ধরি,

$$2\sqrt{x} = \tan\theta$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}(2\sqrt{x})$$

4. $\tan^{-1}\dfrac{4\sqrt{x}}{1-4x}$

$$= \tan^{-1}\frac{2.2\sqrt{x}}{1-(2\sqrt{x})^2}$$

$$= \tan^{-1}\frac{2.\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$= \tan^{-1}(\tan 2\theta)$$

$$= 2\theta$$

$$= 2\tan^{-1}(2\sqrt{x})$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(2\tan^{-1}(2\sqrt{x}))$$

$$= 2.\frac{1}{1+(2\sqrt{x})^2}\frac{d}{dx}(2\sqrt{x})$$

$$= 2.\frac{1}{1+4x}.2.\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x}(1+4x)}$$

বিপরীত ফাংশনের অন্তরজ

ধরি,

$$x = \sin\theta$$

$$\therefore \theta = \sin^{-1} x$$

5. $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

$$= \sin^{-1}\left(2\,sin\,\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\right)$$

$$= \sin^{-1}\left(2\sin\theta\cdot\sqrt{\cos^2\theta}\right)$$

$$= \sin^{-1}(2\sin\theta\cdot\cos\theta)$$

$$= \sin^{-1}(\sin 2\theta)$$

$$= 2\theta$$

$$= 2\sin^{-1} x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(2\sin^{-1} x) = 2.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

বিপরীত ফাংশনের অন্তরজ

ধরি,

$$x = \tan\theta$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1} x$$

6. $\dfrac{d}{dx}\cot^{-1}\dfrac{1+x}{1-x}$

$$= \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\theta}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\theta}\right\}$$

$$= \frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right\}$$

$$= \frac{d}{dx}\left\{\frac{\pi}{4} - \theta\right\}$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{4} - \tan^{-1} x\right)$$

$$= 0 - \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{-1}{1+x^2}$$

বিপরীত ফাংশনের অন্তরজ

ধরি,

$$\frac{bx}{a} = \tan\theta$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{bx}{a}\right)$$

7. $\tan^{-1}\dfrac{a+bx}{a-bx}$

$$= \tan^{-1}\frac{a\left(1+\frac{bx}{a}\right)}{a\left(1-\frac{bx}{a}\right)}$$

$$= \tan^{-1}\frac{1+\frac{bx}{a}}{1-\frac{bx}{a}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\theta}{1-\tan\frac{\pi}{4}.\tan\theta}$$

$$= \tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}+\theta$$

$$= \frac{\pi}{4}+\tan^{-1}\left(\frac{bx}{a}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{4}+\tan^{-1}\left(\frac{bx}{a}\right)\right)$$

$$= 0+\frac{1}{a+\left(\frac{bx}{a}\right)^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{bx}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{1+\frac{b^2x^2}{a^2}}\times\frac{b}{a}$$

$$= \frac{1}{\frac{a^2+b^2x^2}{a^2}}\times\frac{b}{a}$$

$$= \frac{a\,\cancel{a^2}}{a^2+b^2x^2}\times\frac{b}{\cancel{a}}$$

$$= \frac{ab}{a^2+b^2x^2}$$

বিপরীত ফাংশনের অন্তরজ

ধরি,

$x = \cos 2\theta$

$\therefore 2\theta = \cos^{-1} x$

8. $\sin\left(2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$

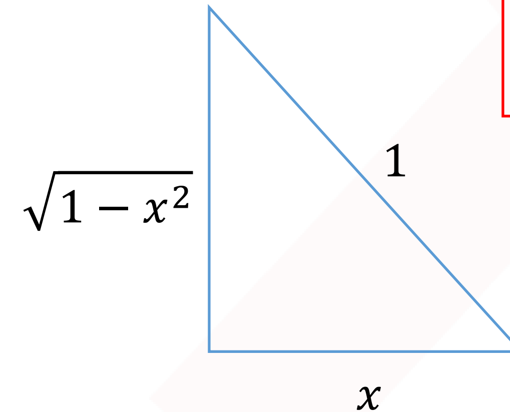
$= \sin\left(2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}\right)$

$= \sin\left(2\tan^{-1}\sqrt{\frac{2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta}}\right)$

$= \sin\left(2\tan^{-1}\sqrt{\tan^2\theta}\right)$

$= \sin(2\tan^{-1}\tan\theta)$

$= \sin(2\theta)$



$= \sin(\cos^{-1} x)$

$= \sin(\sin^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{1})$

$= \sqrt{1-x^2}$

বিপরীত ফাংশনের অন্তরজ

$$\frac{dy}{dx}(\sqrt{1-x^2})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\frac{d}{dx}(1-x^2)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \times (0-2x)$$

$$= \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

HOME WORK

1. $\sec^{-1}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$

2. $\tan^{-1}\frac{2\sqrt{x}}{1-x}$

3. $\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

4. $\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$

5. $\tan^{-1}\left(\frac{a\cos x - b\sin x)}{a\cos x + b\sin x)}\right.$

6. $\cos^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

7. $\sin^{-1}\left(2ax\sqrt{1-a^2x^2}\right.$

8. $(x^2+1)\tan^{-1}x - x$

প্রাকৃতিক (e ভিত্তিক) লগারিদমের সাহায্যে অন্তরজ

9. $y = x^{x^{x^{\cdot}}}$

$\Rightarrow \ln y = \ln x^{x^x}$

$\Rightarrow ln\, y = x^x\, ln\, x$

$\Rightarrow \ln(\ln y) = \ln(x^x \cdot \ln x)$

$\Rightarrow \ln(\ln y) = \ln x^x + \ln(\ln x)$

$\ln a^p = p \ln a$

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$

$\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$

প্রাকৃতিক (e ভিত্তিক) লগারিদমের সাহায্যে অন্তরজ

$$\Rightarrow \ln(\ln y) = x\ln x + \ln(\ln x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\ln(\ln y) = \frac{d}{dx}\{x\ln x + \ln(\ln x)\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln y}\frac{d}{dx}(\ln y) = x\frac{d}{dx}\ln x + \ln x\frac{dx}{dx} + \frac{1}{\ln x}\frac{d}{dx}\ln x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln y}\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{x} + \ln x\cdot 1 + \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y\ln y}\frac{dy}{dx} = \left(1 + \ln x + \frac{1}{x\ln x}\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y\ln y\left(1 + \ln x + \frac{1}{x\ln x}\right)$$

প্রাকৃতিক (e ভিত্তিক) লগারিদমের সাহায্যে অন্তরজ

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^{x^x}\, ln\, x^{x^x}\left(1 + \ln x + \frac{1}{x \ln x}\right)$$

$$= x^{x^x}.\, x^x \ln x\left(1 + \ln x + \frac{1}{x \ln x}\right)$$

প্রাকৃতিক (e ভিত্তিক) লগারিদমের সাহায্যে অন্তরজ

10. $x^{\cos^{-1} x}$

$$y = x^{\cos^{-1} x}$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln x^{\cos^{-1} x}$$

$$\Rightarrow \ln y = \cos^{-1} x \ln x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \cos^{-1} x \frac{d}{dx} \ln x + \ln x \frac{d}{dx}(\cos^{-1} x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y(\cos^{-1} x \frac{d}{dx} \ln x + \ln x \, . \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}})$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^{\cos^{-1} x}(\cos^{-1} x \frac{d}{dx} \ln x + . \frac{-\ln x}{\sqrt{1-x^2}})$$

প্রাকৃতিক (e ভিত্তিক) লগারিদমের সাহায্যে অন্তরজ

x $\cos^{-1} x$ → ছোট ভাই

বড় ভাই

$$x^{\cos^{-1} x}\left(\cos^{-1} x \frac{d}{dx} \ln x + \ln x \frac{d}{dx} \cos^{-1} x\right)$$

$$= x^{\cos^{-1} x}\left(\cos^{-1} x \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$$

প্রাকৃতিক (e ভিত্তিক) লগারিদমের সাহায্যে অন্তরজ

$$\frac{d}{dx}(\sin x^{\tan x})$$

$$= \sin x^{\tan x}\left(\tan x \, . \frac{d}{dx}\ln \sin x + \ln \sin x \, . \frac{d}{dx}\tan x\right)$$

$$= \sin x^{\tan x}\left(\tan x \, . \frac{1}{\sin x} . \cos x + \ln \sin x \, . \sec^2 x\right)$$

$$y = \sin x^{\tan x}$$

$$\ln y = \tan x \ln \sin x$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \tan x \frac{d}{dx}(\ln \sin x)$$

HOME WORK

1. $\ln\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

2. $\ln\dfrac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 . e^x}$ [ln নির্ণয় করবে]

3. $(x^x)^x$

4. $\log_{\cos x}\tan x$

5. $e^{x^2}+x^{x^2}$

6. $a^{\ln\cos x}$

অন্তরীকরণ

1. $\frac{d}{dx}\{\tan^{-1}(\sec x + \tan x)\}$

$$= \frac{1}{1 + (\sec x + \tan x)^2} \frac{d}{dx}(\sec x + \tan x)$$

$$= \frac{1}{1 + \sec^2 x + \tan^2 x + 2\sec x \tan x}(\sec x \tan x + \sec^2 x)$$

$$= \frac{1(\sec x \tan x + \sec^2 x)}{1 + \sec^2 x + \sec^2 x + 2\sec x \tan x}$$

$$= \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{2\sec^2 x + 2\sec x \tan x}$$

$$= \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{2(\sec^2 x + \sec x \tan x)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

অন্তরীকরণ

2. $\frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x + a\sin x}\right)\right\}$

$$= \frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\left\{\frac{b\cos x\left(\frac{a}{b} - \frac{b\sin x}{b\cos x}\right)}{b\cos x\left(1 + \frac{a\sin x}{b\cos x}\right)}\right\}\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{a/b - \tan x}{1 + \frac{a}{b}\tan x}\right)\right\}$$

ধরি, $\frac{a}{b} = \tan\theta$

$\therefore \theta = \tan^{-1}\frac{a}{b}$

$$= \frac{d}{dx}\tan^{-1}\left(\frac{\tan\theta - \tan x}{1 + \tan\theta \tan}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\tan^{-1}(\tan(\theta - x))$$

$$= \frac{d}{dx}(\theta - x)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\frac{a}{b} - x\right)$$

$$= 0 - 1$$

$$= -1$$

অন্তরীকরণ

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$$

3. $y = \log_{\cos x} \tan x$

$$= \log_e tan\ x \times \log_{\cos x} e$$

$$= \ln \tan x \ \frac{1}{\log_e \cos x}$$

$$= \frac{\ln \tan x}{\ln \cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln \cos x \frac{d}{dx}(\ln tan\ \ x) - \ln \tan \mathrm{x} \frac{d}{dx}(\ln \cos x)}{(\ln \cos x)^2}$$

$$= \frac{\ln \cos x \, . \frac{1}{\tan x} \frac{d}{dx}(\tan x) - \ln \tan \mathrm{x} \, . \frac{1}{\cos x} \frac{d}{dx}(\cos x)}{(\ln \cos x)^2}$$

$$= \frac{\ln \cos x \, . \frac{\sec^2 x}{\tan x} - \ln \tan \mathrm{x} \, . \frac{-\sin x}{\cos x}}{(\ln \cos x)^2}$$

$$= \frac{\ln \cos x \, . \frac{\cos x}{\sin x} \frac{1}{\cos^2 x} + \ln \tan \mathrm{x} \, . \tan x}{(\ln \cos x)^2}$$

$$= \frac{(\ln \cos x) . cosec\ \mathrm{x} \, . \sec \mathrm{x} + \ln \tan \mathrm{x} \, . \tan x}{(\ln \cos x)^2}$$

অন্তরীকরণ

ব্যক্ত ও অব্যক্ত ফাংশন

Explicit   Implicit

$y = x^2 + 3x - 2$ ব্যক্ত Function

$x^2 + xy + y^2 = 0$ অব্যক্ত

$f(x, y) = 0$

4.

$$\frac{d}{dx}(x^2 + xy + y^2) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$\Rightarrow 2x + \left\{x.\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dy}\right\} + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow 2x + x\frac{dy}{dx} + y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(x + 2y) = -(2x + y)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y}{x + 2y}$$

অন্তরীকরণ

গুটিবাজিঃ $\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x)}{f(y)} = -\frac{y \text{ স্থির } x \text{ অস্থির}}{x \text{ স্থির } y \text{ অস্থির}}$

$$x^2 + xy + y^2 = 0$$

$y \longrightarrow constant$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{x}^2 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}(y^2)}{\frac{d}{dy}x^2 + x\frac{dy}{dy} + \frac{d}{dy}y^2}$$

$$= -\frac{2x + y + 0}{0 + x + 2y}$$

$$= -\frac{2x + y}{x + 2y}$$

অন্তরীকরণ

5. $y = \sin(x+y)^2$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos(x+y)^2 \frac{d}{dx}(x+y)^2$$

$$= \cos(x+y)^2\, 2(x+y)\, \frac{d}{dx}\,(x+y)$$

$$= \cos(x+y)^2\, 2(x+y)\, \left(1+\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \cos(x+y)^2\, 2(x+y) + \frac{dy}{dx}\{\cos(x+y)^2\, 2(x+y)\}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx}\{2(x+y)\cos^2(x+y)\} = 2(x+y)\cos^2(x+y)$$

অন্তরীকরণ

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\{1-2(x+y)\,cos(x+y)^2\} = 2(x+y)\,cos(x+y)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{2(x+y)\cos^2(x+y)}{1-2(x+y)\,\mathrm{ces}(x+y)^2}$$

$$= \frac{2(x+y)\sqrt{\cos^2(x+y)^2}}{1-2(x+y)\sqrt{\cos^2(x+y)^2}}$$

$$= \frac{2(x+y)\sqrt{1-\sin^2(x+y)^2}}{1-2(x+y)\sqrt{1-\sin^2(x+y)^2}}$$

$$= \frac{2(x+y)\sqrt{1-y^2}}{1-2(x+y)\sqrt{1-y^2}}$$

অন্তরীকরণ

$$y = \sin(x+y)^2$$

$$\Rightarrow y - \sin(x+y)^2 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x)}{f(y)}$$

$$= \frac{0 - \cos(x+y)^2 . 2(x+y)(1+0)}{1 - \cos(x+y)^2 . 2(x+y)(0+1)}$$

$$= \frac{2(x+y)\cos(x+y)^2}{1 - 2(x+y)\cos(x+y)^2} \quad \text{(রাফ)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\{1 - 2(x+y)\cos(x+y)^2\ \}$$

$$= 2(x+y)\cos(x+y)^2$$

অন্তরীকরণ

6. $x^y \cdot y^x = 1$

$\Rightarrow \ln(x^y . y^x) = \ln 1$

$\Rightarrow \ln x^y + \ln y^x = 0$

$\Rightarrow y \ln x + x \ln y = 0$

$\Rightarrow y \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot \frac{dy}{dx} + x \cdot \frac{1}{(y)} \frac{dy}{dx} + \ln y \cdot 1 = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\ln x + \frac{x}{y}\right) = -\left(\frac{y}{x} + \ln y\right)$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{y}{x} + \ln y}{\ln x + \frac{x}{y}}$$

$x^y \cdot y^x - 1 = 0$

গুটিবাজিঃ $\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x)}{f(y)}$

অন্তরীকরণ



$\ln(a+b) = \ln a + \ln b$

7. $x^y + y^x = a^b$

ধরি,

$x^y = p$ এবং $y^x = q$

$\therefore p + q = a^b$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}(p+q) = \frac{d}{dx}(a^b)$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}p + \frac{d}{dx}q = 0 \dots\dots (i)$

$\therefore p = x^y$

$\Rightarrow \ln p = y \ln x$

$\Rightarrow \frac{1}{p}.\frac{dp}{dx} = y.\frac{1}{x} + \ln x \frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = p\left(\frac{y}{x} + \ln x \frac{dy}{dx}\right)$

$= x^y\left(yx^{-1} + \ln x \frac{dy}{dx}\right) \dots\dots\dots (ii)$

অন্তরীকরণ

$$q = y^x$$

$$\Rightarrow \ln q = x \ln y$$

$$\Rightarrow \frac{1}{q}\frac{dq}{dx} = x \cdot \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + \ln y \cdot 1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = q\left(\frac{x}{y}\frac{d}{dx} + \ln y\right)$$

$$= y^x\left(xy^{-1}\frac{dy}{dx} + \ln y\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots..(iii)$$

(i) নং হতে,

$$x^y\left(yx^{-1} + \ln x\frac{dy}{dx}\right) + y^x\left(xy^{-1}\frac{dy}{dx} + \ln y\right) = 0$$

$$\Rightarrow x^y yx^{-1} + x^y \ln x\frac{dy}{dx} + y^x . xy^{-1}\frac{dy}{dx} + y^x \ln y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(x^y \ln x + y^{x-1}.x) = -(yx^{y-1} + y^x \ln y)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{yx^{y-1} + y^x \ln y}{xy^{x-1} + x^y \ln x}$$

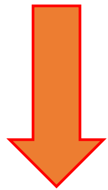
অন্তরীকরণ

8. $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x} + \cdots}}$

$\Rightarrow y^2 = \sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x} + \cdots}}$

$\Rightarrow y^2 = \sin x + y$

$\Rightarrow y^2 - y - \sin x = 0$



করে নাও

9. $y = x^{x^{x^{x''}}}$

$\Rightarrow y = x^y$

$\Rightarrow y - x^y = 0$



করে নাও

পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ

$\frac{dy}{dx} | f'(x) | \; y_1 \longrightarrow$ ১ম বার

$\frac{d^2y}{dx^2} | f''(x) | \; y_2 \longrightarrow$ ২য় বার

$\frac{d^3y}{dx^3} | f'''(x) | \; y_3 \longrightarrow$ ৩য় বার

… … | … … … … … … … . .

… … | … … … … … … … . .

$\frac{d^ny}{dx^n} | f^n(x) | \leftrightarrow y_n$

> অসীম সংখ্যাক ব্যবকলন

> ৩ বা ৪ বার অন্তরীকরণ করার পর একটা প্যাটার্ন পাওয়া যায়



Common pattern

অন্তরীকরণ

10. $y = x^n$

$\Rightarrow y_1 = nx^{n-1}$

$\Rightarrow y_2 = n(n-1)x^{n-2}$

$\Rightarrow y_3 = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\Rightarrow y_n = n(n-1)(n-2)(n-3)\dots\dots\dots 3.2.1\ x^{n-n}$

$= n!$

11. $y = x^{99}$

$y_{99} = 99!\, x^0$

$y_{100} = ?$ $\quad y_{10000} = 0$

Problems

1. $y = \dfrac{\ln x}{x}$ হলে দেখাও যে, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$

Solution:

$$y = \frac{\ln x}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x.\frac{d}{dx}(\ln x) - \ln x\,.\frac{d}{dx}\,x}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x.\frac{1}{x} - \ln x\,.\,1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 \;- \ln x}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^2\left(0 - \frac{1}{x}\right) - (1 - \ln x).\,2x}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{\overset{x}{\cancel{x^2}}\left(-\frac{1}{\cancel{x}}\right) - 2x + 2x\ln x}{x^4}$$

$$= \frac{-x - 2x + 2x\ln x}{x^4}$$

$$= \frac{2x\ln x - 3x}{x^4}$$

Problems

1. $y = \frac{\ln x}{x}$ হলে দেখাও যে, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$

Solution:

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^2\left(0 - \frac{1}{x}\right) - (1 - \ln x).2x}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{\overset{x}{\cancel{x^2}}\left(-\frac{1}{\cancel{x}}\right) - 2x + 2x\ln x}{x^4}$$

$$= \frac{-x - 2x + 2x\ln x}{x^4}$$

$$= \frac{2x\ln x - 3x}{x^4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x(2\ln x - 3)}{x^4}$$

$$= \frac{2\ln x - 3}{x^3}$$

Problems

2. $y = \sqrt{4 + 3\sin x}$ হলে দেখাও যে, $2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 4$

Solution:

Given,

$$y = \sqrt{4 + 3\sin x}$$

$$\Rightarrow y^2 = 4 + 3\sin x$$

$$\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = 0 + 3\cos x$$

$$\Rightarrow 2\left(y.\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\frac{dy}{dx}\right) = -3\sin x$$

$$\Rightarrow 2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3\sin x =$$

$$\Rightarrow 2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4 + 3\sin x = 4$$

$$\Rightarrow 2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 4$$

Showed

Problems

3. $y=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m$ হলে দেখাও যে, $(1+x^2)y_2+xy_1-m^2y=0$

Solution:

Given,

$$y=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m$$

$$x^{m-1}=x^m.x^{-1}$$

$$\Rightarrow y_1=m\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{m-1}\left\{1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}(0+2x)\right\}$$

$$\Rightarrow y_1=m\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{m}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{-1}\left\{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right\}$$

$$=my\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{-1}.\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

Problems

3. $y = \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^m$ হলে দেখাও যে, $(1 + x^2)y_2 + xy_1 - m^2 y = 0$

Solution:

$$\Rightarrow y_1 = my\left(\frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}\right) \cdot \left(\frac{x + \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2}}\right)$$

$$\Rightarrow y_1 = my \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \left(y_1\sqrt{1 + x^2}\right)^2 = (my)^2$$

$$\Rightarrow y_1^2(1 + x^2) = m^2 y^2$$

$$\Rightarrow y_1^2(0 + 2x) + (1 + x^2).\, 2y_1y_2 = m^2 2yy_1$$

$$\Rightarrow 2xy_1^2 + (1 + x^2).\, 2y_1y_2 - m^2 2yy_1 = 0$$

$$\Rightarrow xy_1 + (1 + x^2)y_2 - m^2 y = 0$$

$$\Rightarrow (1 + x^2)y_2 + xy_1 - m^2 y = 0$$

Showed

Problems

4. $y = \sec x$ হলে দেখাও যে, $y_2 = y(2y^2 - 1)$

Solution:

Given,

$$y = \sec x$$

$$\Rightarrow y_1 = \sec x \tan x$$

$$\Rightarrow y_2 = \sec x \,.\, \sec^2 x + \tan x \,.\, \sec x \,.\, \tan x$$

$$= \sec x \,(\sec^2 x + \tan^2 x)$$

$$= \sec x \,(\sec^2 x + \sec^2 x - 1)$$

$$\therefore y_2 = \sec x \,(2\sec^2 x - 1)$$

$$y_2 = y(2y^2 - 1)$$

Showed

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

Problems

5. $x = \sin\sqrt{y}$ $or\ y = (\sin^{-1} x)^2$ হলে দেখাও যে, $(1 - x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$

Solution:

Given,

$\ln y = \sin\sqrt{y}$

$\sqrt{y} = \sin^{-1} x$

$\Rightarrow (\sqrt{y})^2 = (\sin^{-1} x)^2$

$\Rightarrow y = (\sin^{-1} x)^2$

$\Rightarrow y_1 = 2(\sin^{-1} x)\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$\Rightarrow \left\{y_1\sqrt{1 - x^2}\right\}^2 = \{2(\sin^{-1} x)\}^2$

$\Rightarrow y_1^2(1 - x^2) = 4(\sin^{-1} x)^2$

$\Rightarrow y_1^2(1 - x^2) = 4y$ (i) নং হতে

$\Rightarrow y_1^2(0 - 2x) + (1 - x^2).2y_1y_2 = 4y_1$

$\Rightarrow (1 - x^2).2y_1y_2 - 2xy_1^2 - 4y_1 = 0$

$\Rightarrow (1 - x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$

Showed

Problems

6. $\ln y = a\sin^{-1}x$ or $y = e^{a\sin^{-1}x}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 - a^2y = 0$

Solution:

Given,

$$\ln y = a\sin^{-1}x$$

$$\Rightarrow \log_e y = a\sin^{-1}x$$

$$\Rightarrow y = e^{a\sin^{-1}x} \dots .(i)$$

$$\Rightarrow y = e^{a\sin^{-1}x}.\left(a.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$\Rightarrow y_1\sqrt{1-x^2} = a\,e^{a\sin^{-1}x}$$

$$\Rightarrow \left\{y_1\sqrt{1-x^2}\right\}^2 = (ay)^2$$

$$\Rightarrow y_1^2(1-x^2) = a^2y^2$$



নিজে করে নাও

DOWNLOAD THE APP

Problems

10 MINUTE SCHOOL

7. $y=\sin(m\sin^{-1}x)$ হলে, দেখাও যে, $(1-x^2)y_2-xy_1+m^2y=0$

Solution:

Given,

$$y=\sin(m\sin^{-1}x)$$

$$\Rightarrow y_1=\cos(m\sin^{-1}x).m.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow y_1\sqrt{1-x^2}=m\cos(m\sin^{-1}x)$$

$$\Rightarrow y_1^2(1-x^2)=m^2\cos^2(m\sin^{-1}x)$$

$$\Rightarrow y_1^2(1-x^2)=m^2\{1-\sin^2(m\sin^{-1}x)\}$$

$$\Rightarrow y_1^2(1-x^2)=m^2-m^2y^2$$



নিজে করে নাও

Problems

8. $y = \sin x$ হলে, দেখাও যে,$y_4 - y = 0$

Solution:

Given,

$$y = \sin x$$

$$\Rightarrow y_1 = \cos x$$

$$\Rightarrow y_2 = -\sin x$$

$$\Rightarrow y_3 = -cos\, x$$

$$\Rightarrow y_4 = -(-sin\, x)$$

$$y_4 = \sin x$$

$$\Rightarrow y_4 = y$$

$$\Rightarrow y_4 - y = 0$$

Showed

ম্যাকলরিণের ধারাঃ

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots \ldots . a_nx^n \ldots \ldots . . (i)$$

$$f(0) = a_0 + 0 + 0 \ldots \ldots \ldots . . = a_0$$

$$f'(x) = 0 + a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots$$

$$f'(0) = a_1$$

$$f''(x) = 0 + 2.1a_2 + 3.2a_3x + \cdots$$

$$= 2!\, a_2 + 3.2a_3x + \cdots$$

$$f''(0) = 2!\, a_2 \quad \therefore a_2 = \frac{1}{2!}f''(0)$$

$$\therefore a_3 = \frac{1}{3!}f'''(0)$$

(i) হতে,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots$$

ম্যাকলরিণের ধারাঃ

$$f(x) = f(0) + f'(0).x + f''(0).\frac{x^2}{2!} + f'''(0).\frac{x^3}{3!} + \cdots \ldots$$

$f(x) = \sin x$ $\quad$ $f(0) = \sin 0 = 0$

$f'(x) = \cos x$ $\quad$ $f'(0) = \cos 0 = 1$

$f''(x) = -\sin x$ $\quad$ $f''(0) = -\sin 0 = 0$

$f'''(x) = -cos\, x$ $\quad$ $f'''(0) = -cos\, 0 = -1$

$f''''(x) = sin\, x$ $\quad$ $f''''(0) = sin\, 0 = 0$

… … … … … … … … … … … … … … … . … … .

… … … … … … … … … … … … … … … … .

$$\sin x = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + \cdots \ldots \ldots ..$$

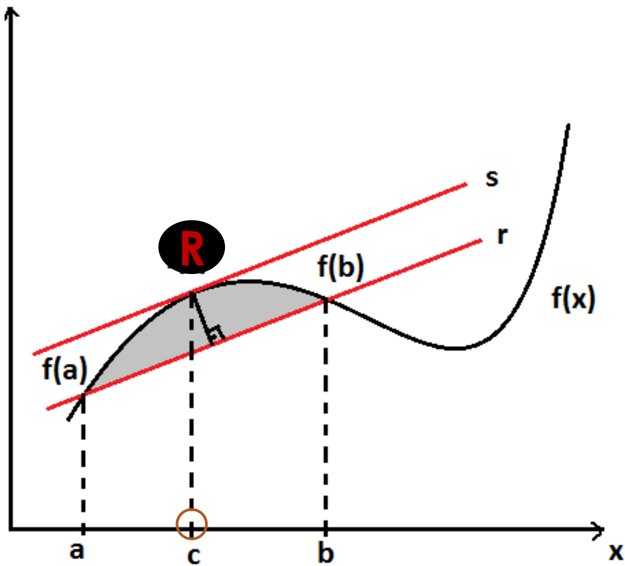
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \ldots \ldots ..$$

গড়মান উপপাদ্য / ল্যাগ্রাঞ্জের আকার:

$\tan x$

$[a,b] \rightarrow a \leq x \leq b$

[ব্যবধি / Intirval]



PQ রেখার ঢাল $= \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

R বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $= M_{PQ}$

$$= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\therefore f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$$

$\dfrac{d}{dx} f(x)$ ঢাল $= f'(x)$

R বিন্দুতে $= f'(c)$

Problems

1. $(0,1)$ ব্যবধিতে $f(x) = 2x - x^2$ ফাংশনে গড়মান উপপাদ্যের সত্যতা নিরুপণ কর?

ল্যাগ্রাঞ্জের আকার,

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

$$\Rightarrow 1 - 0 = (1 - 0)(2 - 2c)$$

$$\Rightarrow 1 = 2 - 2c$$

$$\Rightarrow 2c = 2 - 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$0 < \frac{1}{2} < 1$$

c বিন্দুটি (0, 1) ব্যবধির মাঝে অবস্থিত

Given,

$a = 0$

$b = 1$

$f(0) = 2.0 - 0^2$
$= 0$

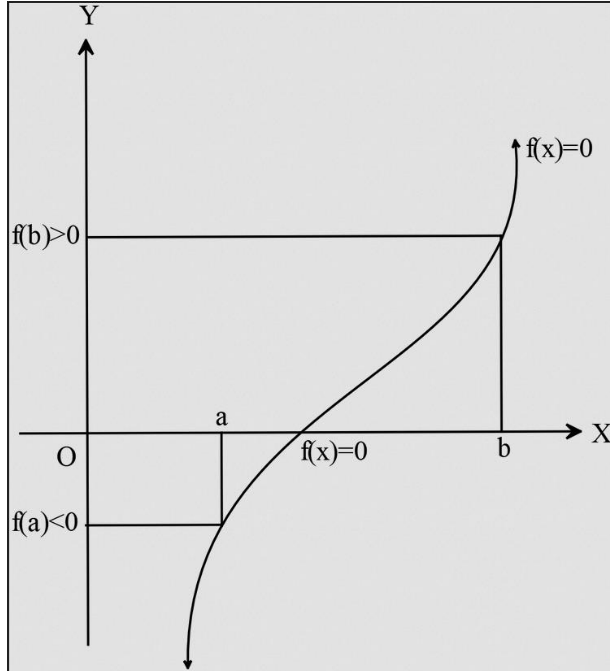
$f(1) = 2.1 - 1^2$
$= 1$

$f(x) = 2x - x^2$

$f'(x) = 2 - 2x$

$f'(c) = 2 - 2c$

মধ্যবর্তী মান উপপাদ্যঃ



$[a, b] \rightarrow f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন

$f(a)$ এবং $f(b)$ মাঝে $f(x) = k$



$f(a)$ ও $f(b)$ বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট

Problems

2. # মধ্যবর্তী মান উপপাদ্য ব্যবহার করে দেখাও যে, $[0, 2]$ ব্যবধিতে $x^3 = 2x + 1$ সমীকরণের সমাধান আছে।

$\therefore f(x) = x^3 - 2x - 1$ বহুপদী Function এবং অবিচ্ছিন্ন

$\therefore [0, 2]$

$a, \quad b$

$f(x) = x^3 - 2x - 1$

$f(0) = 0^3 - 2.0 - 1$

$f(2) = 2^3 - 2.2 - 1 = 8 - 4 - 1$
$= 3$

Problems

দুরুত্ব

3. একটি ট্রেন t সেকেন্ডে $3t + \frac{1}{8}t^2$ m অতিক্রম করে। 5 মিনিট পর বেগ কত?

$$\therefore s = 3t + \frac{1}{8}t^2$$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = 3 + \frac{1}{8} \times 2t$$

$$\therefore v = 3 + \frac{1}{4}t$$

∴ 5 মিনিট পর বেগ $= 3 + \frac{1}{4} \times 5min$

$$= 3 + \frac{1}{4} \times (5 \times 60)$$

$$= 3 + 75 = 78\ m/s$$

Problems

4. সরল রৈখিক পথে চলমান কোনো কণা t সময়ে $s = at^2 + bt + c$ দুরুত্ব অতিক্রম করে। যেখানে a, b, c ধ্রুবক। t সময়ে কণার বেগ v হলে প্রমাণ কর যে, $v^2 - b^2 = 4a(s - c)$

$$s - c = at^2 + bt$$

Given,

$$s = at^2 + bt + c$$

$$\frac{ds}{dt} = 2at + b + 0$$

$$\therefore v^2 = (2at + b)^2$$

$$= 4a^2t^2 + 2.2atb + b^2$$

$$= 4a^2t^2 + 4atb + b^2$$

$$\therefore v^2 - b^2 = 4a(at^2 + bt)$$

$$\therefore v^2 - b^2 = 4a(s - c)$$

Proved

#স্পর্শক ও অভিলম্বঃ

এক বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ-

(x_1, y_1) বিন্দুগামী এবং তার $m = \frac{dy}{dx}_{(x_1,y_1)}$

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$y - y_1 = \frac{dy}{dx}_{(x_1,y_1)} \quad (x - x_1)$$

$$m = \frac{dy}{dx}_{(x-x_1)}$$

স্পর্শকের উপর লম্ব → অভিলম্ব



$$m_1 \times m_2 = -1$$

Problems

5. $x^3 + xy^2 - 3x^2 + 4x + 5y + 2 = 0$ বক্ররেখার (1, -1) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর ?

স্পর্শকের সমীকরণ-

$$y - (-1) = m(x - 1)$$

$$\Rightarrow y + 1 = m(x - 1) \ldots (i)$$

এখন $x^3 + xy^2 - 3x^2 + 4x + 5y + 2 = 0$

$$\Rightarrow 3x^2 + \left(x.2y\frac{dy}{dx} + y^2.1\right) - 6x + 4 + 5\frac{dy}{dx} + 0 = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 - 6x + 5\frac{dy}{dx} + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(2xy + 5) = -3x^2 - y^2 + 6x - 5 - 4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 - y^2 + 6x - 5 - 4}{2xy + 5}$$

Problems

5. $x^3 + xy^2 - 3x^2 + 4x + 5y + 2 = 0$ বক্ররেখার (1, -1) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর ?

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 - y^2 + 6x - 4}{2xy + 5}$$

$$m_1 = \frac{dy}{dx}_{(1,-1)} = \frac{-3(1)^2 - (-1)^2 + 6.1 - 4}{2.1.(-1) + 5} = -\frac{2}{3}$$

(i) নং হতে $\therefore y + 1 = m(x - 1)$

$$\therefore y + 1 = -\frac{2}{3}(x - 1) \Rightarrow 2x + 3y + 1 = 0$$

অভিলম্বঃ $m_1 \times m_2 = -1$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3} \times m_2 = -1$$

$$\therefore m_2 = \frac{3}{2}$$

অভিলম্ব: $\therefore y + 1 = \frac{3}{2}(x - 1)$

$$3x - 2y - 5 = 0$$

Problems

6. দেখাও যে, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ বক্ররেখার যেকোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক কর্তৃক অক্ষদ্বয় হতে কর্তিত অংশের যোগফল ধ্রুবক।

(x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y - y_1 = \frac{dy}{dx}_{(x_1,y_1)} (x - x_1) \ ...(i)$

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$$

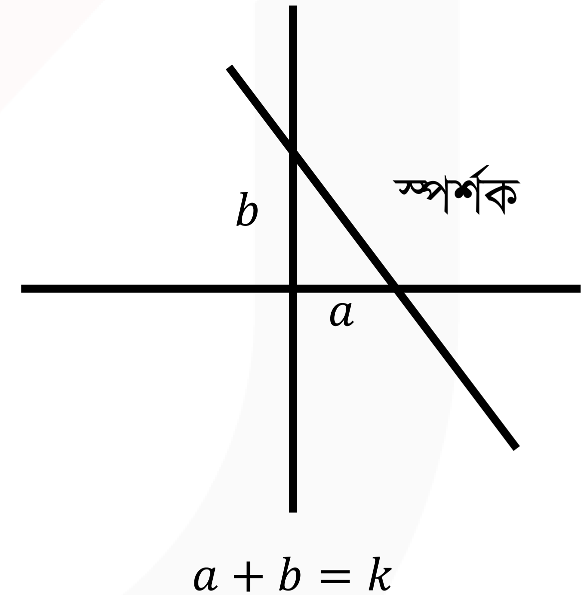
$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}_{(x_1,y_1)}=-\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}$$



$a+b=k$

Problems

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad \frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

$$\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{y_1}$$

(i) নং হতে

$$y-y_1=\frac{-\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x-x_1)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1}(y-y_1)=-\sqrt{y_1}(x-x_1)$$

$$\Rightarrow y\sqrt{x_1}-y_1\sqrt{x_1}=-x\sqrt{y_1}+x_1\sqrt{y_1}$$

$$\Rightarrow y\sqrt{x_1}-y_1\sqrt{x_1}=-x\sqrt{y_1}+x_1\sqrt{y_1}$$

$$\Rightarrow x\sqrt{y_1}+y\sqrt{x_1}=x_1\sqrt{y_1}+y_1\sqrt{x_1}$$

$$\Rightarrow \frac{x\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{y_1}}+\frac{y\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1}\sqrt{y_1}}=\frac{x_1\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}\sqrt{y_1}}+\frac{y_1\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1}\sqrt{y_1}}$$

[$\sqrt{x_1}\sqrt{y_1}$ দ্বারা উভয় পক্ষকে ভাগ করে]

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x_1}}+\frac{y}{\sqrt{y_1}}=\sqrt{x_1}+\sqrt{y_1}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x_1}}+\frac{y}{\sqrt{y_1}}=\sqrt{a}$$

(x_1, y_1) বিন্দুতে,

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1}+\sqrt{y_1}=\sqrt{a}$$

Problems

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{a}.\sqrt{x_1}} + \frac{y}{\sqrt{a}.\sqrt{y_1}} = 1$$

x অক্ষ হতে কর্তিত অংশ $= \sqrt{a}\,.\sqrt{x_1}$

y অক্ষ হতে কর্তিত অংশ $= \sqrt{a}\,.\sqrt{y_1}$

প্রশ্নমতে, $\sqrt{a}\sqrt{x_1} + \sqrt{a}\sqrt{y_1} = \sqrt{a}(\sqrt{x_1} + \sqrt{y_1})$

$$= \sqrt{a}.\sqrt{a}$$

$$= a$$

যা একটি ধ্রুব পদ

Problems

7. $x^2 + 2ax + y^2 = 0$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক গুলি x অক্ষের উপর লম্ব (y অক্ষের সমান্তরাল) তাদের স্থানাংক নির্ণয় কর।

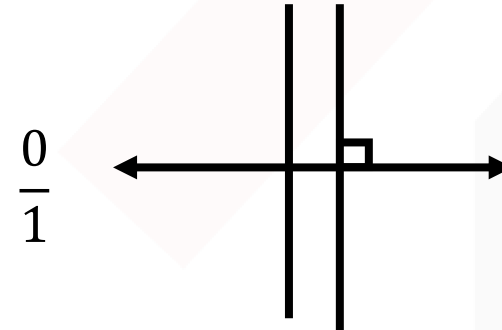
বক্রেখার সমীকরণ, $x^2 + 2ax + y^2 = 0$

$$\Rightarrow 2x + 2a + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = -(2x + 2a)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2(x + a)}{2y}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x + a}{y}$$



$\tan 90 = \infty = \frac{1}{0}$

$\cot 90°$

$\frac{\sin 90}{\cos 90}$

$\frac{2}{0} = \infty$

$\frac{100}{0} = \infty$

Problems

7. $x^2 + 2ax + y^2 = 0$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক গুলি x অক্ষের উপর লম্ব (y অক্ষের সমান্তরাল) তাদের স্থানাংক নির্ণয় কর।

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{a+x}{y}$$

প্রশ্নমতে স্পর্শক x অক্ষের উপর লম্ব। অর্থাৎ

$$\frac{dy}{dx} = \tan 90°$$

$$\therefore \frac{\tan 90°}{1} = -\frac{x+a}{y}$$

$$\Rightarrow \cot 90° = -\frac{y}{x+a}$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{y}{x+a}$$

$$\Rightarrow y = 0$$

$y = 0$ বক্ররেখার সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$x^2 + 2ax + 0^2 = 0$$

$$\Rightarrow x(x + 2a) = 0$$

$x = 0$ or $x + 2a = 0$

$x = -2a$

স্পর্শক যে বিন্দুতে লম্ব তাদের স্থানাংক

$(0,0)(-2a,0)$ Ans

Problems

(ii)

Same Math Condition



y অক্ষের উপর লম্ব বা x অক্ষের সমান্তরাল

ঢাল = ?

$$\frac{dy}{dx} = \tan 0° = 0$$

যে বিন্দুতে লম্ব তাদের স্থানাংক কত?

Problems

৪. a এর মান কত হলে $y = ax(1+x)$ বক্র রেখার মূলবিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সাথে (i)$30°$ (ii) $60°$ কোণ উৎপন্ন করবে।

Solution:

$$y = ax + ax^2$$

$$\frac{dy}{dx} = a + 2ax$$

$$\therefore \text{মূলবিন্দুতে } \frac{dy}{dx}_{(0,0)} = a + 2a.0 = a$$

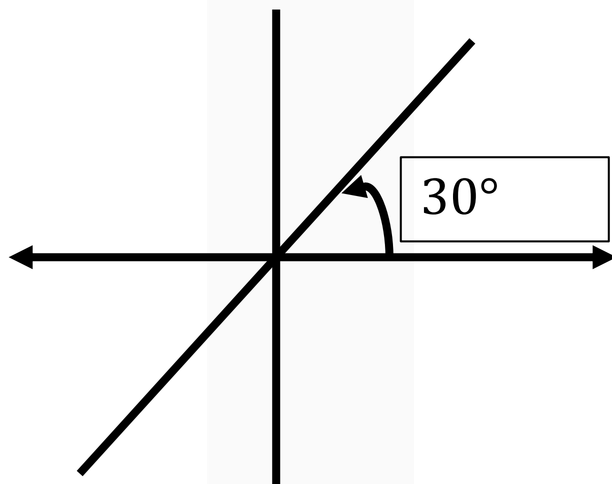
আবার প্রশ্নমতে,

$$\therefore \text{মূলবিন্দুতে ঢাল } \frac{\text{dy}}{\text{dx}} = \tan 30°$$

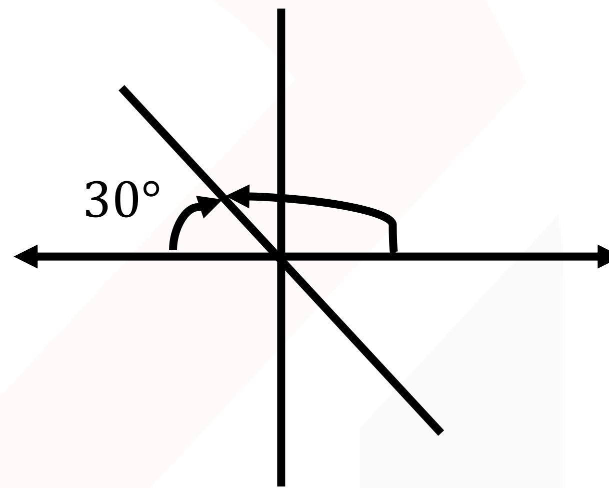
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore a = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ans



ধনাত্মক দিকের সাথে



$\tan 30°$

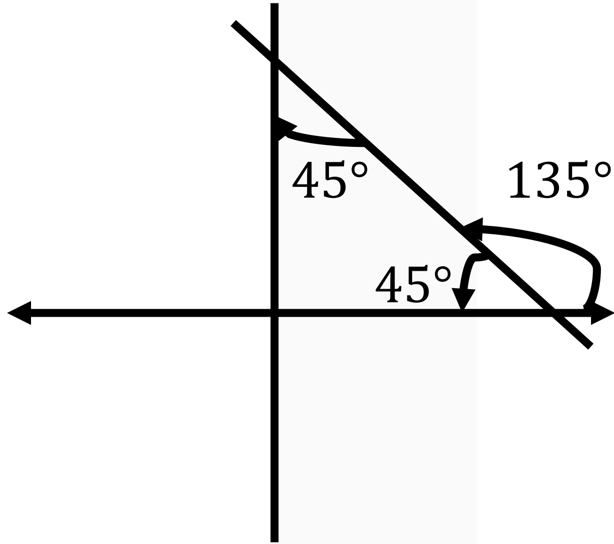
$$a = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

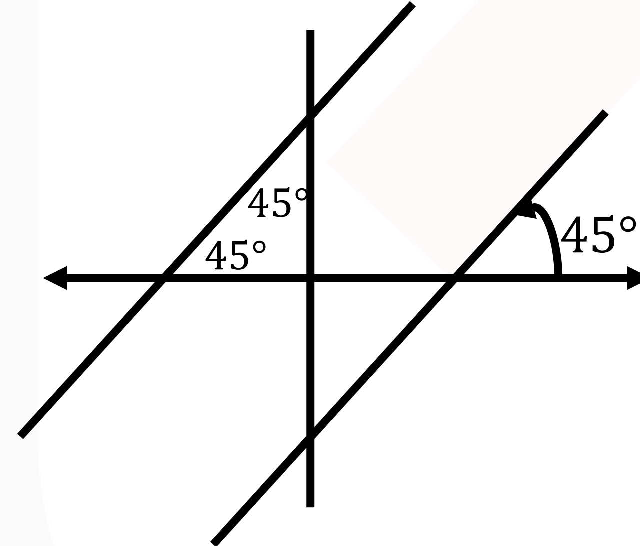
ঢাল $= \tan 150°$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Problems

8. $y = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক অক্ষদ্বয়ের সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে, তাদের ভূজ নির্ণয় কর?





২টা Case

Problems

8. $y = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক অক্ষদ্বয়ের সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে, তাদের ভূজ নির্ণয় কর?

$y = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 2$

যখন কোণ $= 45°$

$\tan 45° = 3x^2 - 6x - 2$

$\Rightarrow 1 = 3x^2 - 6x - 2$

$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 3 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2}$$

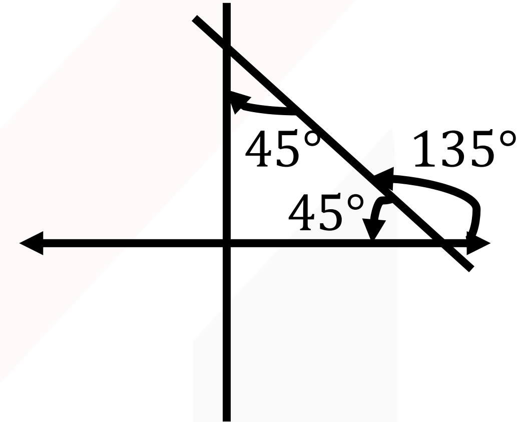
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$= 1 \pm \sqrt{2}$$

যখন কোণ $= 135°$

$\tan 135° = 3x^2 - 6x - 2$

$\Rightarrow -1 = 3x^2 - 6x - 2$



ঢাল $= \tan 45° = 1$

ঢাল $= \tan 135° = -1$

$ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Problems

8. $y = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক অক্ষদ্বয়ের সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে, তাদের ভূজ নির্ণয় কর?

$$3x^2 - 6x - 2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \text{x} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{36 + 12}}{6}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{48}}{6}$$

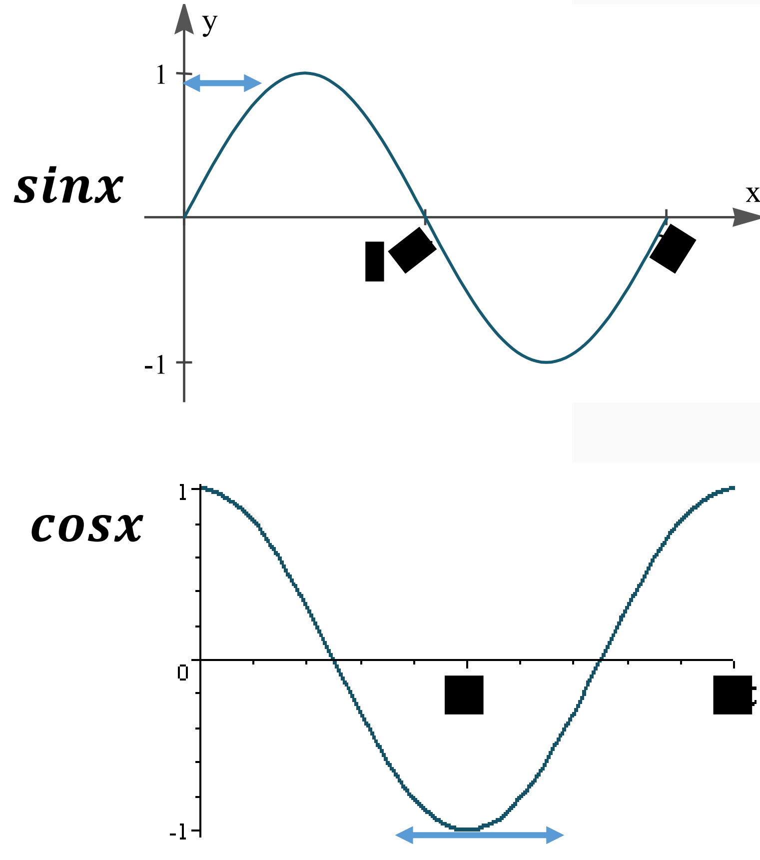
$$= \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{6}$$

$$= \frac{2(3 \pm 2\sqrt{3})}{6}$$

$$= \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$$

$$= 1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Ans



ক্রম বর্ধমান ও ক্রম হ্রাসমান

$f''(x) > 0$ ক্রম বর্ধমান

$f''(x) < 0$ ক্রম হ্রাসমান

-গুরুমান ও লঘুমান

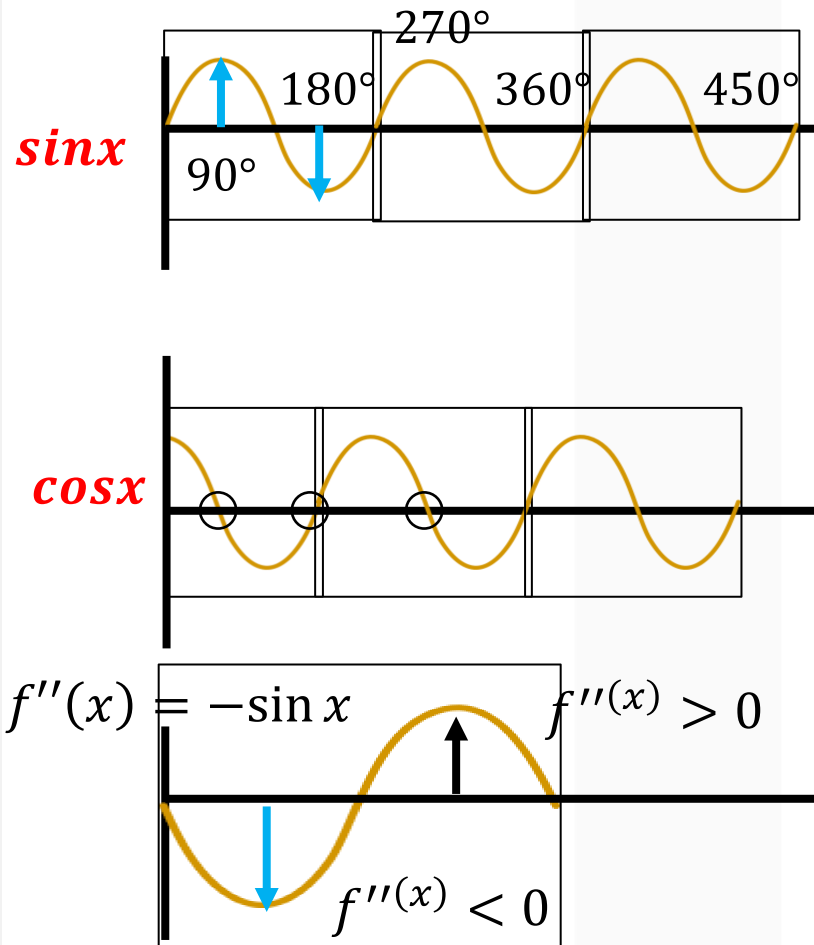
-ক্রম বর্ধমান ও ক্রম হ্রাসমান

$-\mathrm{f}(x)$ ধরি

$-\mathrm{f}'(x)$ ও $f''(x)$

$-\mathrm{f}'(x) = 0$ ধরে x এর মান নির্ণয় করব। x এর এই মানের জন্যই গুরু or লঘু পাবো।

$-\mathrm{f}''(x)$ এ x এর মান বসাবো
$f''(x) > 0$ হলে লঘু
$f''(x) < 0$ হলে গুরু



ক্রম বর্ধমান ও ক্রম হ্রাসমান

$f''(x) > 0$ ক্রম বর্ধমান

$f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$

$f'(x) = 0$

$\cos x = 0$

$x = 90°, 270°, 450°$

$f''(90) = 1$ $f'''(270)$

-গুরুমান ও লঘুমান

-ক্রম বর্ধমান ও ক্রম হ্রাসমান

$-\mathrm{f}(x)$ ধরি

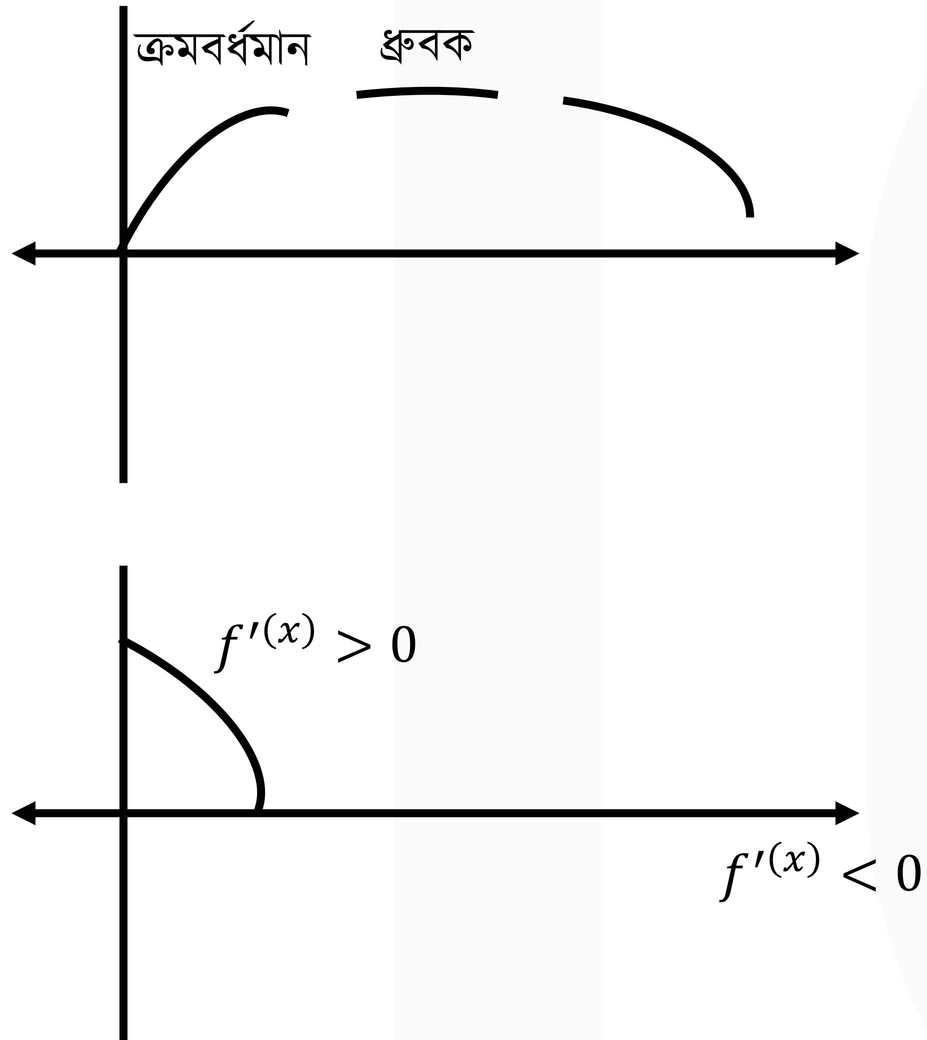
$-\mathrm{f}'(x)$ ও $f''(x)$

$-\mathrm{f}'(x) = 0$ ধরে x এর মান নির্ণয় করব। x এর এই মানের জন্যই গুরু or লঘু পাবো।

$-\mathrm{f}''(x)$ এ x এর মান বসাবো

$f''(x) > 0$ হলে লঘু

$f''(x) < 0$ হলে গুরু



$f'(x) = 0$

ধ্রুবক

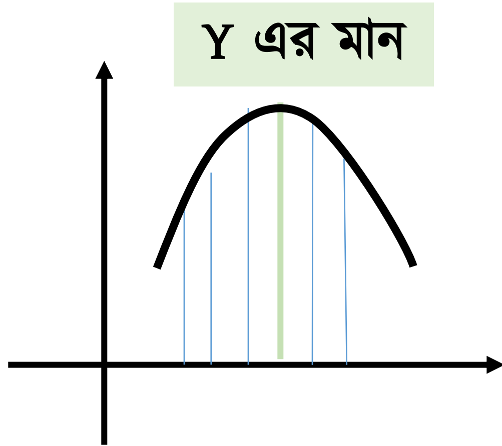
The End

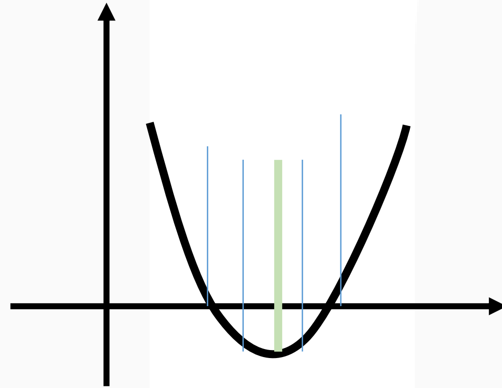
তোমার জীবনের দ্বিতীয় অন্তরজ

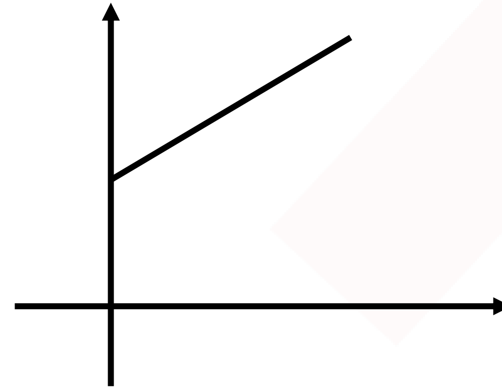
- **অসীম** ($-\infty$ হোক)

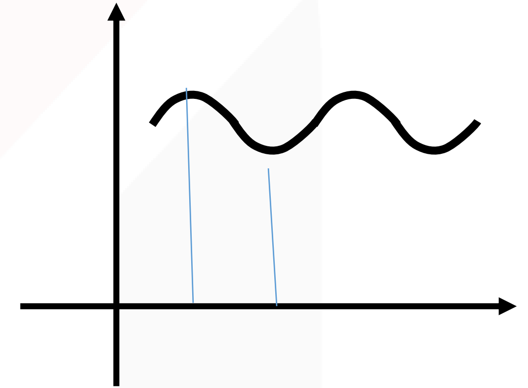
Q. নিচের চিত্র থেকে উত্তর দাও কোনটি গুরুমান / লঘু / উভয়

গুরু = লঘু = $f(x)$ = y









Note: গুরুমান ও লঘুমান শুধু Curve এর জন্য

i) Upper Peak → গুরুমান

ii) Lower Peak → লঘুমান

Problems

1. দেখাও যে, $x = 2$ বিন্দুতে $x^3 - 3x^2 + 3x$ ফাংশনটি বৃদ্ধি পায়

$\boldsymbol{f'(x) > 0}$

$\boldsymbol{f'(2) > 0}$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

$$f'(2) = 3.2^2 - 6.2 + 3$$

$$= 12 - 12 + 3$$

$$\therefore f'(2) > 0$$

Problems

2) $f(x) = 17 - 15x + 9x^2 - x^3$

(ক) চরমবিন্দু নির্ণয় কর

(খ) কোন ব্যবধীতে হ্রাস ও বৃদ্ধি পায়

(গ) সর্বোচ্চ মান ও সর্বনিম্ন মান

(ঘ) স্কেচ অংকন কর

(ঙ) সন্ধি বিন্দু নির্ণয় কর

Problems

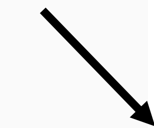
2) $f(x) = 17 - 15x + 9x^2 - x^3$

(ক) চরমবিন্দু নির্ণয় কর

(ক) চরমবিন্দু / critical point / Turning Point / মোচড় বিন্দু

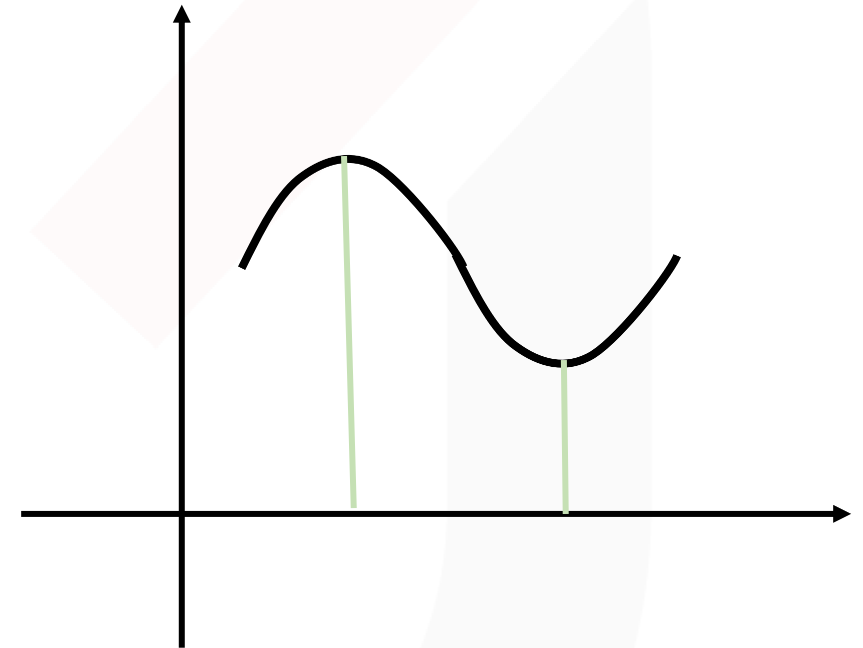
$f'(x) = 0$

x এর মান নির্ণয়ক



$f(x)$

এর মানের y এর মান বের করব।



Problems

2) $f(x) = 17 - 15x + 9x^2 - x^3$

(ক) চরমবিন্দু নির্ণয় কর

$$f(x) = 17 - 15x + 9x^2 - x^3$$

$$f'(x) = 0 - 15 + 18x - 3x^2$$

চরমবিন্দু জন্য, $f'(x) = 0$

$$-3x^2 + 18x - 15 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x - x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow x(x-5) - 1(x-5) = 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = 1, 5$$

$$f(x) = 17 - 15x + 9x^2 - x^3$$

$$f(1) = 17 - 15.1 + 9.1^2 - 1^3$$

$$= 10 \quad (1, 10)$$

Problems

2) $f(x) = 17 - 15x + 9x^2 - x^3$

(ক) চরমবিন্দু নির্ণয় কর

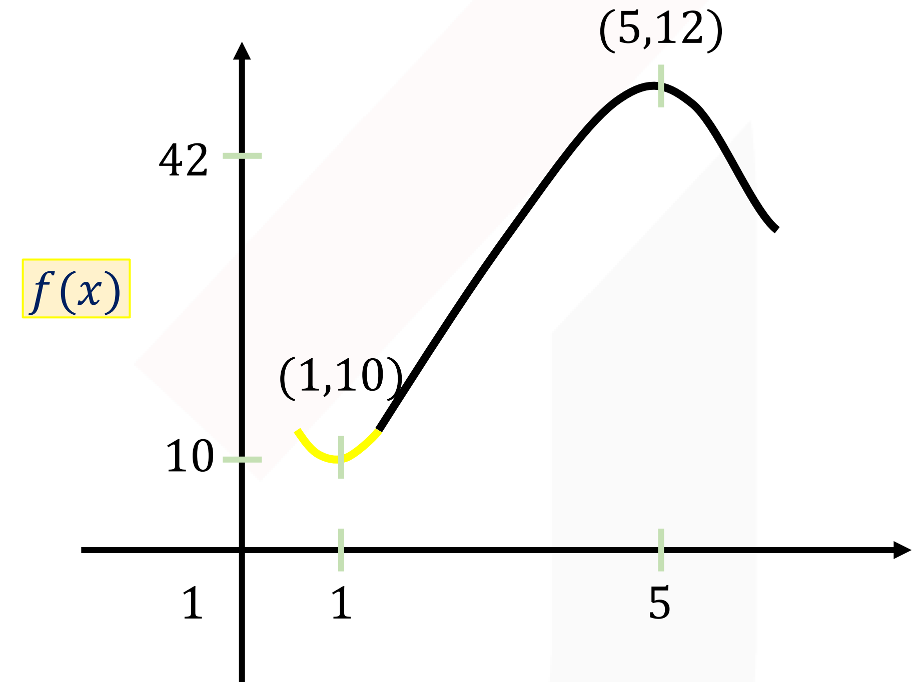
$$f(x) = 17 - 15x + 9x^2 - x^3$$

$$f(5) = 17 - 15.5 + 9.5^2 - 5^3$$

$$= 42$$

$$(5, 42)$$

$\therefore$ চরম বিন্দুর স্থানাংক $(1, 10)$ ও $(5, 42)$



Problems

2) $f(x) = 17 - 15x + 9x^2 - x^3$

(ঘ) স্কেচ অংকন কর

ঘ) (ক) হতে পাই,

$f'(x) = -15 + 18x - 3x^2$

ক্রমবর্ধমানের জন্য, $f'(x) > 0$

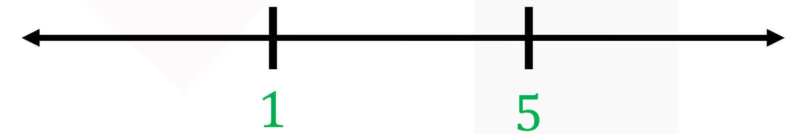
$\Rightarrow -15 + 18x - 3x^2 > 0$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 5 < 0$

$f'(x)$

$(x-1)(x-5) < 0$ $\quad (\alpha - 1) \cup (5, \alpha)$

$x < 1 \; or \; x > 5$



$f'(x) < 0$

$1 < x < 5$

$x - 1 = 0$	$x - 5 = 0$
$x = 1$	$x = 5$

অসমতার ফাংশন

$f'(x) > 0$ → ক্রম বর্ধমান

Problems

2) $f(x) = 17 - 15x + 9x^2 - x^3$

(ক) চরমবিন্দু নির্ণয় কর

(খ) কোন ব্যবধীতে হ্রাস ও বৃদ্ধি পায়

(গ) সর্বোচ্চ মান ও সর্বনিম্ন মান

(ঘ) স্কেচ অংকন কর

(ঙ) সন্ধি বিন্দু নির্ণয় কর

$\cos 2\pi c \rightarrow 3 \times 10^8$

DOWNLOAD THE APP

Problems

10 MINUTE SCHOOL

2) $f(x) = 17 - 15x + 9x^2 - x^3$

(ক) চরমবিন্দু নির্ণয় কর

(খ) কোন ব্যবধীতে হ্রাস ও বৃদ্ধি পায়

(গ) সর্বোচ্চ মান ও সর্বনিম্ন মান

(ঘ) স্কেচ অংকন কর

(ঙ) সন্ধি বিন্দু নির্ণয় কর

এটা বুঝবে

গুরুমান $= 42$
লঘুমান $= 10$

Problems

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 3$ দেখাও যে , গুরুমান, লঘুমান নাই

$f'(x) \neq 0$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 6$$
$$= 3(x^2 - 2x + 2)$$
$$= 3(x^2 - 2x + 1 + 1)$$
$$= 3(x^2 - 2x + 1) + 3.1$$
$$= 3(x^2 - 1)^2 + 3$$

$f'(x) \neq 0$

গুরুমান লঘুমান নাই

Problems

$f(x) = x + \frac{1}{x}$ দেখাও যে , গুরুমান তার লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর

গুরু ও লঘুমানের জন্য,

$f'(x) = x + x^{-1}$

$f''(x) = 1 - x^{-2}$

$f'''(x) = 0 + 2x^{-3}$

$f'(x) = 0$

বা, $1 - x^{-2} = 0$

বা, $1 - \frac{1}{x^2} = 0$

বা, $\frac{x^2 - 1}{x^2} = 0$

বা, $x^2 - 1 = 0$

$x = \pm 1$

$x = 1$

$x = -1$

Problems

গুরু ও লঘুমানের বিন্দুর জন্য,

$$f''(1) = 2(1)^{-3} = 2 > 0$$

$\therefore x = 1$ এর জন্য ফানশনটির মান লঘুমান হয়

$$f''(-1) = 2(-1)^{-3} = -2 < 0$$

$\therefore x = -1$ এর জন্য ফানশনটির গুরুমান হয়

গুরুমান মান $f(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -2$

লঘুমান মান $f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$

নির্ণয়ে গুরুমান মান $= -2$ লঘুমান $= 2$

MCQ

১. নিচের কোনটি অসীম লিমিট? [কু. বো. '১৯]

(ক) $\lim_{x \to 0} \frac{2}{5x^3}$ ✓

(খ) $\lim_{x \to 0} e^{3x}$ → e^0

(গ) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{4^x}$ → $\frac{1}{4^0}$

(ঘ) $\lim_{x \to \infty} \frac{3}{5x^4}$ $= \frac{3}{5 \times \infty}$ $= 0$

Why!

$\frac{2}{5 \times 0}$

MCQ

২. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{3x^2-4}$ এর মান কত? [রা. বো. '১৭]

(ক) $-\frac{1}{4}$

(খ) 0

(গ) $\frac{2}{3}$

(ঘ) 1

$$\frac{x^2(2)}{x^2\left(3-\frac{4}{x^2}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^2+x+2}{x^2+5x+6}$$
$$=\frac{0}{1}$$
$$=0$$

MCQ

৩. $\lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4}$ এর মান কোনটি? [য. বো. '১৯]

$\frac{0}{0} / \frac{\infty}{\infty}$ → La' hospital

(ক) -4 (খ) 0 (গ) 1 (ঘ) 3

Solve : $\lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{x^3-2^3}{x^2-2^2}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{x^2+2x+4}{x+2}$

$= \frac{2^2+2.2+4}{2+2}$

$= \frac{12}{4} = 3$

$\lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4}$

$= \frac{3x^2-8}{2x}$

$= \frac{3 \times 4}{2 \times 2}$

$= \frac{6}{2}$

$= 3$

La' hospital

$\frac{0}{0}$ or $\frac{\infty}{\infty}$

$\frac{d/dx(\text{লব})}{d/dx(\text{হর})}$ } $\frac{0}{0} / \frac{\infty}{\infty}$

MCQ

$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin 2\frac{\pi x}{180}}{x}$ $\lim_{x\to \text{মাথা}} \frac{\sin(\text{মাথা})}{\text{মাথা}}$

8. $\lim_{x\to 0} \frac{sin2x^o}{x}$ এর মান কোনটি? [রা. বো. '১৯]

(ক) $\frac{\pi}{180}$ (খ) $\frac{\pi}{90}$ (গ) $\frac{\pi}{2}$ (ঘ) $\frac{90}{\pi}$

Solve :

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin2x^o}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(2.\frac{\pi x}{180}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{90}}{\frac{\pi x}{90}} \times \frac{\pi\pi}{90} \times \frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{\pi}{90}\lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{\pi x}{90}}{\frac{\pi x}{90}}$$

$$= \frac{\pi}{90}.1 \qquad \left[\because \lim_{x\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1\right]$$

$$= \frac{\pi}{90}$$

$f(x) = \frac{+|x|}{-x}$
→Limit does not exist

$0.999 \to 101$
$1.0001 \to -999$

$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{(x-1)^2}$

$\frac{0}{0} / \frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 101$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -999$ (Limit does not exist)

MCQ

৫. $\underset{x\to 0}{lim}\frac{sin4x}{tan7x}$ এর মান কত? [চ. বো. '১৯]

(ক) 0 (খ) $\frac{4}{7}$ (গ) $\frac{7}{4}$ (ঘ) ∞

Solve :

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin4x}{tan7x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{sin4x}{4x}.\frac{7x}{tan7x}.\frac{4}{7}\right\}$$

$$=\frac{4}{7}.\lim_{4x\to 0}\frac{sin4x}{4x}.\lim_{7x\to 0}\frac{7x}{tan7x}$$

$$=\frac{4}{7}.1.1=\frac{4}{7}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 4x}{4x}\times 4x}{\frac{\tan 7x}{7x}\times 7x}=\frac{4}{7}$$

MCQ

৬. $\lim_{x \to 0} \frac{sinax}{x}$ এর মান কোনটি? [ব. বো. '১৯]

(ক) a ✔

(খ) 0

(গ) 1

(ঘ) $\frac{1}{a}$

Solve :

$$\lim_{x \to 0} \frac{sinax}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{sinax}{ax} . a = 1. a = a$$

MCQ

৭. $y = tan^{-1}\frac{6x}{1-9x^2}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কতো? [দি, বো, '১৯]

(ক) $\frac{6}{1+36x^2}$ (খ) $\frac{6}{1+3x^2}$ (গ) $\frac{2}{1+9x^2}$ (ঘ) $\frac{6}{1+9x^2}$

Solve : $y = tan^{-1}\frac{6x}{1-9x^2} = tan^{-1}\frac{2.3x}{1-(3x)^2} = 2tan^{-1}(3x)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2.\frac{1}{1+(3x)^2}.3 = \frac{6}{1+9x^2}$

$x = 0.1$

$\frac{6}{1+9\times(0.1)^2}$

$= 5.504$

MCQ

৮. $\lim_{x\to\infty}\frac{5^x-5^{-x}}{5^x+5^{-x}}$ এর মান কোনটি? [এইচএসসি পরিক্ষা '১৮]

(ক) -5 (খ) -2 (গ) 1 (ঘ) 5

Solve :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5^x-5^{-x}}{5^x+5^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5^x\left(1-\frac{5^{-x}}{5^{2x}}\right)}{5^x\left(1+\frac{5^{-x}}{5^{2x}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{5x}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{5x}\right)^2}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

MCQ

$\sin x$

৯. x —এর সাপেক্ষে $e^{sin^2 x}$ এর অন্তরজ কোনটি? [কু. বো. '১৭]

(ক) $e^{sin^2 x}.sin2x$ (খ) $2e^{sin^2 x}sinx$ (গ) $-e^{sin^2 x}.sin2x$ (ঘ) $e^{sin^2 x}$

Solve :

$$\frac{d}{dx}e^{sin^2 x} = e^{sin^2 x}\frac{d}{dx}(sin^2 x)$$

গুঁটিবাজিঃ

$$= e^{sin^2 x}.2sinx\frac{d}{dx}sinx$$

$$\frac{\frac{d}{dx}(\text{যাকে})}{\frac{d}{dx}(\text{যার সাপেক্ষে})}$$

$$= e^{sin^2 x}.2sinx.cosx$$

$$\frac{\frac{d}{dx}sin^2 x}{\frac{d}{dx}sinx}$$

$$= e^{sin^2 x}.sin2x$$

$$e^{x^2} = 2x.2x$$

$$e^{sin^2 x} = 2sinxsinx$$

DOWNLOAD THE APP

MCQ

10 MINUTE SCHOOL

$$\frac{d}{dx} log_a x = \frac{1}{x \ln a}$$

১০. $\frac{d}{dx}\log_2 x$ এর মান কতো? [সি, বো, '১৭]

(ক) $\frac{1}{x}$ (খ) 2^x (গ) $\frac{1}{2lns}$ (ঘ) $\frac{1}{xln2}$

Solve :

$$\frac{d}{dx}\log_2 x = \frac{d}{dx}(\log_2{}^e \times \log_e{}^x)$$

$$= \log_2{}^e \frac{d}{dx}(\log_e{}^x)$$

$$= \log_2{}^e \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x} \times \frac{1}{\log_e{}^2}$$

$$= \frac{1}{xln2}$$

MCQ

১১. $\frac{d}{dx}\log_{10} x$ এর মান কোনটি? [রা. বো. '১৯]

$\frac{1}{x \ln 10}$

(ক) $\frac{1}{x}$

(খ) $\frac{1}{x}\log_{10} e$ ✓

(গ) $\frac{1}{x} log\ e_{10}$

(ঘ) $\log_{10} e$

Solve : আমরা জানি,

$$\frac{d}{dx}(\log_a n) = \frac{1}{x}\log_a e$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\log_{10} x = \frac{1}{x}\log_{10} e$$

MCQ

১২. $f(x) = ln(ln2x)$ হলে $f(x) =$ কত? [ব. বো. '১৯]

(ক) $\frac{1}{ln2x}$ (খ) $\frac{1}{2x}$ (গ) $\frac{1}{xln2x}$ (ঘ) $\frac{1}{2xln2x}$

Solve : $f(x) = \frac{d}{dx}ln(ln2x) = \frac{1}{ln2x}.\frac{1}{2x}.2 = \frac{1}{xln2x}$

MCQ

১৩. $y = e^{\sqrt{x}}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ কত? [চ. বো. '১৯]

(ক) $2\, e^{\sqrt{x}}$

(খ) $\frac{1}{2\sqrt{x}} . e^{\sqrt{x}}$ ✓

(গ) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

(ঘ) $\frac{2\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}}$

Solve :

$$y = e^{\sqrt{x}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{\sqrt{x}} . \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} . e^{\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

MCQ

১৪. $\frac{d}{dx}(cos\sqrt{x})$ এর মান কোনটি? [ঢা. বো. '১৭]

(ক) $-sin\sqrt{x}$ (খ) $-\frac{sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ (গ) $-\frac{sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ (ঘ) $\frac{sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

Solve : $\frac{d}{dx}(cos\sqrt{x}) = -sin\sqrt{x}\frac{d}{dx}\sqrt{x}$

$= -sin\sqrt{x}\ \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

MCQ

১৫. $\frac{d}{dx}\left(cos\frac{1}{x}\right)$ এর মান কোনটি? [কু. বো. '১৯]

(ক) $-\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (খ) $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (গ) $-x^{-2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (ঘ) $x^{-2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ✔

Solve : $\frac{d}{dx}\left(cos\frac{1}{x}\right) = \left(-\sin\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = x^{-2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

MCQ

১৬. $y = sin\sqrt{x}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি? [য. বো. '১৯]

(ক) $\frac{cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ ✓

(খ) $\frac{sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

(গ) $\frac{cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

(ঘ) $\frac{sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

Solve :

$$y = sin\sqrt{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(sin\sqrt{x}) = cos\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

MCQ

১৭. $x^3 + x^2y + xy^2$ একটি- [ব. বো. '১৭]

(ক) ব্যক্ত ফাংশন (খ) অব্যক্ত ফাংশন (গ) পরামিতিক ফাংশন (ঘ) সংযোজিত ফাংশন

Solve :

যে সমীকরণে y কে সরাসরি x এর মাধ্যমে প্রকাশ করা যায় না। ঐ সমীকরণ সংশ্লিষ্ট ফাংশনটিকে অব্যক্ত ফাংশন বলে।

যেমনঃ $x + e^y = 5, x^2 + \sin(xy) = 0,\ x^3 + x^2y + xy^2$ ইত্যাদি।

MCQ

১৮. $y = \frac{1}{x^2}$ হলে $(-1, 0)$ বিন্দুতে y_1 এর মান কত? [ব. বো. '১৯]

(ক) 2 (খ) 1 (গ) −1 (ঘ) −2

Solve :

$y = \frac{1}{x^2}$

বা, $y = x^{-2}$

(x –এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে)

$\therefore y_1 = \frac{d}{dx}(x^{-2}) = -2.x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

$\therefore (-1, 0)$ বিন্দুতে $y_1 = -\frac{2}{(-1)^3} - \frac{2}{-1} = 2$

MCQ

১৯. $f(x) = x - x^2$ ফাংশনটির কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x –অক্ষের সমান্তরাল? [ব. বো. '১৯]

(ক) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ (খ) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ ✔ (গ) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ (ঘ) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$

Solve :

$f(x) = x - x^2 \dots\dots\dots (i)$

(x –এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে)

$f(x) = \frac{d}{dx}(x - x^2) = 1 - 2x$

x –অক্ষের সমান্তরালের জন্য $f(x) = 0$

বা, $1 - 2x = 0$

বা, $2x = 1$

$\therefore x = \frac{1}{2}$

(i) নং এ $x = \frac{1}{2}$ বসাই,

$y = f(x) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

MCQ

২০. $y = e^{-x}$ হলে y_5 কোনটি? [এইচএসসি পরিক্ষা '১৮]

(ক) $-e^{-x}$ (খ) e^{-x} (গ) $-5e^{-x}$ (ঘ) $5e^{-x}$

Solve :

$y = e^{-x}$

$y_1 = -e^{-x} = (-1)^1 . e^{-x}$

$\therefore y_2 = (-1)^2 . e^{-x}$

$\ldots \ldots \ldots \ldots$

$y_5 = (-1)^5 . e^{-x}$

MCQ

২১. x –এর কোন মানের জন্য $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1$ এর চরম মান পাওয়া যাবে? [রা. বো. '১৭]

(ক) $-2, -3$ (খ) $-2, 3$ (গ) $2, -3$ (ঘ) $2, 3$ ✔

Solve :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}.3x^2 - \frac{5}{2}.2x + 6$$

$$= x^2 - 5x + 6$$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\therefore x^2 - 5x + 6 = 0$

বা, $x^2 - 3x - 2x + 6 = 0$

বা, $x(x-3) - 2(x-3) = 0$

বা, $(x-3)(x-2) = 0$

$\therefore x = 3, 2$

MCQ

২২. $y = x^2 - x + 1$ বক্ররেখার $(2,3)$ বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বের ঢাল কোনটি? [দি. বো. '১৭]

(ক) 3 (খ) -3 (গ) $\frac{1}{3}$ (ঘ) $-\frac{1}{3}$ ✔

Solve :

$$y = x^2 - x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 1$$

(x, y) বিন্দুতে অভিলম্বের ঢাল $= -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

$= \frac{-1}{2x-1}$

$(2,3)$ বিন্দুতে অভিলম্বের ঢাল $= \frac{-1}{2\times2-1}$

$= \frac{-1}{3}$

MCQ

২৩. $f(x)$ ফাংশন $x = a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হলে- [য. বো. '১৭]

(i) $f(a)$ সংজ্ঞায়িত হয়

(ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ বিদ্যমান থাকে

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ হয়

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii ✓

Solve : একটি ফাংশন কোনো ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন হবে যদি ব্যবধির যেকোনো বিন্দুতে ফাংশনটির মান থাকে, সীমা নির্ণয় করা যায় এবং ফাংশনটির মান এবং সীমান্ত সমান হয়। অর্থাৎ, $f(x)$ ফাংশনটি $x = a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হবে যদি,

(i) $f(a)$ সংজ্ঞায়িত হয় ✓

(ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ বিদ্যমান থাকে ✓

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ হয় ✓

MCQ

নিচের তথ্যের আলোকে ২৪ ও ২৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

$f(x) = cosx$

২৪. $\lim_{x \to 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)}{3x} =$ কত? [চ. বো. '১৭]

(ক) -1 (খ) 0 (গ) 1 (ঘ) ∞

Solve : $f(x) = cosx$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)}{3x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{sin3x}{3x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{3cosx}{3}$$

$$= \frac{3 \times 1}{3} = 1$$

CQ

নিচের তথ্যের আলোকে ২৪ ও ২৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

$f(x) = cosx$

২৫. $f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) =$ কত? [চ. বো. '১৭]

(ক) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (খ) $-\frac{1}{2}$ (গ) $\frac{1}{2}$ (ঘ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Solve : $f(x) = cosx$

$f'(x) = -sinx$

$f''(x) = -cosx$

$f'''(x) = sinx$

$\therefore f''' = \left(\frac{\pi}{3}\right)$

$= sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

CQ

রাজশাহী বোর্ড - ২০১৯

$y = 2^x \ln \frac{1}{1-x}$; $f(x) = (1-x^2)y_2 - xy_1 - a^2y$

Hints

ক. দেখাও যে, $\lim_{x \to 0} \frac{x}{1-\sqrt{1+x}} = -2$

খ. x এর সাপেক্ষে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

গ. দেখাও যে, $f(x) = 0$, যখন $\sin^{-1} x = \frac{\ln y}{a}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(1+\sqrt{1+x})}{(1-\sqrt{1+x})(1+\sqrt{1+x})}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(1+\sqrt{1+x})}{1-(1+x)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(1+\sqrt{1+x})}{1-1+x}$$

CQ

$y = 2^x \ln\frac{1}{1-x}$; $f(x) = (1-x^2)y_2 - xy_1 - a^2y$

খ. x এর সাপেক্ষে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

$$y = 2^x \ln\frac{1}{1-x}$$

$$y = 2^x \ln(1-x)^{-1}$$

$$y = -2^x \ln(1-x)$$

$$y = 2^x \ln\frac{1}{1-x}$$

$$= 2^x\{\ln 1 - \ln(1-x)\}$$

$$= 2^x\{0 - \ln(1-x)\}$$

$$y = -2^x \ln(1-x)$$

CQ

$y = 2^x \ln \frac{1}{1-x}$; $f(x) = (1 - x^2)y_2 - xy_1 - a^2 y$

গ. দেখাও যে, $f(x) = 0,$ যখন $\sin^{-1} x = \frac{\ln y}{a}$

Twist

$\ln y = a \sin^{-1} x$

$y = e^{a \sin^{-1} x}$

$\ln y = a \sin^{-1} x \quad or \quad y = e^{a \sin^{-1} x}$

দেখাও যে, $f(x) = (1 - x^2)y_2 - xy_1 - a^2 y$

বনের বাঘে খায় না
মনের বাঘে খায়!!

CQ

যশোর বোর্ড - ২০১৯

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5 \quad \ldots\ldots\ldots (i)$

$t = \tan^{-1}\frac{4\sqrt{x}}{1-4x} + x^{\sin^{-1}x} \quad \ldots\ldots\ldots (ii)$

ক. মান নির্ণয় কর - $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+7x}-\sqrt{1-5x}}{x}$

খ. $\frac{dt}{dx}$ নির্ণয় কর।

গ. যে সকল ব্যবধিতে (i) এ বর্ণিত ফাংশনটির মান বৃদ্ধি বা হ্রাস পায় তা নির্ণয় কর।

লালটা	কালাটা
$\tan^{-1}\frac{4\sqrt{x}}{1-4x}$	$x^{\sin^{-1}x}$

ইশারা

গরম / গরম টাকা

$x = 1 , x = -2 , x = 3$

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-3)}$$

$(i) f(x) > 0$ $(ii) f(x) \geq 0$

$(i) f(x) < 0$ $(iv) f(x) \leq 0$

শর্তঃ	$x-1$	$x+2$	$x-3$	$f(x)$
$x < -2$	$-$	$-$	$-$	$\frac{-x-}{-} = -$
$-2 < x < 1$	$-$	$+$	$-$	$+$
$1 < x < 3$	$+$	$+$	$-$	$-$
$x > 3$	$+$	$+$	$+$	$+$

$(i) f(x) > 0$ $-2 < x < 1$ or $x > 3$

$(ii) f(x) \geq 0$ $-2 \leq x \leq 1$ or $x > 3$ $x = -3$

উৎপাদক $= 0$ ধরি

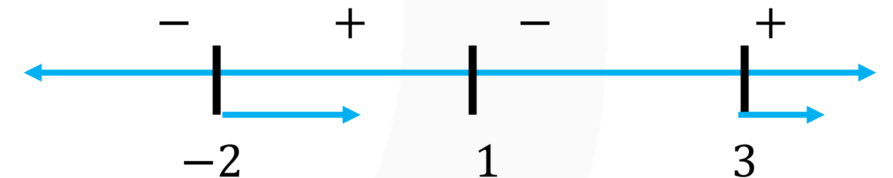
x এর মান নির্ণয় করব

$x - 1 = 0$ $x = 1$

$x + 2 = 0$ $x = -2$

$x - 3 = 0$ $x = 3$

মানগুলো সরলরেখায় বসিয়ে শর্ত গঠন করব যেনো পুরো সংখারেখা Cover হয়



ফাংশন যাচাই

Line Diagram

CQ

$g(x) = 2x$

$h(x) = \frac{1}{2x}, [x \neq 0]$

চট্টগ্রাম বোর্ড - ২০১৯

ক. মান নির্ণয় কর - $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 15x}{2x^2}$

খ. $\varphi(x) = g(x) + h(x)$ এর গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় কর ।

গ. $y = \left\{\frac{1}{2} g(x)\right\}^{\frac{1}{2h(x)}}$ হলে, y_2 নির্ণয় কর।

$$y = \left\{\frac{1}{2} . 2x\right\}^{\frac{1}{2\frac{1}{2x}}} = x^x$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 7x}{3x^2}$$

$$\varphi(x) = 2x + \frac{1}{2x}$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

CQ

[চ. বো. '১৯||প্রশ্ন-৪]

ক. মান নির্ণয় কর - $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 15x}{2x^2}$

$$y = x^x$$
$$\Rightarrow \ln y = x\ln x$$
$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \left(x\,.\frac{1}{x}\right)\ldots$$
$$\Rightarrow y_1 = y(1+\ln x)\ldots(1)$$
$$\Rightarrow y_2 = y\left(0+\frac{1}{x}\right) + (1+\ln x)y_1$$
$$= x^x.\frac{1}{x} + (1+\ln x)y(1+\ln x)$$
$$= x^x.x^{-1} + y(1+\ln x)^2$$
$$= x^x\{\frac{1}{x} + (1+\ln x)^2\}$$

[ANS]

CQ

$e^{msin^{-1}x} \rightarrow e^{msin^{-1}2x}$

দৃশ্যকল্প-১: $g(x) = e^{msin^{-1}2x}$

বরিশাল বোর্ড - ২০১৯

দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 10$

mcq= e^xএর সহগ × $\frac{1}{x}$এর সহগ
$= e^{4\times3} = e^{12}$

ক. মান নির্ণয় কর - $\lim_{x\to0}(1+4x)^{\frac{3}{x}}$

পর্যায়ক্রমিক

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $(1-4x^2)g''(x) - 4xg'(x) = 4m^2g(x)$

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর ফাংশনটির লঘুমান ও গুরুমান নির্ণয় কর।

CQ

ক. মান নির্ণয় কর - $\lim_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{3}{x}}$

[ব. বো. '১৯||প্রশ্ন-৫]

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}$$

$$(1+ax)^n$$
$$= 1 + nax + \frac{n(n-1)}{2!}(ax)^2 + \ \ldots$$

$$\lim_{x\to 0}\left[(1+4x)^{\frac{1}{4x}}\right]^{3\times 4}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left[(1+4x)^{\frac{1}{4x}}\right]^{12}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left\{1 + \frac{1}{4x}.4x + \frac{\frac{1}{4x}\left(\frac{1}{4x}-1\right)}{2!}.(4x)^2 + \cdots\right\}^{12}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left\{1 + 1 + \frac{\frac{1}{4x}\left(\frac{1}{4x}-1\right)}{2!}.(4x)^2 + \cdots\right\}^{12}$$
$$= \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\right)^{12}$$
$$= (e^1)^{12}$$
$$= e^{12}$$

[ANS]

CQ

ক. মান নির্ণয় কর - $\lim_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{3}{x}}$

[ব. বো. '১৯||প্রশ্ন-৫]

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}$$

$$\frac{n(n-1)}{2!}$$

$$\lim_{x\to 0}\left[(1+4x)^{\frac{1}{4x}}\right]^{12}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left\{1 + \frac{1}{4x}.4x + \frac{\frac{1}{4x}\left(\frac{1}{4x}-1\right)}{2!}.(4x)^2 + \cdots\right\}^{12}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left\{1 + 1 + \frac{\frac{1}{4x}\left(\frac{1}{4x}-1\right)}{2!}.(4x)^2 + \cdots\right\}^{12}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\right)^{12}$$

$$= (e^1)^{12}$$

$$= e^{12}$$

[ANS]

CQ

দৃশ্যকল্প-১: $g(x) = e^{m\sin^{-1}2x}$

[ব. বো. ’১৯||প্রশ্ন-৫]

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $(1-4x^2)g''(x) - 4xg'(x) = 4m^2g(x)$

$$y = \lim_{x\to 0}(1+4x)^{3/x}$$
$$\Rightarrow \ln y = \lim_{x\to 0}\ln(1+4x)^{3/x}$$
$$\Rightarrow \ln y = \lim_{x\to 0}\frac{3}{x}\ln(1+4x)$$
$$= 3\lim_{4x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{4x}\times 4$$
$$= 3\times 1\times 4$$
$$\ln y = 12$$
$$\Rightarrow log_e y = 12$$
$$\Rightarrow e^{12} = y$$
$$\therefore y = e^{12}$$

[ANS]

HOME WORK

$g(x) = \sqrt{x}$ একটি বীজগানিতীয় ফাংশন

HSC-2018 (রাজশাহী, কুমিল্লা, চট্টগ্রাম , বরিশাল বোর্ড)

ক. θ এর সাপেক্ষে $\theta^\circ \sin\theta^\circ$ এর অন্তরজ বের কর।

খ. $\frac{2\ln(g(x))}{\{g(x)\}^2}$ ফাংশনের সর্বোচ্চ মান বের কর।

গ. প্রমাণ কর যে, $g(x) + g(y) = g(b)$ বক্ররেখার (x_1, y_1) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক অক্ষদ্বয় হতে কর্তিত অংশের যোগফল b .

$$2\ln(g(x))$$
$$= 2\ln(\sqrt{x})$$
$$= 2\ln x^{\frac{1}{2}}$$
$$= 2 \times \frac{1}{2}\ln x$$
$$= \ln x$$

$$(g(x))^2 = (\sqrt{x})^2$$
$$x$$

DOWNLOAD THE APP

HOME WORK

10 MINUTE SCHOOL

যশোর বোর্ড - ২০১৭

$f(x) = x^{\tan^{-1}x}$

$h(x) = \sqrt{a + b\cos x}$ → $\sqrt{4 + 3\sin x}$

$g(x) = \log_x a$

ক. মান নির্ণয় কর - $\lim\limits_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y}$

খ. $f(x)$ ও $g(x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর ।

গ. $y = h(x)$ হলে, দেখাও যে, $2y.\frac{d^2y}{dx^2} + 2.\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = a$

DOWNLOAD THE APP

HOME WORK

10 MINUTE SCHOOL

কুমিল্লা বোর্ড - ২০১৭

$y = 4x(6-x)^2$ এবং $f(x) = e^{tan^{-1}x}$

$e^{\tan^{-1} x}$ $e^{\tan^{-1} 2x}$

ক. মান নির্ণয় কর - $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x}$

খ. y এর গরিষ্ঠ মান নির্ণয় কর ।

গ. প্রমাণ কর যে, $(1+x^2)f''(x) + (2x-1)f'(x) = 0$

HOME WORK

চট্টগ্রাম বোর্ড - ২০১৭

দৃশ্যকল্প- $f(p) = e^{-2p}$

ক. মান নির্ণয় কর - $\lim_{x \to 0}(1 + 3x)^{\frac{5}{x}}$

খ. দৃশ্যকল্পের আলোকে p এর সাপেক্ষে মূল নিয়মে $f(p)$- এর অন্তরজ নির্ণয় কর

গ. $4f(p) + \frac{9}{f(p)}$ এর চরম মান নির্ণয় কর।

$$8e^{-2p} + \frac{9}{e^{-2p}}$$
$$9e^{2p} + \frac{4}{e^{2p}}$$

চরম মান স্থানে $e^{mx} = e^{-2p}$

HOME WORK

$\boldsymbol{f(x) = \cos x, g(x) = \sin x}$

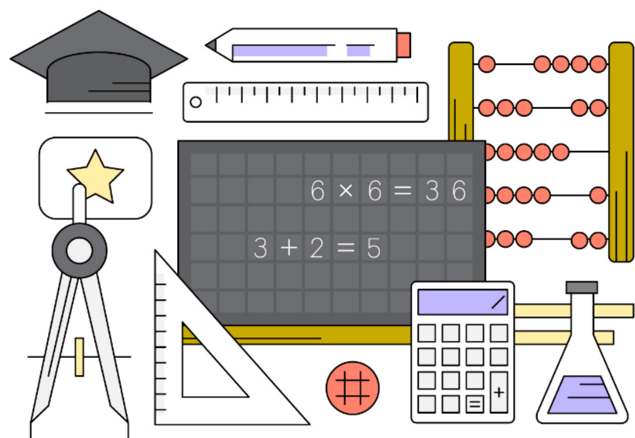
ক. $f(ax)$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

খ. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2f(x) - g(2x)}{1 + f(2x)}$ এর মান নির্ণয় কর ।

গ. যদি $y = g(r \sin^{-1} x)$ হয়, তবে দেখাও যে, $(1 - x^2)y_2 - xy_1 + r^2 y = 0$



যোগজীকরণ





যোগজীকরণ

1. $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$

$\Rightarrow \frac{d}{dx} x^{n+1} = (n+1)x^{n+1-1}$

$\Rightarrow \frac{d}{dx} x^{n+1} = (n+1)x^n$

$\Rightarrow \frac{d}{dx} . \frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n$

2. $\frac{d}{dx} f(x) = F(x)$

$\int F(x)dx = f(x)$

$\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$; অন্তরীকরণ $\rightarrow f\ 3d^2\ dx = x^3$

$\frac{d}{dx}(x^3 + 2) = 3x^2$; অন্তরীকরণ $\rightarrow f\ 3d^2 dx = x^3 + 2$

$\frac{d}{dx}(x^3 + 7) = 3x^2$; অন্তরীকরণ $\rightarrow f\ 3x^2 dx = x^3 + 7$

$\Big\}\ x^3 + c$

যোগজীকরণের সূত্রসমূহ:

01. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

02. $\int e^x dx = e^x + c$

03. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

04. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ $\left[\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a \Rightarrow \frac{d}{dx} \frac{a^x}{\ln a} = a^x\right]$

05. $\int 1\, dx = \int dx = x + c$ $\left[\frac{d}{dx}\, x = 1\right]$

06. $\int \cos x\, dx = \sin x + c$ $\left[\frac{d}{dx} \sin x = \cos x\right]$

07. $\int \cos mx\, dx = \frac{1}{m} \sin mx + c$ $\left[\frac{d}{dx} \sin mx = m \cos mx \Rightarrow \frac{d}{dx} \frac{\sin mx}{m} = \cos mx\right]$

যোগজীকরণের সূত্রসমূহ:

08. $f \sin x \, dx = -\cos x + c$ $\left[\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x\right]$

09. $f \; sex \; x \tan x \; dx = \sec x + c$ $\left[\frac{d}{dx}\sec x = \sec x . \tan x\right]$

10. $f \; sex^2 x \; dx = \tan x + c$ $\left[\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x\right]$

11. $f \; cosec \; x . \cot x = -cosec \; x + c$ $\left[\frac{d}{dx} cosec \; x = -cosec \; x \, . \cot x\right]$

Problems

$$f\ x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{1}{4}\ x^4 + c$$

$$f \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx = f \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\ dx = f\ x^{-\frac{1}{2}}\ dx = \frac{x}{-\frac{1}{2}+1} + c = 2x^{-\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \frac{d}{dx} 2\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\therefore f \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx = 2\sqrt{f(x)} + c$$

$$\therefore f \frac{f^{-1}(x)}{f(x)}\ dx = 2\sqrt{f(x)} + c$$

Problems

3. $\int \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 dx$

$$= \int \left(x^4 + 2x^2.\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) dx$$

$$= \frac{x^{4+1}}{4+1} + 2.x + \frac{x^{-4+1}}{-4+1}$$

$$= \frac{x^5}{5} + 2x - \frac{x^{-3}}{3}$$

$$= \frac{1}{5}x^5 + 2x - \frac{1}{3}.\frac{1}{x^3} + c$$

Ans..

Problems

4. $\boldsymbol{f\left(\frac{p}{x} - \frac{1}{x^2} + 4\right) dx}$

$$= P\ f\frac{1}{x}dx - 1\ f\frac{1}{x^2}dx + 4\ f\ dx$$

$$= P.\ln|x| - q\,\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 4x$$

$$= P\ln x + \frac{q}{x} + 4x + c$$

Ans..

Problems

5. $\int (3\, cosec^2 x - sec\, x\, tan\, x)dx$

$= \int 3cosec^2 x\, dx - \int \sec x \tan x\ dx$

$= 3(-cotx) - \sec x$

$= -3\cot x - \sec x + c$

Ans..

Problems

6. $\mathbf{1 - \sin 2x}$

$= \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x$

$= (\sin x - \cos x)^2$

$= (\cos x - \sin x)^2$

7. $\mathbf{1 + \sin 2x}$

$= \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x$

$= (\sin x + \cos x)^2$

Problems

8. $\boldsymbol{\int \sqrt{(1-\sin 2x)}\, dx}$

$= \int \sqrt{(\cos x - \sin x)^2}\, dx$

$= \int \cos x \;\, dx - \int \sin x dx$

$= \sin x + \cos x \;\, + c$

Ans..

9. $\boldsymbol{\int \sqrt{1-\cos 2x}\;\, dx}$

$= \int \sqrt{2 \sin^2 x}\;\, dx$

$= \sqrt{2} \int \sin x\, dx = \sqrt{2}. -\cos x$

$= -\sqrt{2} \cos x + c$

Ans..

Problems

10. $\boldsymbol{f\sqrt{(1+\sin 2x)}\,dx}$

$$= f\sqrt{(\sin x + \cos x)^2}\,dx$$

$$= f\sin x\,dx + f\cos x dx$$

$$= -\cos x + \sin x$$

$$= \sin x\ - \cos x + c$$ **Ans..**

11. $\boldsymbol{f\frac{sinx+cosx}{\sqrt{1+\sin 2x}}\,dx}$

$$= f\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}}\,dx$$

$$= f\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx = f\,dx = x + c$$

Ans..

Problems

12. $\int \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}\,dx$

$= \int \frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x}\,dx$

$= \int \tan^2 x\,dx$

$= \int (\sec^2 x - 1)\,dx$

$= \tan x - x + c$ **Ans..**

Problems

13. $\int \sec^2 x \; cosec^2 x \, dx$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x . \sin^2 x} \, dx$$

$$= \int \frac{4}{(2 \cos x \sin x)^2} \, dx$$

$$= 4 \int \frac{1}{\sin^2 2x} \, dx$$

$$= 4 \int cosec^2 2x \; dx$$

$$= 4.(-\cot 2x) \; \frac{1}{2}$$

$$= -2 \cot 2x + c$$

Ans..

Problems

14 . $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$

$$= \int \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}\, dx$$

$$= \int \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}{x-x+1}\, dx$$

$$= \int \left(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}\right)dx \text{ b}$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$$

$$= \frac{2}{3}\left\{x^{\frac{3}{2}} + (x+1)^{\frac{3}{2}}\right\} + c$$

Ans..

Problems

15. $\int (1-2x)^5\, dx$

ধরি, $1 - 2x = z$

$$\Rightarrow 0 - 2dx = dz$$

$$\Rightarrow -2dx = dz$$

$$\Rightarrow dx = -\frac{1}{2}dz$$

$$\therefore \int z^5 \left(-\frac{1}{2}dz\right) = \frac{1}{2}.\frac{z^6}{6}$$

$$= -\frac{1}{12}(1-2x)^6 + c$$

Ans..

Shortcut

16. $\int (1-2x)^5 dx$

$= \frac{(1-2x)^{5+1}}{5+1} \times \left(-\frac{1}{2}\right)$

$= -\frac{1}{12}(1-2x)^6 + c$ [x এর সহগের বিপরীত রাশি]

Ans..

17. $\int \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) dx$

$= -\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \times \frac{1}{3}$

$= -\frac{1}{3}\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + c$

Ans..

Problems

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x-3}}$

$$= \int \frac{(\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x-3})}{(\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x-3})(\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x-3})}\, dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x-3}}{2x+5-2x+3}\, dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x-3}}{8}\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\left\{ \int (2x+5)^{\frac{1}{2}}dx - \int (2x-3)^{\frac{1}{2}}dx \right\}$$

$$= \frac{1}{8}\left\{ \frac{(2x+5)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{(2x-3)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right\}$$

$$= \frac{1}{8}\left\{ \frac{2}{3}(2x+5)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(2x-3)^{\frac{3}{2}} \right\}$$

$$= \frac{1}{12}\left\{ (2x+5)^{\frac{3}{2}} - (2x-3)^{\frac{3}{2}} \right\}$$

Ans..

Problems

19. $f\sqrt{1-\cos x}\ dx$

$$= f\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}\ dx$$

$$= \sqrt{2}\ f\ \sin\frac{x}{2}\ dx$$

$$= \sqrt{2}\left(-\cot\frac{x}{2}\right).2$$

$$= -2\sqrt{2}\cot\frac{x}{2}+c$$

Ans..

20. $f\sqrt{1+\cos x}\ dx$

$$= f\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}\ dx$$

$$= \sqrt{2}\ f\ \cos\frac{x}{2}\ dx$$

$$= \sqrt{2}.\frac{1}{\frac{1}{2}}\sin\frac{x}{2}$$

$$= 2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}+c$$

Ans..

Problems

21. $\int \sqrt{1 + sinx}\, dx$

$$= \sqrt{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\ dx$$

$$= \int \sqrt{\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2}\ dx$$

$$= \int \sin\frac{x}{2}\ dx + \int \cos\frac{x}{2}\ dx$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}}\left(-\cos\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{\frac{1}{2}}\left(\sin\frac{x}{2}\right)$$

$$= 2\sin\left(\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) + c$$

Ans..

Problems

22. $\int \sin 5x \cos 3x\, dx$

$$= \frac{1}{2}\int 2\sin 5x \cos 3x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \{\sin(5x+3x)+\sin(5x-3x)\}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (\sin 8x + \sin 2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 8x}{8}+\frac{-\cos 2x}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{\cos 8x}{4}+\cos 2x\right)+c$$

Ans..

Problems

23. $\int \sin 3x \cos x\, dx$

$$= \frac{1}{2} \int 2 \sin 3x \cos x\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \{\sin(3x + x) + \sin(3x - x)\}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int (\sin 4x + \sin 2x) + dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{-\cos 4x}{4} + \frac{-\cos 2x}{2} \right)$$

$$= -\frac{1}{4} \left(\frac{\cos 4x}{2} + \cos 2x \right)$$

Ans..

Problems

24. $\int \cos 5x \sin 2x \, dx$

$$= \frac{1}{2} \int 2 \cos 5x \sin 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \{\sin(5x + 2x) - \sin(5x - 2x)\} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int (\sin 7x - \sin 3x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\cos 7x}{7} - \frac{-\cos 3x}{3} \right\}$$

$$= \frac{\cos 3x}{6} - \frac{\cos 7x}{3}$$ **Ans..**

25. $\int \cos 3x \cos 2x dx$

$$= \frac{1}{2} \int 2 \cos 3x \cos 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \{\cos(3x + 2x) + \cos(3x - 2x)\} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int (\cos 5x + \cos x) \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 5x}{5} + \sin x \right) + c$$ **Ans..**

Problems

26. $\int \sin 3x \sin x dx$

$$= \frac{1}{2} \int 2 \sin 3x \sin x dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \{\cos(3x - x) - \cos(3x + x)\} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos 4x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\sin 2x - \frac{\sin 4x}{2} \right) + c$$

Ans..

Problems

27. $\frac{1}{2}\int \cos^2 x\, dx$

$= \frac{1}{2}\int 2\cos^2 x dx$ $[2\cos^2 A = 1 + \cos 2A]$

$= \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2x)dx$

$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + c$ **[Ans]**

28. $\int \sin^2 xdx$

$= \frac{1}{2}\int 2\sin^2 xdx$ $[2\sin^2 x = 1 - 2\sin 2x]$

$= \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x)dx$

$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + c$ **[Ans]**

Problems

29. $\int \cos^3 x dx$

$= \frac{1}{4} \int 4\cos^3 x dx$

$\left[\begin{array}{l} \cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A \\ \Rightarrow 4\cos^3 A = \cos^3 A + 3\cos A \end{array}\right]$

$= \frac{1}{4} \int (3\cos x + \cos 3x) dx$

$= \frac{1}{4}\left(3\sin x + \frac{\sin 3x}{3}\right) + c$ [*Ans*]

30. $\int \sin^3 x dx$

$= \frac{1}{4} \int sin^3 dx$

$\left[\begin{array}{l} \sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A \\ 4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x \end{array}\right]$

$= \frac{1}{4} \int (3\sin x - \sin 3x) dx$

$= \frac{1}{4}\left(-3\cos x - \frac{-\cos 3x}{3}\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{\cos 3x}{3} - 3\cos x\right) + c$ [*Ans*]

Problems

31. $\boldsymbol{\int \cos^4 x dx}$

$= \int (\cos^3 x)^2 dx$

$= \frac{1}{4}\int (2\cos^2 x)^2 dx$

$= \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^2 dx$

$= \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x+\cos^2 2x) dx$

$= \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x) dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}.2\cos^2 2x \; dx$

$= \frac{1}{4}\left(x+2.\frac{\sin 2x}{2}\right) + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x) \, dx$

$= \frac{1}{4}(x+\sin 2x) + \frac{1}{8}\left(x+\frac{\sin 4x}{4}\right) + c$ **[*Ans*]**

Problems

32. $\int \sin^4 x dx$

$= \int (\sin^2 x)^2 dx$

$= \frac{1}{4} \int (2\sin^2 x)^2 dx$

$= \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x)^2 \, dx$

$= \frac{1}{4} \int (1 - 4\cos 2x + 4\cos^2 2x) dx$

$= \frac{1}{4} \int (1 - 4\cos 2x) + \frac{1}{4} \int 4\cos^2 2x \, dx$

$= \frac{1}{4}\left(x - 4\frac{\sin 2x}{2}\right) + \frac{1}{4}.2 \int 2\cos^2 2x \, dx$

$= \frac{1}{4}(x - 2\sin 2x) + \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) dx$

$= \frac{1}{4}(x - 2\sin 2x) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 4x}{4}\right) + c$ **[Ans]**

Problems

33. $\int \sin^5 x dx$

$= \int \sin^4 x \sin x dx$

$= \int (\sin^2 x)^2 . \sin x dx$

$= \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x dx$

ধরি, $\cos x = z$

$\Rightarrow -\sin x dx = dz$

$\Rightarrow \sin x dx = -dz$

$\therefore \int (1 - z^2)^2 (-dz)$

$= -\int (1 - 2z^2 + z^4) dz$

$= -\left(z - 2\frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5}\right)$

$= -\left(\cos x - \frac{3}{2}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x\right) + c$ [Ans]

Problems

34. $\int \cos^5 xdx$

$= \int \cos^4 x \,.\cos x \; dx$

$= \int (\cos^2 x)^2 .\cos x \; dx$

$= \int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x \; dx$

ধরি, $\sin x = z$

$\Rightarrow \cos x \; dx = dz$

$\therefore \int (1 - z^2)^2 dz$

$= \int (1 - 2z^2 + z^4) dz$

$= z - 2.\frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5}$

$= \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + c$ [*Ans*]

Problems

35. $\int \sin^2 x \cos 2x \, dx$

$= \int \sin^2 x \, (1 - 2\sin^2 x) dx$

$= \int (\sin^2 x - 2\sin^4 x) dx$

$= \int \sin^2 x \, dx - \int 2\sin^4 x \, dx$

$= \frac{1}{2}\int 2\sin^2 x \, dx - \frac{1}{2}\int (2\sin^2 x)^2 \, dx$

$= \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x) dx - \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x)^2 \, dx$

$= \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x) dx - \frac{1}{2}\int (1 - 2\cos 2x) dx - \frac{1}{4}\int (1 + \cos 4x) dx$

$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(x - 2.\frac{\sin 2x}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(x + \frac{\sin 4x}{4}\right) + c$

$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) - \frac{1}{2}(x - \sin 2x) - \frac{1}{4}\left(x + \frac{\sin 4x}{4}\right) + c$ **[*Ans*]**

Problems

36. $f\ sin^2 x\ cos^2 x\ dx$

$$= \frac{1}{4} f\ (2 \sin x \cos x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4} f\ \sin^2 2x\ dx$$

$$= \frac{1}{4} . \frac{1}{4}\ f\ \sin^2 2x\ \ dx$$

$$= \frac{1}{8} f\ (1 - \cos 4x) dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(x - \frac{\sin 4x}{4}\right) + c \qquad [Ans]$$

Problems

37. $\int sin^3 x \, cos^3 x \; dx$

$= \int \sin^3 x \, . \cos^2 x \, . \cos x \, dx$

$= \int \sin^3 (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx$

ধরি, $\sin x = z$

$\Rightarrow \cos x \, dx = dz$

$\therefore \int z^3 (1 - z^2) dz$

$= \int (z^3 - z^5) dz$

$= \frac{z^4}{4} - \frac{z^6}{6} + c$

$= \frac{1}{4} \sin^4 x - \frac{1}{6} \sin^6 x + c$ [*Ans*]

Problems

38. $f\ sin^4 x\, cos^4 x$

$$= \frac{1}{16} f\ (2\sin x \cos x)^4\ dx$$

$$= \frac{1}{16} f \frac{1}{4} \times (2\sin^2 2x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{64}\ f\ (1 - \cos 4x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{64} f\ (1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x) dx$$

$$= \frac{1}{64}\ f\ (1 - 2\cos 4x) + \frac{1}{64}\ f\ \cos^2 4x\ dx$$

$$= \frac{1}{64}\left(x - 2.\frac{\sin 4x}{4}\right) + \frac{1}{128}\ f\ (1 + \cos 4x)\ dx$$

$$= \frac{1}{64}\left(x - \frac{\sin 4x}{2}\right) + \frac{1}{128}\left(x + \frac{\sin 4x}{4}\right) + c$$

[Ans]

Problems

39. $\boldsymbol{f \frac{1}{1-\cos x}\, dx}$

$$= f \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)}\, dx$$

$$= f \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x}\, dx$$

$$= f \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}\, dx$$

$$= f\ (\cos^2 x + cosec\ x \cot x)dx$$

$$= -\cot x - cosec\ x + c \qquad [Ans]$$

Problems

40. $\int \frac{1}{1-\sin x}\, dx$

$= \int \frac{1+\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)} dx$

$= \int \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x}\, dx$

$= \int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\, dx$

$= \int (\sec^2 x + \tan x.\sec x) dx$

$= \tan x + \sec x + c$ **[Ans]**

Problems

41. $\int e^{5x} dx$

$= \frac{1}{5} e^{5x} + c$ [*Ans*]

42. $\int e^{5-3x}\, dx$

$= -\frac{1}{3} e^{5-3x} + c$ [*Ans*]

Problems

43. $f \frac{e^{5x}+e^{3x}}{e^{x}+e^{-x}}\, dx$

$= f \frac{e^{4x}(e^{x}-e^{-x})}{(e^{x}+e^{-x})}\, dx$

$= f\ e^{4x}\, dx$

$= \frac{1}{4}e^{4x} + c$ [*Ans*]

44. $f \frac{e^{x}+1}{\sqrt{e^{x}}}\, dx$

$= f\left(\frac{e^{x}}{\sqrt{e^{x}}} + \frac{1}{e^{\frac{x}{2}}}\right) dx$

$= f\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right) dx$

$= 2e^{\frac{x}{2}} - 2\, e^{-\frac{x}{2}} + c$ [*Ans*]

Problems

45. $\int \frac{x}{x-1}\, dx$

$= \int \frac{x-1+1}{x-1}\, dx$

$= \int \left(\frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1}\right) dx$

$= \int \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) dx$

$= x + \ln|x-1| + c$ [*Ans*]

$$\int \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

46. $\int \cot x\, dx$

$= \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$

$= \ln|\sin x| + c$ [*Ans*]

Problems

47. $\int \tan x \; dx$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$$

$$= -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx$$

$$= -\ln|\cos x| + c$$

$$= \ln|\sec x| + c \qquad [Ans]$$

Problems

48. $f\ sec\ xdx$

$$= f \frac{1}{\cos x}\ dx$$

$$= f \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}\ dx$$

$$= f \frac{1}{2\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)\ \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)} dx$$

$$= f \frac{\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}\ dx$$

$$= \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + c$$ **[Ans]**

Problems

অন্যনিয়ম

49. $\int \sec x \, dx$

$$= \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)} dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

$$= \ln|\sec x + \tan x| + c$$ [Ans]

50. $\int cosec\, x \, dx$

$$= \int \frac{cosec\, x\,(cosec\, x - \cot x)}{(cosec\, x - \cot x)} dx$$

$$= \int \frac{cosec^2 x - cosec\, x . \cot x}{cosec\, x - \cot x} dx$$

$$= \ln|cosec\, x - \cot x| + c$$ [Ans]

Problems

প্রতিস্থাপন পদ্ধতি

51. $\int \cos x \; e^{\sin x} \; dx$

$= \int e^{z} dz$

$= e^{z} + c$

$= e^{sinx} + c$ [Ans]

ধরি, $\sin x = z$

$\Rightarrow \cos x \; dx = dz$

52. $\int x \, a^{x^2} \, dz$

$= \int a^{z}.\frac{1}{2} \; dz$

$= \frac{1}{2}.\frac{a^{z}}{\ln a} + c$

$= \frac{1}{2}.\frac{a^{x^2}}{\ln a} + c$ [Ans]

ধরি, $x^2 = z$

$\Rightarrow 2x \; dx = dz$

$\Rightarrow x \; dx = \frac{1}{2} dz$

Problems

53. $\int \sin^3 x \cos x dx$

$= \int z^3 dz$

$= \frac{z^4}{4} + c$

$= \frac{\sin^4 x}{4} + c$ [Ans]

ধরি, $\sin x = z$

$\Rightarrow \cos x dx = dz$

54. $\int \frac{\sin x}{3+4\cos x} dx$

$= \int \frac{-\frac{1}{4}dz}{z}$

$= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{z}\, dz$

$= -\frac{1}{4}\ln|z| + c$

$= -\frac{1}{4}\ln|3 + 4\cos x| + c$ [Ans]

ধরি, $3 + 4\cos x = z$

$\Rightarrow 4(-\sin x)dx = dz$

$\Rightarrow \sin x\, dx = -\frac{1}{4}dz$

Problems

55. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$

ধরি, $\sin x = z$

$\Rightarrow \cos x dx = dz$

$= \int \frac{dz}{\sqrt{z}}$

$= \int z^{-\frac{1}{2}} dz$

$= \frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$

$= 2 z^{\frac{1}{2}} + c$

$= 2\sqrt{\sin x} + c$ [Ans]

Shortcut: $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{\sin x} + c$

eg. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dz = 2\sqrt{\sin x} + c$

Problems

56. $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x . \cos x} dx$

$= \int \frac{\sqrt{\tan x} \sec^2 x}{\tan x} dz$ [$\cos^2 x$ দ্বারা ভাগ করে]

$= \int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan x}} dx$

$= 2\sqrt{\tan x} + c$ [*Ans*]

Problems

57. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\, dx$

$= \int \frac{\frac{1}{2}dz}{\sqrt{z}}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{z}}\, dz$

$= \frac{1}{2}.2\sqrt{z} + c$

$= \sqrt{x^2 - a^2} + c$ [Ans]

ধরি, $x^2 - a^2 = z$

$\Rightarrow 2\, xdx = dz$

$\Rightarrow xdx = \frac{1}{2}dz$

Problems

58. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-2x^4}}dx$

$= \int \frac{-\frac{1}{8}dz}{\sqrt{z}}$

$= -\frac{1}{8}.2\sqrt{z} + c$

$= -\frac{1}{4}\sqrt{1-2x^4} + c$ [*Ans*]

ধরি, $1 - 2x^4 = z$

$\Rightarrow -2.x^3\,dx = dz$

$\Rightarrow -8x^3dx = dz$

$\Rightarrow x^3dx = -\frac{1}{8}dz$

59. $\int \frac{1}{x(1+\ln x)}dx$

$= \int \frac{dz}{z}$

$= \ln|z| + c$

$= \ln|1 + \ln x| + c$ [*Ans*]

ধরি, $1 + \ln x = z$

$\Rightarrow \frac{1}{x}dx = dz$

- **কিছু আদর্শ যোগজ:**

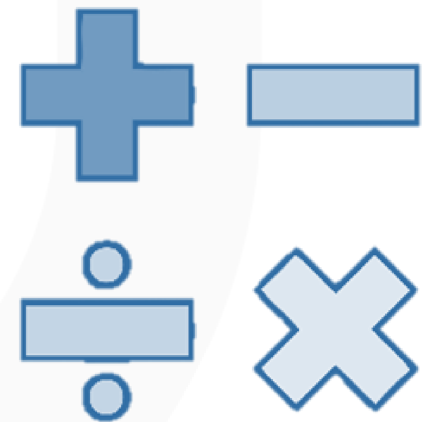
1. $$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} tan^{-1}\frac{x}{a} + c$$

2. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = sin^{-1}\frac{x}{a} + c$$

3. $$\int \frac{dx}{a^2 - x} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + c$$

4. $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + c$$





- কিছু আদর্শ যোগজ:

5. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = ln\left|\sqrt{a^2 + x^2} + x\right| + c$$

6. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = ln\left|\sqrt{x^2 - a^2} + x\right| + c$$

7. $$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} sin^{-1}\frac{x}{a} + c$$



Problems

60. $\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$

$\Rightarrow \int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \tan^{-1}x + c$

[Ans.]

61. $\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \sin^{-1}x + c$

[Ans.]

প্রমাণ

62. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$

$= \int \frac{dx}{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)}$

$= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\, dx = \frac{1}{a}\int \frac{\frac{1}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\, dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$

[Proved]

Problems

প্রমাণ

63. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$$

[Proved]

64. $\frac{d}{dx}\sin^{-1}\frac{x}{a} = ?$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \times \frac{1}{a}$$

$$= \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

[Ans.]

Problems

প্রমাণ-65: $\int \frac{dx}{a^2-x^2}$

$$= \int \frac{dx}{(a+x)(a-x)}$$

$$= \int \left\{\frac{1}{(a-x)(a+a)} + \frac{1}{(a+x)(a+a)}\right\} dx$$

$$= \int \left\{\frac{1}{2a(a-x)} + \frac{1}{2a(a+x)}\right\} dx$$

$$= \frac{1}{2a}\left\{\int \frac{1}{a-x} dx + \int \frac{1}{a+x} dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2a}\{-\ln|a-x| + \ln|a+x|\}$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$$

[Proved]



Problems

66. $\int \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2} dx$

$= \int e^z dz$

$= e^z + c$

$= e^{\tan^{-1} x} + c$

[Ans.]

ধরি,

$\tan^{-1} x = z$

$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} dx = dz$



Problems

67. $\int \frac{(\tan^{-1} x)^2}{1+x^2} dx$

$= \int z^2 dz$

$= \frac{z^{2+1}}{2+1} + c$

$= \frac{1}{3} z^3 + c = \frac{1}{3} (\tan^{-1} x)^3 + c$

[Ans.]

ধরি,

$\tan^{-1} x = z$

$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} dx = dz$

68. $\int \frac{dx}{(1+x^2) \tan^{-1} x}$

$= \int \frac{1}{z} dz$

$= \ln|z| + c$

$= \ln|\tan^{-1} x| + c$ [Ans.]

ধরি,

$\tan^{-1} x = z$

$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} dx = dz$

Problems

69. $\int \frac{x^2 \tan^{-1} x^3}{1+x^6} dx$

$= \int z \cdot \frac{1}{3} dz$

$= \frac{1}{3} \int z dz$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{z^2}{2} + c$

$= \frac{1}{6} (\tan^{-1} x^3)^2 + c$

[Ans.]

ধরি,

$\tan^{-1} x^3 = z$

$\Rightarrow \frac{3x^2}{1+x^6} dx = dz$

$\Rightarrow \frac{x^2}{1+x^6} dx = \frac{1}{3} dz$

70. $\int \frac{e^{\sin^{-1} x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$= \int e^z dz$

$= e^z + c = e^{\sin^{-1} x} + c$

[Ans.]

ধরি,

$\sin^{-1} x = z$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = dz$

Problems

71. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{5^2-x^2}}$

$= \sin^{-1}\frac{x}{5} + c$

[Ans.]

72. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-16^2}}$

$= \frac{1}{4}\int \frac{4.dx}{\sqrt{3^2-(4x)^2}}$

$= \frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{4x}{3} + c$

[Ans.]



Problems

73. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\sqrt{3}\, dx}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3}\, x)^2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \sin^{-1} \frac{\sqrt{3}\, x}{\sqrt{2}} + c$

[Ans.]

74. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$

$= \frac{1}{2} \int \frac{2dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - (2x)^2}}$

$= \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{2x}{\sqrt{5}} + c$

[Ans.]

Problems

75. $\int \frac{dx}{4+x^2}$

$= \int \frac{dx}{2^2+x^2}$

$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + c$

[Ans.]

76. $\int \frac{dx}{9+4x^2}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{3^2+(2x)^2}$

$= \frac{1}{2}.\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{2x}{3} + c$

$= \frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{2x}{3} + c$

[Ans.]

Problems

77. $\int \frac{dx}{25+16x^2}$

$= \frac{1}{4} \int \frac{4\,dx}{5^2+(4x)^2}$

$= \frac{1}{4} . \frac{1}{5} \tan^{-1} \frac{4x}{5} + c$

$= \frac{1}{20} \tan^{-1} \frac{4x}{5} + c$

[Ans.]



Problems

78. $\int \frac{dx}{x^2-16}$

$= \int \frac{dx}{x^2-4^2}$

$= \frac{1}{2\times4} \ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right| + c$

[Ans.]

79. $\int \frac{dx}{4x^2-3}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{(2x)^2-(\sqrt{3})^2}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln\left|\frac{2x-\sqrt{3}}{2x+\sqrt{3}}\right| + c$

[Ans.]

Problems

80. $\int \frac{dx}{16-4x^2}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{4^2-(2x)^2}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2\times4} \ln\left|\frac{4+2x}{4-2x}\right| + c$

$= \frac{1}{16} \ln\left|\frac{4+2x}{4-2x}\right| + c$

[Ans.]

81. $\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$

$= \int \frac{dx}{x^2 2.x.3+3^2+16}$

$= \int \frac{dx}{(x+3)^2+4^2} = \frac{1}{4}\tan^{-1}\frac{x+3}{4} + c$

[Ans.]

Problems

82. $\int \frac{dx}{x^2-6x+25}$

$= \int \frac{dx}{x^2-2.x.3+3^2+16}$

$= \int \frac{dx}{(x-3)^2+4^2}$

$= \frac{1}{4}\tan^{-1}\frac{x-3}{4} + c$

[Ans.]



Problems

83. $\int \frac{dx}{x^2-x+1}$

$= \int \frac{dx}{x^2-2x.\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\left(1-\frac{1}{4}\right)}$

$= \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \tan^{-1} \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c$

$= \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c$

[Ans.]

Problems

84. $\int \frac{x\,dx}{x^4+1}$

$= \int \frac{x\,dx}{1+(x^2)^2}$

$= \int \frac{\frac{1}{2}dz}{1+z^2}$

$= \frac{1}{2}\tan^{-1} z + c$

$= \frac{1}{2}\tan^{-1} x^2 + c$

[Ans.]

ধরি,

$x^2 = z$

$\Rightarrow 2xdx = dz$

$\Rightarrow xdx = \frac{1}{2}dz$

Problems

85. $\int \frac{\cos x dx}{3+\cos^2 x}$

$= \int \frac{\cos x dx}{3+1-\sin^2 x}$

$= \int \frac{\cos x dx}{4-\sin^2 x}$

$= \int \frac{dz}{2^2-z^2}$

$= \frac{1}{2\times 2} \ln \left|\frac{2+z}{2-z}\right| + c$

$= \frac{1}{4} \ln \left|\frac{2+\sin x}{2-\sin x}\right| + c$

[Ans.]

ধরি,

$\sin x = z$

$\Rightarrow \cos x dx = dz$

Problems

$$86. \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\, dx$$

$$= \int \frac{x^2}{\sqrt{1-(x^3)^2}}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{3}dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$= \frac{1}{3}\sin^{-1} z + c$$

$$= \frac{1}{3}\sin^{-1} x^3 + c$$

[Ans.]

ধরি,

$$x^3 = z$$

$$\Rightarrow 3x^2dx = dz$$

$$\Rightarrow x^2dx = \frac{1}{3}dz$$






Problems

87. $\int \frac{x^2 dx}{e^{x^3}+e^{-x^3}}$

$= \int \frac{\frac{1}{3}dz}{e^z+e^{-z}}$

$= \frac{1}{3}\int \frac{dz}{e^z+\frac{1}{e^z}}$

$= \frac{1}{3}\int \frac{dz}{\frac{(e^z)^2+1}{e^z}}$

$= \frac{1}{3}\int \frac{e^z\, dz}{1^2+(e^z)^2}$

$= \frac{1}{3}\tan^{-1} e^z + c$

$= \frac{1}{3}\tan^{-1} e^{x^3} + c$

[Ans.]

ধরি,

$x^3 = z$

$\Rightarrow 3x^2dx = dz$

$\Rightarrow x^2dx = \frac{1}{3}dz$

Problems

88. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}\, dx$

$= \int \frac{(1-z)(-dz)}{\sqrt{z}}$

$= \int \frac{z-1}{\sqrt{z}} dz$

$= \int \left(\frac{z}{\sqrt{z}} - \frac{1}{\sqrt{z}}\right) dz$

$= \frac{z^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{z^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c$

$= \frac{3}{2} z^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{z} + c$

$= \frac{3}{2}(1-x)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{1-x} + c$

[Ans.]

ধরি,

$1 - x = z$

$\Rightarrow 0 - dx = dz$

$\Rightarrow dx = -dz$

আবার,

$1 - x = z$

$\Rightarrow 1 - z = x$

Problems

89. $\int \frac{dx}{\tan x}$

$$= \int \frac{dx}{1+\frac{sinx}{cosx}}$$

$$= \int \frac{dx}{\frac{csox+sinx}{cosx}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2cosxdx}{cosx+sinx}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{cosx+sinx+(cosx-sinx)}{cosx+sinx}dx$$

[লবের রাশি = হর + হরের অন্তরজ]

$$= \frac{1}{2}\int \left\{\frac{(cosx+sinx)}{(cosx+sinx)} + \frac{cosx-sinx}{cosx+sinx}\right\}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{cosx-sinx}{cosx+sinx}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln|cosx + sinx| + c$$

Problems

$$90 \int \frac{d\,\theta}{1+\cos^2\theta}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{\cos^2\theta}}{\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}}\, d\theta$$

$$= \int \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta+1}\, d\theta$$

$$= \int \frac{\sec^2\theta}{1+\tan^2\theta+1}\, d\theta$$

$$= \int \frac{\sec^2\theta}{2+\tan^2\theta}\, d\theta$$

$$= \int \frac{dz}{\left(\sqrt{2}\right)^2+z^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{z}{\sqrt{2}} + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{\tan\theta}{\sqrt{2}} + c$$

ধরি, $tan\theta = z$

$\Rightarrow \sec^2\theta\, d\theta = dz$

Problems

90. $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}}$

ধরি, $x^{\frac{1}{4}} = z$

$\Rightarrow x = z^4$

$\Rightarrow dx = 4z^3dz$

$= \int \frac{4z^3dz}{z^2-z}$

$= \int \frac{4z^3dz}{z(z-1)}$

$= \int \frac{4z^3dz}{(z-1)}$

$= 4\int \frac{z^2-1+1}{z-1}\,dz$

$= 4\int \left(\frac{z^2-1}{z-1} + \frac{1}{z-1}\right) dz$

$= 4\int \left\{\frac{(z+1)(z-1)}{(z-1)} + \frac{1}{z-1}\right\} dz$

$= 4\int (z+1)dz + 4\int \frac{1}{z-1}\,dz$

$= 4.\frac{z^2}{2} + 4z + 4\ln|z-1| + c = 2x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{1}{4}} + 4\ln\left|x^{\frac{1}{4}} - 1\right| + c$

Problems

$$\int uvdx = u\int vdx - \int\left\{\frac{d}{dx}u\int vdx\right\}dx$$

$LATE$

log, n

$\sin^{-1}$
$\cos^{-1}$

$x^2, x^3, 4$

e^x, a^x, z^x

Problems

91. $\int$ **x sinx dx**

$= x \int sinxdx - \int \left\{\frac{d}{dx}(x) \int sindx\right\} dx$

$= x(-cosx) - \int(-cosx)dx$

$= -xcosx + \int cosxdx$

$= -xcosx + sinx + c$

92. $\int x^2 e^x dx$

$= x^2 \int e^x dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(x^2) \int e^x dx\right\} dx$

$= x^2 e^x - \int 2xe^x dx$

$= x^2 e^x - 2\left[x \int e^x dx - \int \left\{\frac{d}{dx} \times \int e^x dx\right\} dx\right]$

$= x^2 e^x - 2\left[xe^x - \int e^x dx\right]$

$= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c$

Problems

93. $\int lnx\, dx$ [MCQ]

$= \ln x \int dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(lnx) \int dx\right\} dx$

$= lnx\ x\ x - \int \frac{1}{x} \times x\ dx$

$= x\ lnx - \int dx$

$= x\ lnx - x + c$

94. $\int \tan^{-1} x\, dx$

$= \tan^{-1} x \int dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) \int dx\right\} dx$

$= \tan^{-1} x \times x\ - \int \frac{1}{1+x^2} \times x$

$= xtan^{-1}x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx$

$= xtan^{-1}x - \frac{1}{2} \ln|a + x^2| + c$

Problems

95. $\int \sin^{-1} x \, dx$

$= \sin^{-1} x \int dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) \int dx\right\} dx$

$= x\sin^{-1}x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$= x\sin^{-1}x + \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$= x\sin^{-1}x + \frac{1}{2}.2\sqrt{1-x^2} + c$

$= x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + c$

$\left[\int \frac{f^1(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c\right]$

Problems

96. $\int \cos^{-1} x\, dx$

$= \cos^{-1} x \int dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (\cos^{-1} x) \int dx \right\} dx$

$= x\cos^{-1} x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

$= x\cos^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

$= x\cos^{-1} x - \frac{1}{2} . 2\sqrt{1-x^2} + c$

$= x\cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + c$

$\left[\int \frac{f^1(x)}{\sqrt{f(x)}}\, dx = 2\sqrt{f(x)} + c \right]$

Problems

97. $\int \cot^{-1} x \, dx$

$= \cot^{-1} x \int dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) \int dx\right\} dx$

$= x\cot^{-1}x - \int \frac{-1}{1+x^2} . xdx$

$= x\cot^{-1}x + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx$

$= x\cot^{-1}x + \frac{1}{2}\ln|1 + x^2| + c$

DOWNLOAD THE APP

Problems

10 MINUTE SCHOOL

98. $\int x \sin^{-1} x^2 dx$

$= \int \sin^{-1} z . \frac{1}{2} dz$

$= \frac{1}{2} \int \sin^{-1} z \, dz$

$= \frac{1}{2}\left[\sin^{-1} z \int dz - \int \left\{\frac{d}{dz}(\sin^{-1} z) \int dz\right\} dz\right]$

$= \frac{1}{2}\left[z\sin^{-1} z - \int \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} dz\right]$

$= \frac{1}{2}\left[z\sin^{-1} z + \frac{1}{2} \int \frac{-2z}{\sqrt{1-z^2}} dz\right]$

$= \frac{1}{2}\left[z\sin^{-1} z + \frac{1}{2} . 2\sqrt{1-z^2}\right] + c$

$= \frac{1}{2}\left[z\sin^{-1} z + \sqrt{1-z^2}\right] + c$

$= \frac{1}{2}\left[x^2 \sin^{-1}(x^2) + \sqrt{1-x^4}\right] + c$

ধরি, $x^2 = z$

$\Rightarrow 2x dx = dz$

$\Rightarrow x dx = \frac{1}{2} dz$

$\left[\int \frac{f^1(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c\right]$

Problems

99. $\int x \sin^{-1} x \, dx$

ধরি, $I = \int x \sin^{-1} x \, dx$

$= \sin^{-1} x \int x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (\sin^{-1} x) \int x dx \right\} dx$

$= \frac{1}{2} x^2 \sin^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

$I = \frac{1}{2} \, x^2 \sin^{-1} x - I_1$

$\therefore I_1 = \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

$= \frac{1}{2} \int \frac{\sin^2 \theta . \cos \theta \, d\theta}{cos\theta}$

$= \frac{1}{4} \int 2 \sin^2 \theta \, d\theta$

$= \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2\theta) d\theta$

$= \frac{1}{4} \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]$

ধরি, $x = sin\theta$

$\Rightarrow dx = \cos \theta \, d\theta$

Problems

$$= \frac{1}{4}\theta - \frac{1}{8}.2sin\theta.cos\theta$$

$$= \frac{1}{4}\theta - \frac{1}{4}sin\theta\sqrt{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{4}\theta - \frac{1}{4}sin\theta\sqrt{1 - \sin^2\theta}$$

$$= \frac{1}{4}\sin^{-1}x - \frac{1}{4}x\sqrt{1 - x^2}$$

$$\therefore I = \frac{1}{2}x^2\sin^{-1}x - \frac{1}{4}\sin^{-1}x + \frac{1}{4}x\sqrt{1 - x^2} + c$$

Problems

100. $\int \frac{e^x}{x}(1 + x\ln x)dx$

$= \int e^x \left(\frac{1}{x} + \ln x\right) dx$

$= \int e^x \left(lnx + \frac{1}{x}\right) dx$

$= e^x \ln x + c$ $\quad [\because \int e^x \{f(x) + f^1(x)\}dx = e^x f(x) + c]$

$\int e^x(\sin x + \cos x)dx = e^x \sin x + c$

Problems

101. $\int e^x \sec x\,(1 + \tan x)dx$

$= \int e^x (\sec x + \sec x.\tan x)dx$

$= e^x \sec x + c$ $\quad [\because \int e^x \{f(x) + f^1(x)\}dx = e^x f(x) + c]$

Problems

102. $\int e^x \left\{\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}\right\} dx$

$= e^x.\frac{1}{1-x} + c$ $\quad [\because \int e^x \{f(x) + f^1(x)\}dx = e^x f(x) + c]$

$= \frac{e^x}{1-x} + c$

103. $\int \frac{x\,e^x}{(x+1)^2}\, dx$

$= \int \frac{(x+1-1)e^x}{(x+1)^2}\, dx$

$= \int \left\{\frac{(x+1)}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}\right\} e^x.dx$

$= e^x \left\{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right\} dx$

$= e^x.\frac{1}{1-x} + c$ $\quad [\because \int e^x \{f(x) + f^1(x)\}dx = e^x f(x) + c]$

Problems

104. $\int e^{5x}\left(5\ln x + \frac{1}{x}\right)dx$

$= e^{5x}\ln x + c$ $\quad [\because \int e^{ax}\{af(x) + f^{1}(x)\}dx = e^{ax}f(x) + c$

Problems

105. $\int x \tan^{-1} x \, dx$

$$= \tan^{-1} x \int x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} \tan^{-1} x \int x dx \right\} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \int \frac{1}{1+x^2} \times \frac{x^2}{2} \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \left(\frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} (x - \tan^{-1} x) + c$$

Problems

নির্দিষ্ট যোগজ

❑ $\int_a^b f(x)\,dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$

106. $\int_2^4 x^2\,dx$

$$\int_2^4 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4 = \left(\frac{4^3}{3} - \frac{2^3}{3}\right) = \frac{56}{3}$$

107. $\int_0^3 (3 - 2x + x^2)dx$

$$\int_0^3 (3 - 2x + x^2)dx = \left[3x - x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \left(3 \times 3 - 3^2 + \frac{3^3}{3}\right) - 0 = 9$$

Problems

108. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}$

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}$$

$$= \int_1^2 \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}{(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})} dx$$

$$= \int_1^2 \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x-1})^2} dx$$

$$= \int_1^2 \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}{x - x + 1} dx$$

$$= \left[\frac{2}{3} . x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2$$

$$= \left\{\frac{2}{3} . 2^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} (2-1)^{\frac{3}{2}}\right\} - \left(\frac{2}{3} . 1^{\frac{3}{2}} + 0\right)$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

(Ans)

Problems

109. $\displaystyle\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec x + 1}{\sec x}\, dx$

$$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec x + 1}{\sec x}\, dx$$

$$= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{\sec x}\right) dx$$

$$= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)\, dx$$

$$= [x + \sin x]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{-\pi}{2} + \sin\frac{-\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} + 1 + \frac{\pi}{2} + 1$$

$$= \pi + 2$$

(Ans)

Problems

110. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 + \sin 2\theta)\, d\theta$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 + \sin 2\theta)\, d\theta$$

$$= \left[\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \left(\pi - \frac{1}{2}\cos 2\pi\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \left(\pi - \frac{1}{2}.1\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(-1)\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

(Ans)

Problems

111. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin\theta}\, d\theta$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{1+\sin\theta}\, d\theta$$

$$= \left(-2\cos\frac{\pi}{4} + 2\sin\frac{\pi}{4}\right) - (-2\cos 0 + 0)$$

$$= \left(-\sqrt{3} + \sqrt{3}\right) + 2$$

$$= 2$$

(Ans)

Problems

112. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{4} - 0\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

(Ans)

Problems

113. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\, dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^3 x\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos x + \cos 3x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[3\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\left(3\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\sin 3.\frac{\pi}{2}\right) - 0\right\} = \frac{1}{4}\left(3 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

(Ans)

Problems

114. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \cos 3x \, dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \cos 3x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos 2x \cos 3x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{2\cos(2x+3x) + \cos(3x-2x)\} \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 5x + \cos x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}\sin 5x + \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{5}\sin 5.\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right) - 0\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} + 1\right) = \frac{3}{5}$$

(Ans)

Problems

115. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\, 2\sin^2 x \sin 3x\, dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\, 2\sin^2 x \sin 3x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x)\sin 3x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 3x - \sin 3x \cos 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[(-\cos 3x).\frac{1}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(\sin 5x + \sin x)\, dx$$

$$= \frac{1}{6}\left(-\cos 3.\frac{\pi}{2} + \cos 0\right) - \frac{1}{4}\left[\left(-\frac{1}{5}\cos 5x - \cos x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Problems

116. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\; 2\sin^2 x \sin 3x\, dx$

$$= \frac{1}{6}(0+1) - \frac{1}{4}\left\{\left(-\frac{1}{5}\cos 5.\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3}\right) - \left(-\cos\frac{1}{5} - \cos 0\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{4}\left\{(0-0) + \frac{1}{5} + 1\right\} = \frac{1}{6} - \frac{3}{10} = -\frac{2}{15}$$ **(Ans)**

117. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^2\frac{x}{2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\tan\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0$$

$$= 1 - 0 = 1$$ **(Ans)**

118. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \sec^2 x \, dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \sec^2 x \, dx$$

$$= \int_0^1 z^2 dz$$

$$= \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{1^3}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

(Ans)

ধরি,

$$\tan x = z$$

$$\Rightarrow \sec^2 x \, dx = dz$$

$x = 0$ হলে, $z = \tan 0 = 0$

$x = \frac{\pi}{4}$ হলে, $z = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

Problems

119. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^5 x}{\sin^7 x} dx$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^5 x}{\sin^7 x} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^5 x}{\sin^5 x} \frac{1}{\sin^2 x} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^5 x \operatorname{cosec}^2 x \, dx$$

$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{0} z^5 - dz$$

$$= \int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} z^5 dz = \left[\frac{z^6}{6}\right]_0^{1/\sqrt{3}} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6}{6} - 0 = \frac{1}{162}$$ **(Ans)**

ধরি,

$$\cot x = z$$

$$\Rightarrow -\operatorname{cosec}^2 x \, dx = dz$$

$x = \frac{\pi}{3}$ হলে, $z = \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$x = \frac{\pi}{2}$ হলে, $z = \cot\frac{\pi}{2} = 0$

Problems

120. $\int_{-2}^{5} \frac{7x}{-2\sqrt{x^2+3}} dx$

$$\int_{-2}^{5} \frac{7x}{-2\sqrt{x^2+3}} dx$$

$$= \int_{-2}^{5} \frac{\frac{7.1}{2} dz}{\sqrt{z}}$$

$$= \frac{7}{2}.2 \left[\sqrt{z}\right]_{7}^{28}$$

$$= 7\left(\sqrt{28} - \sqrt{7}\right)$$

$$= 7\left(2\sqrt{7} - \sqrt{7}\right)$$

$$= 7\sqrt{7}$$

(Ans)

ধরি,

$$x^3 + 3 = z$$

$$\Rightarrow 2x\, dx = dz$$

$$\Rightarrow x\, dx = \frac{1}{2} dz$$

$x = 5$ হলে, $z = x^3 + 3 = 5^3 + 3 = 28$

$x = -2$ হলে, $z = x^3 + 3 = (-2)^3 + 3 = -5$

Problems

121. $\int_1^0 \frac{dx}{1+x^2}$

$$\int_1^0 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= [\tan^{-1} x]_1^0 \quad = \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$ **(Ans)**

122. $\int_1^0 \frac{1+x}{1+x^2} dx$

$$\int_1^0 \frac{1+x}{1+x^2} dx$$

$$= \int_1^0 \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}\right) dx$$

$$= \left[\tan^{-1} x + \frac{1}{2} ln|1+x^2|\right]_1^0$$

$$= \tan^{-1} 1 + \frac{1}{2} ln|1+1^2| - \tan^{-1} 0 - \frac{1}{2} ln|1+0|$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} ln2$$ **(Ans)**

Problems

123. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}.2\sin^2 x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 2.\frac{\pi}{2} - 0 + \frac{1}{2}sin2.0\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{4}$$ **(Ans)**

Problems

124. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta \, d\theta$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} . 2\sin^2 2\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\theta) \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \sin 4 . \frac{\pi}{2} - 0\right)$$

$$= \frac{1}{2} . \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$ **(Ans)**

Problems

125. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\, dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2 x)^2\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x)^2\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx$$

Problems

126. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\, dx$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \frac{1}{4}.2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx + \frac{1}{4}.2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{4}[x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}[\sin 2x\,]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 4x)dx$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}.0 + \frac{1}{8}\left[x + \frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{16} = \frac{3\pi}{16}$$

(Ans)

Problems

127. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos^2\theta + b\sin^2\theta)\, d\theta$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos^2\theta + b\sin^2\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\ \cos^2\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\ \ d\theta$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2\theta)\, d\theta + \frac{b}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin^2\theta) d\theta$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)\, d\theta + \frac{b}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2\theta) d\theta$$

$$= \frac{a}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{b}{2}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{a}{2}.\frac{\pi}{2} + \frac{b}{2}.\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)$$

(Ans)

Problems

128. $\displaystyle \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\sin x}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\sin x}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x - \tan x \sec x)\,dx$$

$$= [\tan x - \sec x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\tan\frac{\pi}{4} - \sec\frac{\pi}{4}\right) - (\tan 0 - \sec 0)$$

$$= 1 - \sqrt{2} + 1$$

$$= 2 - \sqrt{2}$$

(Ans)

Problems

129. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1-\sin x}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1-\sin x}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 x + \tan x \sec x)\, dx$$

$$= [\tan x + \sec x]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left(\tan\frac{\pi}{3} + \sec\frac{\pi}{3}\right) - (\tan 0 + \sec 0)$$

$$= \left(\sqrt{3} + 2\right) - (0 + 1)$$

$$= \sqrt{3} + 1$$

(Ans)

Problems

130. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\tan^3 x \sec^2 x \, dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\tan^3 x \sec^2 x \, dx$$

$$= \int_0^1 4z^3 dz$$

$$= 4\left[\frac{z^4}{4}\right]_0^1$$

$$= 4.\frac{1^4}{4} - 0 = 1$$

(Ans)

ধরি,

$$\tan x = z$$

$$\Rightarrow \sec^2 x \, dx = dz$$

$x = 0$ হলে, $z = \tan 0 = 0$

$x = \frac{\pi}{4}$ হলে, $z = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

Problems

131. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^3 x + \tan x)\, dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^3 x + \tan x)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x (1 + \tan^2 x)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x\, dx$$

$$= \int_0^{1} z dz$$

$$= \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

(Ans)

ধরি,

$\tan x = z$

$\Rightarrow \sec^2 x\, dx = dz$

$x = 0$ হলে, $z = \tan 0 = 0$

$x = \frac{\pi}{4}$ হলে, $z = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

নির্দিষ্ট যোগজ

- $\int_a^b f(x)\, dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$

- $\int_b^a f(x)\, dx = [f(x)]_b^a = f(a) - f(b) = -\{f(b) - f(a)\} = -\int_a^b f(x)dx$

অর্থাৎ, $\int_b^a f(x) = -\int_a^b f(x)dx$

Problems

132. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$$

$$= \int_0^1 z^2 dz$$

$$= \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{1^3}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

(Ans)

ধরি,

$\sin x = z$

$\Rightarrow \cos x dx = dz$

$x = 0$ হলে, $z = \sin x = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$ হলে, $z = \sin x = 1$

Problems

133. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x \, dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x \, dx$$

$$= \int_1^0 -z^5 dz$$

$$= \int_0^1 z^5 dz$$

$$= \left[\frac{z^6}{6}\right]_0^1$$

$$= \frac{1^6}{6} - 0 = \frac{1}{6}$$ **(Ans)**

ধরি,

$\cos x = z$

$\Rightarrow -\sin x \, dx = dz$

$x = 0$ হলে, $z = \cos x = 1$

$x = \frac{\pi}{2}$ হলে, $z = \cos x = 0$

Problems

134. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$$

$$= \int_0^{1} \frac{dz}{1+z^2} dz$$

$$= [\tan^{-1} z]_0^1$$

$$= \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0$$

$$= \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

(Ans)

ধরি,

$$\sin x = z$$

$$\Rightarrow \cos x dx = dz$$

$x = 0$ হলে, $z = \sin x = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$ হলে, $z = \sin x = 1$

Problems

135. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{9-\sin^2 x}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{9-\sin^2 x}$$

$$= \int_0^1 \frac{dz}{3^2 - z^2} dz$$

$$= \left[\frac{1}{2.3} ln \left|\frac{3+z}{3-z}\right|\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{6} ln \left|\frac{3+1}{3-1}\right| - \frac{1}{6} ln \left|\frac{3+0}{3-0}\right|$$

$$= \frac{1}{6} ln|2| - \frac{1}{6} ln|1|$$

$$= \frac{1}{6} ln \left|\frac{2}{1}\right| = \frac{1}{6} ln|2|$$

(Ans)

ধরি,

$\sin x = z$

$\Rightarrow cos\, xdx = dz$

$x = 0$ হলে, $z = \sin x = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$ হলে, $z = \sin x = 1$

Problems

136. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x \cos x}{\sqrt{\sin x}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin^2 x) \cos x}{\sqrt{\sin x}}$$

$$= \int_0^{1} \frac{(1 - z^2)dz}{\sqrt{z}} dz$$

$$= \int_0^{1} (z^{\frac{-1}{2}} - z^{\frac{3}{2}})$$

ধরি,

$\sin x = z$

$\Rightarrow \cos xdx = dz$

$x = 0$ হলে, $z = \sin x = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$ হলে, $z = \sin x = 1$

$$= \left[2\sqrt{z} - \frac{2}{5} z^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$$

$$= \left(2\sqrt{1} - \frac{2}{5} . 1^{\frac{5}{2}}\right) - 0$$

$$= 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$$

(Ans)

Problems

137. $\int_1^3 \frac{1}{x}\cos(lnx)dx$

$$\int_1^3 \frac{1}{x}\cos(lnx)dx$$

$$= \int_1^3 \cos z dz$$

$$= [\sin z]_1^3$$

$$= \sin(ln3) - \sin 0$$

$$= \sin(ln3)$$ **(Ans)**

ধরি,

$$lnx = z$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}dx = dz$$

$x = 1$ হলে, $z = lnx = 0$

$x = 3$ হলে, $z = lnx = ln3$

Problems

138. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$= \int_0^1 \frac{e^x dx}{(e^x)^2 + 1}$$

$$= [\tan^{-1} e^x]_0^1$$

$$= \tan^{-1} e^1 - \tan^{-1} e^0$$

$$= \tan^{-1} e - \tan^{-1} 1$$

$$= \tan^{-1} e - \frac{\pi}{4}$$ **(Ans)**

Problems

139. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^2 \sin x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^2 \sin x$$

$$= \int_2^1 -z^2 dz$$

$$= \int_1^2 z^2 dz$$

$$= \left[\frac{z^3}{3}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{3}(8 - 1)$$

$$= \frac{7}{3}$$ **(Ans)**

ধরি,

$$1 + \cos x = z$$

$$\Rightarrow -\sin x dx = dz$$

$x = 0$ হলে, $z = 1 + \cos x = 2$

$x = \frac{\pi}{2}$ হলে, $z = 1 + \cos x = 1$

Problems

140. $\int_{0}^{\pi} \sqrt[3]{1-\cos x}\ \sin x dx$

$$\int_{0}^{\pi} \sqrt[3]{1-\cos x}\ \sin x dx$$

$$= \int_{0}^{2} \sqrt[3]{z}\ dz$$

$$= \int_{0}^{2} 3z^{\frac{1}{2}}\ dz$$

$$= 3\left[\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2$$

$$= 3.\frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-0\right) = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$$ **(Ans)**

ধরি,

$1-\cos x = z$

$\Rightarrow \sin x dx = dz$

$x = 0$ হলে, $z = 1-\cos x = 0$

$x = \pi$ হলে, $z = 1-\cos x = 2$

Problems

141. $\int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$\int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} z dz$$

$$= \frac{1}{2} [z^2]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi^2}{8}$$ **(Ans)**

ধরি,

$$\sin^{-1} x = z$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dz$$

$x = 0$ হলে, $z = \sin^{-1} x = 0$

$x = 1$ হলে, $z = \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

Problems

142. $\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$

$$\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(2\sin\theta)^2\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}\,.2cos\theta d\theta$$

$$=8\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\sin^2\theta\, 2cos\theta.cos\theta d\theta$$

$$=16\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta$$

ধরি,

$x=2sin\theta \quad \therefore\ dx=2cos\theta d\theta$

$\therefore sin\theta=\frac{x}{2}$

$x=-1$ হলে, $\theta=\sin^{-1}-\frac{1}{2}=-\frac{\pi}{6}$

$x=1$ হলে, $\theta=\sin^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$

Problems

143. $\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$

এখন,

$$\sin^2\theta\cos^2\theta = \frac{1}{4}(2sinxcosx)^2$$

$$= \frac{1}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{4}.\frac{1}{2}(1-cos4\theta)$$

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{8}(1-cos4\theta)d\theta$$

$$= 2\left[\left(\theta - \frac{1}{4}sin4\theta\right)\right]_{\frac{-\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= 2\left[\left\{\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\} - \frac{1}{4}\left\{sin\left(4.\frac{\pi}{6}\right) - sin\left(4.\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right\}\right]$$

$$= 2\left[\frac{2\pi}{6} - \frac{1}{4}\left\{sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right\}\right]$$

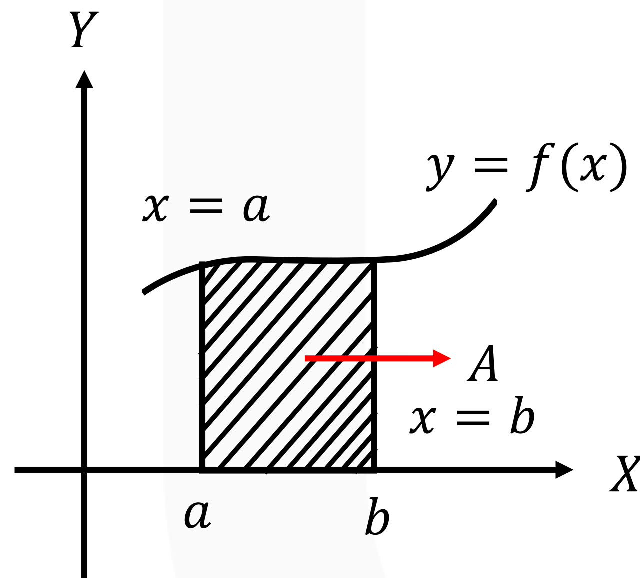
$$= 2\left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{4}\left(2.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(Ans)

ক্ষেত্রফল নির্ণয় সংক্রান্ত আলোচনা

- $A = \int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx$



$y = f(x)$ – এর লেখচিত্র, $x = a$, $x = b$ রেখা এবং অক্ষের ক্ষেত্রফল, $A = \int_a^b f(x)$

Problems

ক্ষেত্রফল নির্ণয় সংক্রান্ত আলোচনা

144. $y^2 = x^2$, x – অক্ষ এবং $x = 2$, $x = 5$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

$$\text{ক্ষেত্রফল} = \int_2^5 x^2 dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^5$$

$$= \frac{5^3}{3} - \frac{2^3}{3}$$

$= 39$ বর্গ একক **(Ans)**

Problems

145. $xy = c^2,\ x -$ অক্ষ এবং $x = a,\ x = b$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

$$xy = c^2$$

$$\Rightarrow y = \frac{c^2}{x}$$

ক্ষেত্রফল $= \int_a^b \frac{c^2}{x} dx$

$$= c^2 [lnx]_a^b$$

$$= c^2 (lnb) - c^2 (lna)$$

$= c^2 \ln\left(\frac{a}{b}\right)$ বর্গ একক **(Ans)**

Problems

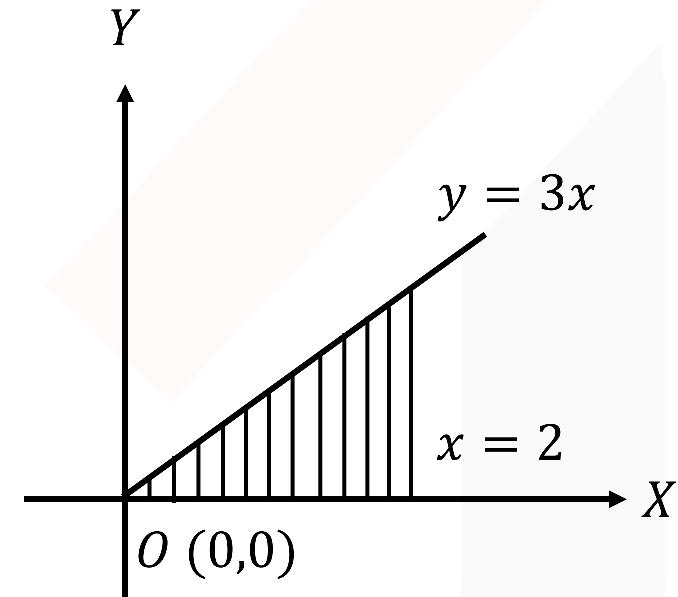
146. $y = 3x$ রেখা , x – অক্ষ এবং $x = 2$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

ক্ষেত্রফল $= \int_0^2 3x dx$

$= 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2$

$= 3\left(\frac{2^2}{2} - 0\right)$

$= 6$ বর্গ একক **(Ans)**



Problems

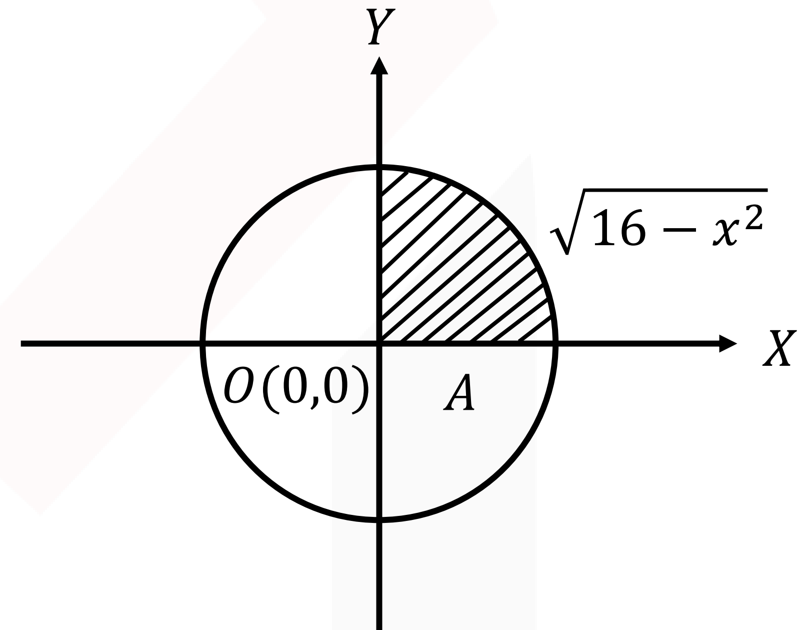
147. $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

$$x^2 + y^2 = 16$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4^2$$
$$\Rightarrow y^2 = 4^2 - x^2$$
$$\Rightarrow y^2 = \pm\sqrt{16 - x^2}$$

ধরি,

$$x = 4sin\theta \quad \therefore \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)$$
$$\therefore dx = 4cos\theta d\theta$$
$x = 0$ হলে, $\theta = 0$

$x = 4$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{2}$



বৃত্তটির ক্ষেত্রফল $= 4\int_0^4 \sqrt{16 - x^2}\, dx$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{16 - 16\sin^2\theta}\, 4cos\theta d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{16(1 - \sin^2\theta)}\, 4cos\theta d\theta$$

Problems

147. $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{16(1-\sin^2\theta)}\, 4cos\theta d\theta$$

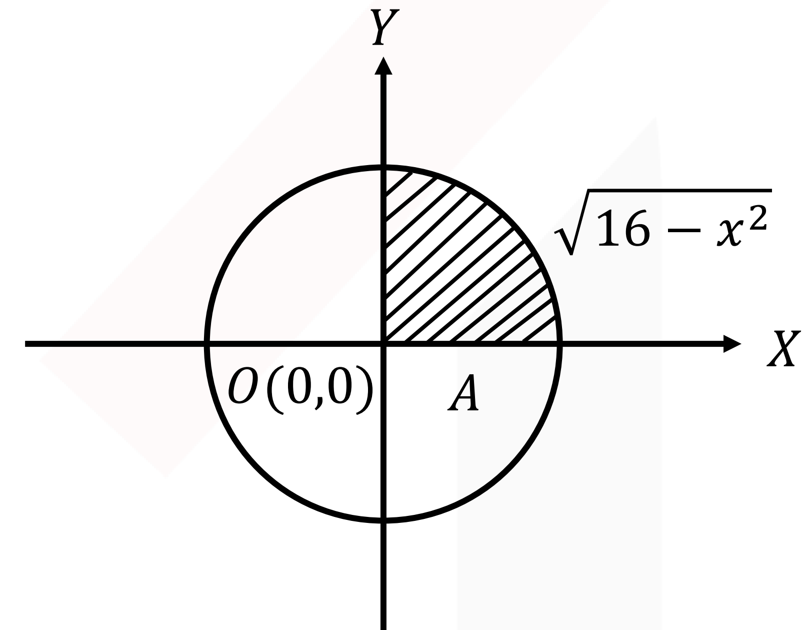
$$= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4cos\theta . cos\theta d\theta$$

$$= 32\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= 32\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + cos2\theta)\, d\theta$$

$$= 32\left[\theta + \frac{sin2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 32\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}sin\pi - 0\right) = 16\pi$$ বর্গ একক

(Ans)



Problems

148. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

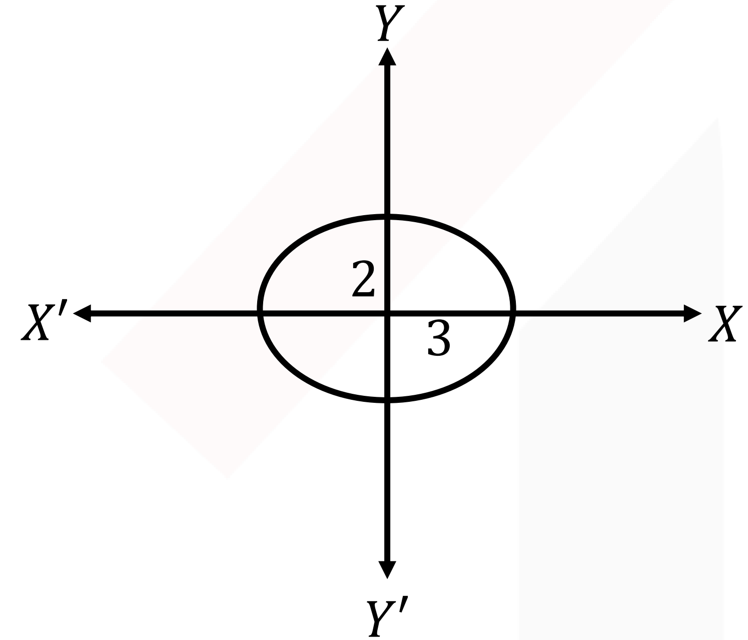
$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=4^2$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{4}=1-\frac{y^2}{9}$$

$$\Rightarrow y^2=4\left(1-\frac{y^2}{9}\right)$$

$$\therefore y=\pm\frac{2}{9}\sqrt{9-x^2}$$



Problems

148. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

ক্ষেত্রফল $= 4\int_0^3 \frac{2}{9}\sqrt{9-x^2}\,dx$

$= \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9-9\sin^2\theta}\;3cos\theta d\theta$

$= \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3cos\theta.3cos\theta d\theta$

$= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta\,d\theta$

$= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+cos2\theta)d\theta$

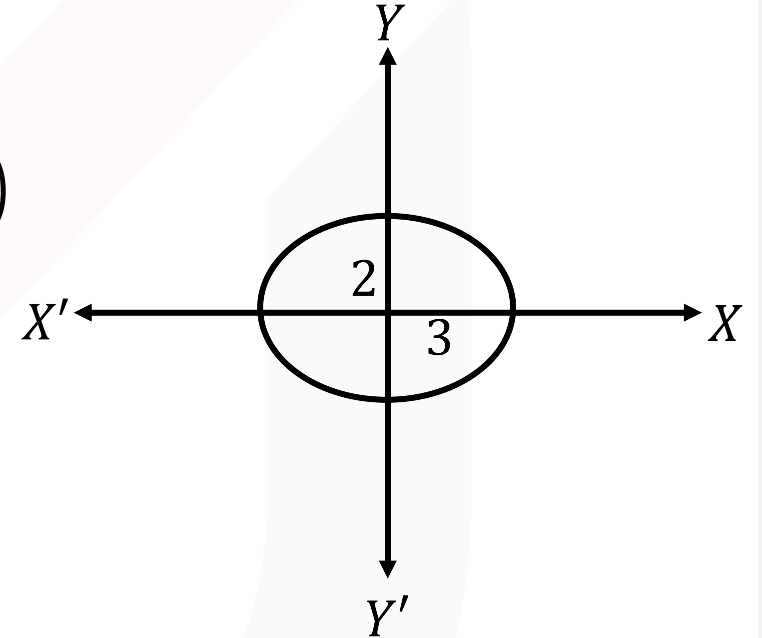
ধরি,

$x = 3sin\theta \quad \therefore \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$

$\therefore dx = 3cos\theta d\theta$

$x = 0$ হলে, $\theta = 0$

$x = 3$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{2}$



Problems

148. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

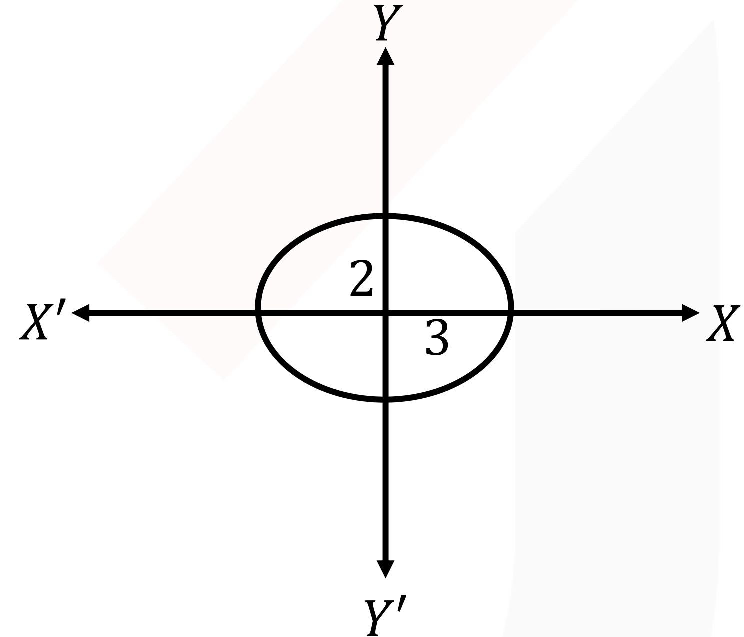
$$= 12\left[\theta+\frac{sin2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 12\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}sin\pi-0\right)$$

$$= 12\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}sin\pi-0\right)$$

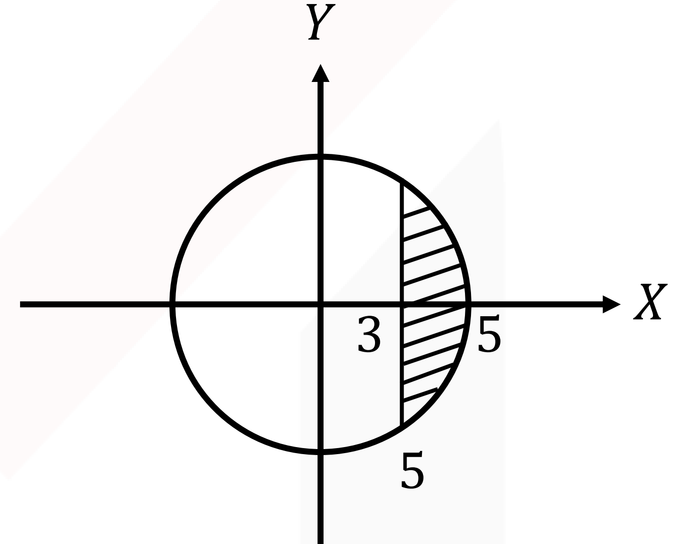
$= 6\pi$ বর্গ একক

(Ans)



Problems

149. $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্ত এবং $x = 3$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



$$x^2 + y^2 = 25$$

$$\Rightarrow y^2 = 25 - x^2$$

$$\Rightarrow y^2 = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

$y = \sqrt{25 - x^2}$ বক্ররেখা , x –অক্ষ এবং $x = 3$ ও $x = 5$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \int_3^5 ydx$

$$= \int_3^5 \sqrt{25 - x^2}\ dx$$

$$= \int_3^5 \sqrt{5^2 - x^2}\ dx$$

Problems

149. $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্ত এবং $x = 3$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

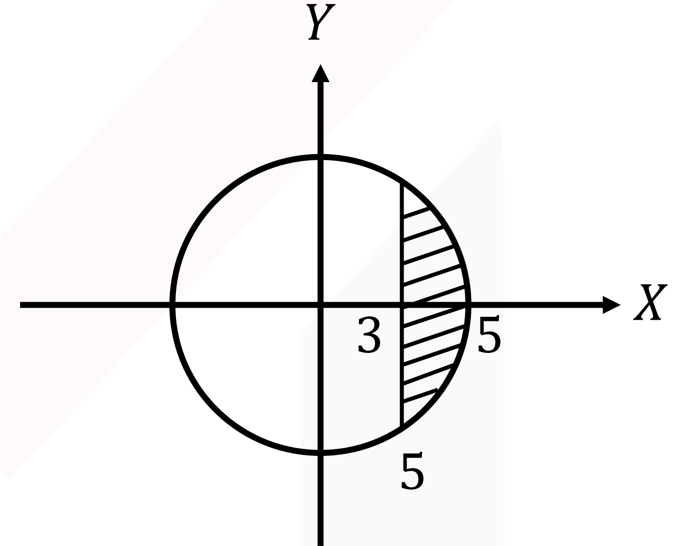
$$= \int_3^5 \sqrt{5^2 - x^2}\, dx$$

$$= \left[\frac{x\sqrt{5^2 - x^2}}{2} + \frac{5^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{5}\right]_3^5$$

$$= \left(0 + \sin^{-1}\frac{x}{5}\right) - \left(\frac{3\sqrt{25 - 9}}{2} + \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)$$

$$= \frac{25}{2}.\frac{\pi}{2} - \frac{3.4}{2} - \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}$$

$$= \frac{25\pi}{2} - 6 - \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}$$

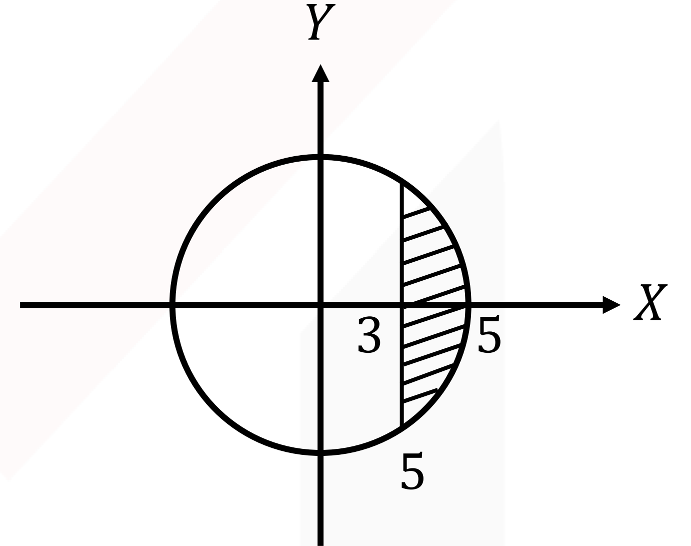


Problems

149. $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্ত এবং $x = 3$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 2\left(\frac{25\pi}{2} - 6 - \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)$

$= \left(\frac{25\pi}{2} - 12 - 25\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)$ বর্গ একক



Problems

150. $y^2 = 16x$ এবং এর উপকেন্দ্রিক লম্ব রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

$$y^2 = 16x$$

$$\Rightarrow y^2 = 4.4.x$$

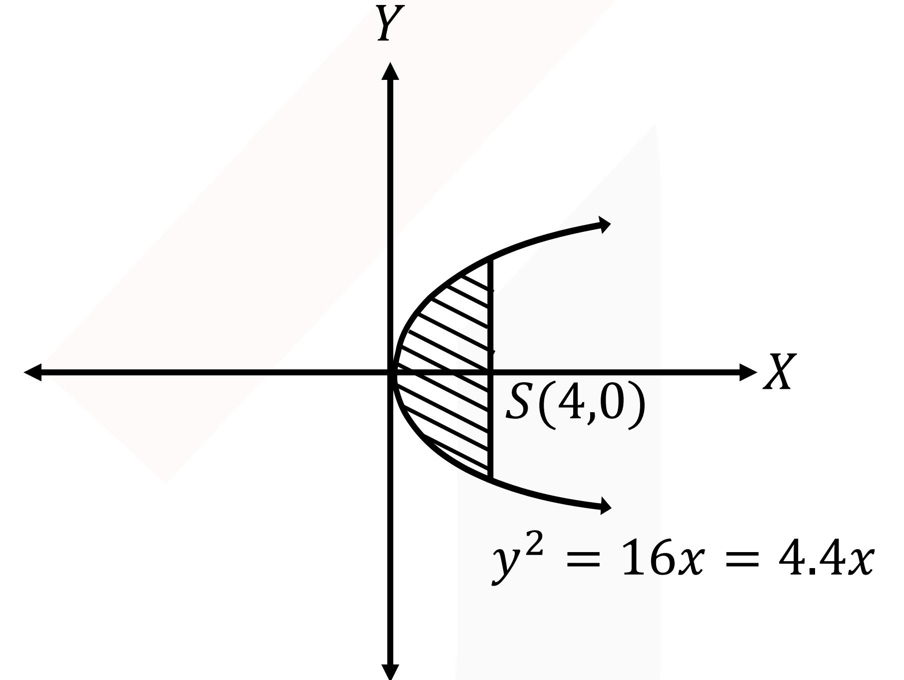
$$y = \pm 4\sqrt{x}$$

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 2\int_0^4 4\sqrt{x}\,dx$

$$= 8\left[\frac{x}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^4$$

$= 8\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{16}{3}\left(\frac{4^3}{2} - 0\right) = \frac{128}{3}$ বর্গ একক

(Ans)



Problems

151. $y^2 = 16x$ এবং $y = x$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

$$y^2 = 16x \dots\dots (i)$$

$$y = x \dots\dots (ii)$$

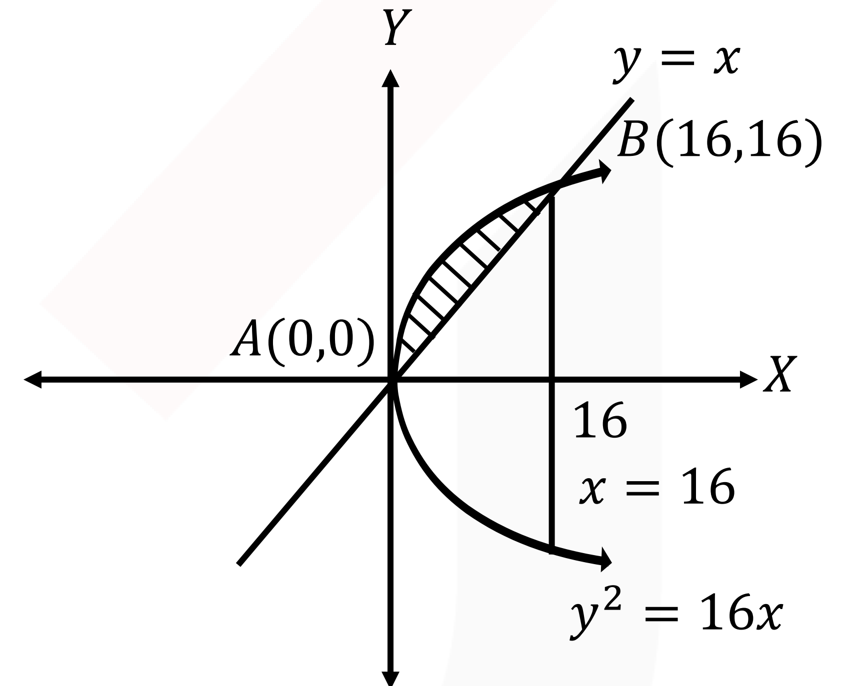
$$y^2 = 16x$$

$$\Rightarrow y^2 - 16y = 0$$

$$\Rightarrow y(y - 16) = 0$$

$$\Rightarrow y = 0, 16$$

$$\therefore x = 0, 16$$



Problems

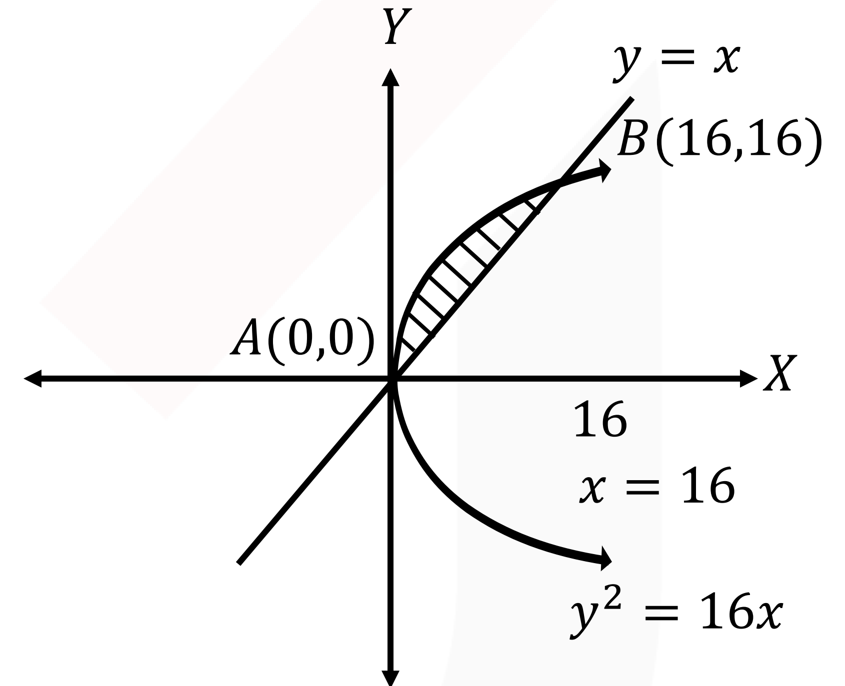
151. $y^2 = 16x$ এবং $y = x$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_0^{16} (4\sqrt{x} - x)dx$

$= \left[\frac{4.2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right]_0^{16}$

$= \frac{4.2}{3} (16)^{\frac{3}{2}} - \frac{(16)^2}{2} - 0$

$= \frac{128}{3}$ বর্গ একক **(Ans)**



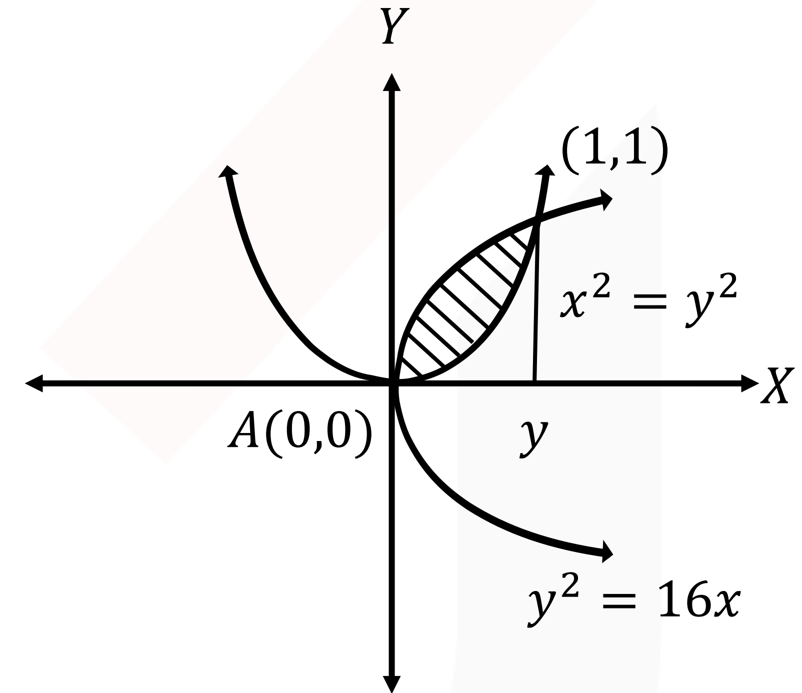
Problems

152. $y^2 = x$ এবং $x^2 = y$ পরাবৃত্তদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

$$y^2 = x \dots (i)$$
$$x^2 = y \dots (ii)$$

(i) নং হতে পাই,

$$y^2 = x$$
$$\Rightarrow (y^2)^2 = y$$
$$\Rightarrow y^4 - y = 0$$
$$\Rightarrow y(y^3 - y) = 0$$
$$\Rightarrow y = 0, 1$$
$$\therefore x = 0, 1$$



Problems

152. $y^2 = x$ এবং $x^2 = y$ পরাবৃত্তদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(i) নং এ $y = x^2$

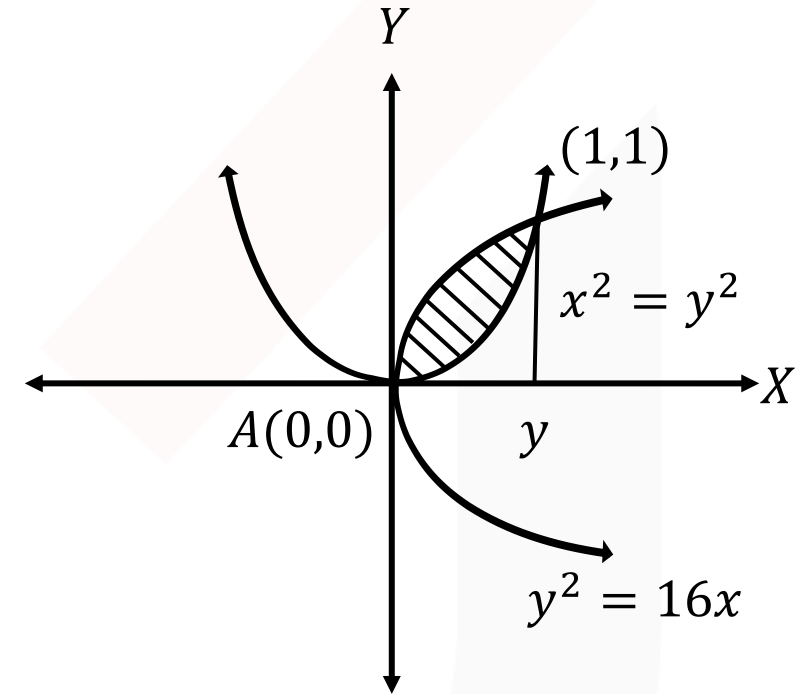
(ii) নং এ $y = \pm\sqrt{x}$

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx$

$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$

$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$ বর্গ একক

(Ans)



যোগজীকরণ

- ✓ অনির্দিষ্ট যোগজ (ক, খ , MCQ)
- ✓ নির্দিষ্ট যোগজ (ক, খ , MCQ)
- ✓ ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত (গ, MCQ)

Problems

153. $\int \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} dx$

$$\int \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} dx$$

$$= \int \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{(cosx + sinx)^2}} dx$$

$$= \int \frac{\cos x - \sin x}{cosx + sinx} dx$$

$$= ln|sinx + cosx| + c$$

(Ans)

Problems

154. $y = x^3 + 2$ হলে, $\int \left(\frac{dy}{dx}\right) dx = ?$

$$y = x^3 + 2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 0$$

$$\therefore \int \left(\frac{dy}{dx}\right) x = \int 3x^2 dx = \frac{3x^3}{3} + c = x^3 + c$$

(Ans)

DOWNLOAD THE APP

10 MINUTE SCHOOL

অনির্দিষ্ট যোগজ

- কোন ফাংশনে বর্গমূল থাকলে ফাংশনটিকে অন্তরীকরণ করে যদি লব পাওয়া যায় ,তবে ফাংশনটির অনির্দিষ্ট যোগজ হবে-

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{\tan x}}$$

$$= \int \frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{tanx}}$$

$$= 2\sqrt{tanx} + c$$ **(Ans)**

MCQ

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = f(x) + c$ হলে, $f(x) = ?$

a) $sinx$ b) $\sin^{-1} x$ c) $cosx$ d) $\sec^{-1} x$

2. $\int e^{2x} dx$ এর মান কত?

a) $\frac{1}{2} e^{2x} + c$ b) $e^x + c$ c) $e^{2x} + c$ d) $2e^{2x} + c$

3. $\frac{1}{\sin^2 x\sqrt{cosx}}$ এর একটি অনির্দিষ্ট যোগজ-

a) $\sqrt{cotx}\ln(sinx)$ b) $sinx\sqrt{tanx}$ c) $-2\sqrt{cotx}$ d) $\frac{2}{3}(\tan x)^{\frac{1}{2}}$

4. $\int \frac{3x^2}{1+x^6} = f(x) + c$ হলে, $f(x) = ?$

a) $\cos^{-1} x^3$ b) $\sin^{-1} x^3$ c) $\frac{1}{1+x^3}$ d) $\tan^{-1} x^3$

MCQ

5. $\int \cos^2\frac{x}{2}dx$ এর মান কত?

a) $\frac{1}{2}(x+sinx)+c$ b) $\frac{1}{2}(x+cosx)+c$ c) $\frac{1}{2}(x-cosx)+c$ d) $\frac{1}{2}(x-sinx)+c$

6. $\int e^x\left\{f(x)+\frac{d}{dx}(f(x))\right\}dx=?$

a) e^x+c b) $e^x f(x)+c$ c) $f(x)+c$ d) $\frac{2}{3}(\tan x)^{\frac{1}{2}}$

7. $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}dx=?$

a) $\tan(xe^x)+c$ b) $\sin(xe^x)+c$ c) $\cot(xe^x)+c$ d) $\cos(xe^x)+c$

8. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}=?$

a) $\tan^{-1}(e^x)+c$ b) $\sin^{-1}(e^x)+c$ c) $\cot(e^x)+c$ d) $\tan^{-1}(e^{-x})+c$

MCQ

9. $\int_0^6 f(t)dt = 8$ হলে $\int_0^3 f(2x)dx = ?$

a) 4 ✓ b) 6 c) 10 d) 0

ব্যাখ্যাঃ

$$\int_0^6 f(t)dt = 8$$

$$\Rightarrow [f(t)]_0^6 = 8$$

$$\Rightarrow f(6) - f(o) = 8$$

$$\int_0^3 f(2x) = dx$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{2} f(2x)\right]_0^3 = 8$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\{f(6) - f(o)\} = \frac{1}{2}.8 = 4\ (Ans:)$$

MCQ

10. $\int_{-1}^{1} |x| dx = ?$

$a) 1$ $b) 2$ $c) -1$ $d) 0$

11. $\int_{0}^{10} |x-5| dx = ?$

$a) 25$ $b) \frac{25}{2}$ $c) 50$ $d) 5$

ব্যাখ্যাঃ

$$\int_{0}^{5} -(x-5)dx + \int_{5}^{10} (x-5)dx$$

$$= -\left[\frac{x^2}{2} - 5x\right]_0^5 + \left[\frac{x^2}{2} - 5x\right]_5^{10} = -\left(\frac{5^2}{2} - 25\right) - 0 + \left(\frac{10^2}{2} - 50\right) - \left(\frac{5^2}{2} - 25\right) = 25$$

MCQ

12. $\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx = ?$

a) $ln3$ b) 2 c) $ln2$ d) 0

13. $\int e^x(cosx - sinx)dx = ?$

a) $e^x sinx + c$ b) $-e^x sinx + c$ c) $e^x cosx + c$ d) $-e^x cosx + c$

ব্যাখ্যাঃ

$$\int e^x(cosx - sinx)dx = e^x cosx + c$$

14. $\int_0^1 e^{-x}dx = ?$

a) $\frac{1}{e} - 1$ b) $\frac{1}{e}$ c) $-\frac{1}{e} + 1$ d) $-\frac{1}{e} - 1$

MCQ

15. $\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx = ?$

a) $ln3$ b) 2 c) $ln2$ d) 0

16. $\int \frac{dx}{1-cosx} = ?$

a) $-cot\frac{x}{2}$ b) $cot\frac{x}{2}$ c) $\frac{1}{4}\cot\frac{x}{2}$ d) $-\frac{1}{4}\cot\frac{x}{2}$

16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 x\, dx = ?$

a) $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$ b) 1 c) $\frac{\pi}{2}$ d) 2

ব্যাখ্যাঃ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-cos2x)dx = \left[x-\frac{1}{2}sin2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

MCQ

18. $\int_0^1 e^x\{fx) + g(x)\}dx = ?$

a) $2e$ b) $-e$ c) e d) $-2e$

19. $\int g(x)dx = ?$

a) $x + c$ b) $2x^2 + c$ c) $2x + c$ d) $x^2 + c$

20. i) $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e$

ii) $\int \sec^2\frac{1}{2}xdx = \frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}x + c$

iii) $\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

নিচের কোনটি সঠিক?

a) i, ii b) i, iii c) ii, iii d) i, ii, iii

MCQ

21. $f(x) = 4x$ হলে-

i) $\int_{o}^{e} f(x)dx = 8$

ii) $\int e^{f(x)}dx = \frac{1}{4}e^{4x} + c$

iii) $\int \frac{dx}{f(x)} = \frac{1}{4}lnx + 1$

নিচের কোনটি সঠিক?

a) i, ii b) i, iii c) ii, iii d) i, ii, iii

MCQ

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{36-x^2}} = ?$

a) $\sin^{-1}\frac{x}{6}+c$ b) $\tan^{-1}x+c$ c) $\sin^{-1}x+c$ d) $\frac{1}{6}\sin^{-1}\frac{x}{6}+c$

23. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল কোনটি ?

a) 2π b) 9π c) 12π d) 16π

24. $4x^2+25y^2=1$ উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল কোনটি ?

a) 4π b) 9π c) 100π d) 25π

25. $\int_0^1 \frac{3dx}{1+x^2} = ?$

a) $\frac{3\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $-\frac{3\pi}{4}$ d) $-\frac{\pi}{4}$

MCQ

26. $\int \frac{e^{\theta} d\theta}{1+e^{\theta}} = ?$

a) $\ln(1+e^{\theta})$ b) $1+e^{\theta}+c$ c) $ln e^{\theta}+c$ d) $\theta + c$

27. $\int xe^{x^2} dx = ?$

a) $2e^{x^2}+c$ b) $e^{x^2}+c$ c) $xe^{x^2}+c$ d) $\frac{1}{2}e^{x^2}+c$

ব্যাখ্যাঃ $\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}e^{x^2}+c$

28. $\int_0^1 \frac{\cos^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx = ?$

a) $\frac{\pi^2}{8}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $-\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{\pi}{8}$

MCQ

29. $\int_1^e lnx\, dx = ?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) e

ব্যাখ্যাঃ

$$\int_1^e lnx\, dx = [xlnx - x]_1^e = elne - e - (ln1 - 1) = 1$$

30. $\int \frac{lnx}{x} dx = ?$

a) $2(lnx)^2 + c$ b) $\frac{1}{2}(lnx)^2 + c$ c) $lnx + c$ d) $2lnx + c$

ব্যাখ্যাঃ

$$\int \frac{lnx}{x} dx = \int \frac{(lnx)^2}{2}$$

MCQ

31. $\int_0^1 \frac{\cos^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx = ?$

a) $\frac{\pi^2}{8}$ ✓ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $-\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{\pi}{8}$

32. $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1} dx = ?$

a) $\ln\frac{8}{3}$ b) $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$ ✓ c) $\frac{1}{2}ln24$ d) $ln24$

ব্যাখ্যাঃ $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{2x^2}{x^2-1} dx = \frac{1}{2}[ln|x^2-1|]_2^3 = \frac{1}{2}(ln8 - ln3) = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$

MCQ

33. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x} dx = ?$

a) $\frac{1}{2} sec2x + c$ b) $\frac{1}{2} cosec\ 2x + c$ c) $2sec2x + c$ d) $2cosec2x + c$

ব্যাখ্যাঃ $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x} dx = \int sec2xtan2xdx = \frac{1}{2} sec2x + c$

34. $\int sinx^0 dx = ?$

a) $-\frac{180}{\pi} cosx^0$ b) $cosx^0 + c$ c) $-cosx^0$ d) $-\frac{180}{\pi} \cos\frac{\pi x}{180}$

35. $f(x)$ ধ্রুবক না হলে , $\int \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} dx = ?$

a) $f'(x) + c$ b) $ln|f(x)| + c$ c) $f(x) + c$ d) $lnx + c$

CQ

Question: 1(খ)যোগজ নির্ণয় করঃ $\int \frac{dx}{f(x)(\sqrt{f(x)}+1)}$ **[All Board.18]**

$$\int \frac{dx}{f(x)(\sqrt{f(x)}+1)}$$

$$= \int \frac{dx}{x^2(x+1)}$$

$$= \int \frac{1}{x} \frac{x+1-x}{x(x+1)} dx$$

$$= \int \frac{1}{x} \left\{ \frac{(x+1)}{x(x+1)} - \frac{x}{x(x+1)} \right\} dx$$

দেওয়া আছে,

$$f(x) = x^2$$

$$\therefore \sqrt{f(x)} = x$$

CQ

Question: 1(খ)যোগজ নির্ণয় করঃ $\int \frac{dx}{f(x)(\sqrt{f(x)}+1)}$ **[All Board.18]**

$$= \int \left\{ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x(x+1)} \right\} dx$$

$$= \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - \int \frac{x+1-x}{x(x+1)} dx$$

$$= \frac{-1}{x} - \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \frac{-1}{x} - \ln|x| + \ln|x+1| + c$$

(Ans.)

CQ

(খ) $\int \frac{xdx}{f(x)\{g(x)+4\}}$ এর মান নির্ণয় কর। [D.B : 18]

$$\int \frac{xdx}{f(x)\{g(x)+4\}}$$

$$= \int \frac{xdx}{(x+6)(x^2+4)}$$

এখানে ,

$$\frac{x}{(x+6)(x^2+4)} \equiv \frac{A}{x+6} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$\Longrightarrow x \equiv A\,(x^2+4) + (Bx+C)(x+6)$$

দেওয়া আছে,

$$f(x) = x + 6$$

এবং $g(x) = x^2$

CQ

(খ) $\int \frac{xdx}{f(x)\{g(x)+4\}}$ এর মান নির্ণয় কর। [D.B : 18]

$x = -6$ বসিয়ে,

$$-6 \equiv A \cdot 40 + 0$$

$$\Rightarrow A = -\frac{6}{40} = -\frac{3}{20}$$

আবার,

উভয়পক্ষে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে,

$$0 = A + B$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{3}{20} + B$$

$$\Rightarrow B = \frac{3}{20}$$

CQ

(খ) $\int \frac{xdx}{f(x)\{g(x)+4\}}$ এর মান নির্ণয় কর। [D.B : 18]

উভয়পক্ষে x এর সহগ সমীকৃত করে,

$$1 = 6B + C$$

$$\Rightarrow 1 = 6 \times \frac{3}{20} + C$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{9}{10} = C$$

$$\Rightarrow \frac{10-9}{10} = C$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{10}$$

CQ

(খ) $\int \frac{xdx}{f(x)\{g(x)+4\}}$ এর মান নির্ণয় কর। [D.B : 18]

$$\therefore \frac{x}{(x+6)(x^2+4)} \equiv \frac{\frac{-3}{20}}{x+6} + \frac{\frac{3}{20}x+\frac{1}{10}}{x^2+4}$$

$$\equiv -\frac{3}{20}\cdot\frac{1}{x+6} + \frac{3}{20}\cdot\frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{x^2+4}$$

$$\therefore \int \frac{x}{(x+6)(x^2+4)}dx = -\frac{3}{20}\int\frac{1}{x+6}\,dx + \frac{3}{20}\int\frac{2x}{x^2+4}\,dx + \frac{1}{10}\int\frac{1}{x^2+4}dx$$

$$= -\frac{3}{20}\ln|x+6| + \frac{3}{40}\cdot\ln|x^2+4| + \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2\cdot 2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$$

(Ans.)

CQ

Question: 3(ক) $\int \frac{1}{1+e^x} dx$ নির্ণয় কর। **[B.B : 17]**

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx$$

$$= \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} dx$$

$$= \int \frac{-dz}{z}$$

$$= -\int \frac{1}{z} dz$$

$$= -\ln|z| + C$$

$$= -\ln|e^{-x}+1| + C$$

(Ans.)

ধরি,

$$e^{-x} + 1 = z$$

$$\Rightarrow -e^{-x} dx = z$$

$$\Rightarrow e^{-x} = dz$$

CQ

**Question: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin\theta}\, d\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+g(\theta))\ d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin\theta)\ d\theta$$

$$= [\theta\ - \cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} - (0 - \cos 0)$$

$$= \frac{\pi}{2} + 1$$

(Ans.)

দেওয়া আছে,

$: \ g\theta = \sin\theta$

CQ

Question: 3(খ) $i)$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+g\theta}\, d\theta$ এর মান নির্ণয় কর। [B.B : 17]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+g\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2})^2\, d\theta$$

$$= \left[-2\cos\frac{\theta}{2} + 2 sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

(Ans.)

দেওয়া আছে,

$$g\theta = \sin\theta$$

CQ

Question: 4(গ) $\int_0^1 H(x)\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। [J.B : 17]

দেওয়া আছে,

$$H(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$$

$$\int_0^1 H(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^x(x+1-1)}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 e^x\left\{\frac{(x+1)}{(x+1)^2{}_{(x+1)}} - \frac{1}{(x+1)^2}\right\}dx$$

CQ

Question: 4(গ) $\int_0^1 H(x)\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[J.B : 17]**

$$=\int_0^1 e^x \left\{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right\} dx$$

$$=\left[e^x \cdot \frac{1}{x+1}\right]_0^1$$

$$=$$

$$\left[\int e^x \{f(x) + f'(x)\}\, dx = e^x \cdot f(x) + C\right]$$

(Ans.)

CQ

Question: 5(খ) i) $\int_0^2 f(x)\, tan^{-1}(x-2)\ dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[S.B : 17]**

$$\int_0^2 f(x)\, tan^{-1}(x-2)\ dx$$

$$= \int_0^2 (x-2)\ \tan^{-1}(x-2)\ dx$$

$$= \int_{-2}^{0} z \tan^{-1} z\, dz$$

$$= \int z \tan^{-1} z\, dz$$

$$= \tan^{-1} z \int z\, dz - \int \{\tan^{-1} z \int z\, dz\} dz$$

দেওয়া আছে,

$$f(x) = (x-2)$$

ধরি ,

$$x - 2 = z$$

$$\Rightarrow dx = dz$$

x	0	2
y	-2	0

CQ

Question: 5(খ) i) $\int_0^2 f(x)\, tan^{-1}(x-2)\ dx$ এর মান নির্ণয় কর। **[S.B : 17]**

$$=\tan^{-1} z \,.\frac{z^2}{2} - \int \frac{1}{1+z^2}.\frac{z^2}{2}\ dz$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{z^2+1-1}{1+z^2}\ dz$$

$$-\frac{1}{2}\int \{\frac{z^2+1}{z^2\ +1} - \frac{1}{z^2+1}\}\ dz$$

(Ans.)

CQ

Question: 10(ক) $\int \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\, dx$ নির্ণয় কর।

$$\int \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \{\frac{\cos x+\sin x+(\cos x-\sin x)}{\cos x+\sin x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \{\frac{(\cos x+\sin x)}{(\cos x+\sin x)} + \ dx \frac{(\cos x-\sin x)}{(\cos x+\sin x)}\}\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\{\, x+\ln\ |\cos x+\sin x|\ \}+c$$

(Ans.)





সাজেশন





অধ্যায়ঃ০৪(২য় পত্র) বহুপদী ও এর সমীকরণ (Polynomial & It's Equation)

1. যদি $ax^2 + bx + c = 0$ এর একটি মূল $cx^2 + bx + a = 0$ এর একটি মুলের দ্বিগুণ হয়, তাহলে দেখাও যে, $2a = c$ অথবা $(2a + c)^2 = 2b^2$.

2. (i) যদি $x^2 - px + q = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি ক্রমিক পূর্ণ সংখ্যা হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $p^2 - 4q - 1 = 0$.

(ii) $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূল দুইটির পার্থক্য 1 হলে প্রমাণ কর যে, $p^2 + 4q^2 = (1 + 2q)^2$.

(iii) $\frac{1}{x} + \frac{1}{p-x} = \frac{1}{q}$ সমীকরণের মূল দুইটির অন্তর r হলে, p কে q এবং r এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

অধ্যায়ঃ০৪(২য় পত্র) বহুপদী ও এর সমীকরণ (Polynomial & It's Equation)

3. $27x^2 + 6x - (p+2) = 0$ সমীকরণটির একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হলে p এর মান নির্ণয় কর।

4. (i) যদি $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূল দুইটির অনুপাত 3:4 হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $12b^2 = 49ac$.

(ii) যদি $px^2 + qx + q = 0$ সমীকরণের মূল দুইটির অনুপাত $m : n$ হয় তবে দেখাও যে, $\sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{q}{p}} = 0$

(iii) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূল দুইটির অনুপাত r হলে, দেখাও যে, $\sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{q}{p}} = 0$

অধ্যায়ঃ০৪(২য় পত্র) বহুপদী ও এর সমীকরণ (Polynomial & It's Equation)

7. (i) k এর মান কত হলে $(k^2-3)x^2+3kx+(3k+1)\ =0$ সমীকরণের মূল দুইটি পরস্পর গৌণিক বিপরীতক হবে?

8. (i) যদি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূল দুইটি α,β হয় তাহলে, $ac(x^2+1)-(b^2-2ac)x=0$ এর মূল দুইটি α,β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

(ii) যদি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূল দুইটি α,β হয় তাহলে $cx^2-2bx+4a=0$ সমীকরণের মূল দুইটি α,β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

অধ্যায়ঃ০৪(২য় পত্র) বহুপদী ও এর সমীকরণ (Polynomial & It's Equation)

12. (i) k এর মান কি হলে$(k-1)x^2-(k+2)x+4=0$ সমীকরণের মূলগুলি বাস্তব এবং সমান হবে?

(ii) k এর মান কি হলে $(4-k)x^2+(2k+4)x+(8k+1)=0$ সমীকরণটির মূল দুইটি সমান হবে?

14.(v) a, b বাস্তব হলে দেখাও যে, $2bx^2+2(a+b)x+3a=2b$ সমীকরণের মূলগুলি বাস্তব হবে; যদি সমীকরণটির একটি মূল অপরটির দ্বিগুণ হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $a=2b$ অথবা $4a=11b$.

16. (i) k এর মান কত হলে $(k+1)x^2+2(k+3)x+2k+3$ রাশিটি একটি পূর্ণবর্গ হবে?

(ii) দেখাও যে, $(h^2-a^2)x^2-2hkx+k^2-b^2$ রাশিটি একটি পূর্ণ বর্গ হবে যদি $\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}=1$ হয়।

অধ্যায়ঃ০৪(২য় পত্র) বহুপদী ও এর সমীকরণ (Polynomial & It's Equation)

18. (i) $4x^2 - 6x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\alpha + \frac{1}{\beta}$ এবং $\beta + \frac{1}{\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।

(ii) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে এবং $\alpha + \frac{1}{\beta}$ এবং $\beta + \frac{1}{\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় কর।

19. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে নিচের মূলগুলি দ্বারা গঠিত সমীকরণসমূহ নির্ণয় কর :

(iii) $\frac{1}{\alpha^3}, \frac{1}{\beta^3}$

23. (i) যদি $x^2 - bx + c = 0$ এবং $x^2 - cx + b = 0$ সমীকরণের মূলগুলির মধ্যে কেবল একটি ধ্রুবকের পার্থক্য থাকে, তবে প্রমাণ কর যে, $b + c + 4 = 0$.

অধ্যায়ঃ০৪(২য় পত্র) বহুপদী ও এর সমীকরণ (Polynomial & It's Equation)

24.(i) $px^2+qx+1=0$ এবং $qx^2+px+1=0$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ মূল থাকলে দেখাও যে p+q+1=0.

(ii) যদি $ax^2+bx+c=0$ এবং $cx^2+bx+a=0$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ মূল থাকে, তাহলে দেখাও যে, $c+a=\pm b$.

(v) যদি $x^2+kx-6k=0$ এবং $x^2-2x-k=0$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ মূল থাকে তাহলে k এর মানগুলি নির্ণয় কর।

(vii) $x^2+px+q=0$ এবং $x^2+qx+p=0$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ মূল থাকলে দেখাও যে, তাদের অপর দুইটি মূল $x^2+x+pq=0$ সমীকরণের মূল হবে।

অধ্যায়ঃ ০৬ (২য় পত্র) কনিক (Conics)

উদাহরণ-6 $(-1,1)$ উপকেন্দ্র এবং $x+y+1=0$ নিয়ামক বিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। পরাবৃত্তটির অক্ষের সমীকরণ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং সমীকরণ নির্ণয় কর।

উদাহরণ-7 $y=16x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত কোনো বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 6 ; ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

অধ্যায়ঃ 6.1 পরাবৃত্ত (Parabola)

2. (vi) $y^2 - 4y - 4x + 16 = 0$

(vii) $y^2 = 4y + 4x - 8$

(ix) $3y^2 - 10x - 12y - 18 = 0$

অধ্যায়ঃ 6.1 পরাবৃত্ত (Parabola)

3. $(vi)\ 5x^2 + 15x - 10y - 4 = 0$

$(vii)\ 5x^2 + 30x + 2y + 59 = 0$

4. (i) $y = 4px$ পরাবৃত্তটি $(3, -2)$ বিন্দু দিয়ে গমন করলে এর উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

5. (i) $y^2 = 12x$ পরাবৃত্তের কোন বিন্দুতে কোটি ভুজের দ্বিগুণ হবে?

6. $(i)\ y^2 = 9x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত P বিন্দুর কোটি 12 হলে, ঐ বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব নির্ণয় কর।

$(ii)\ y = 8x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত কোনো বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 8; ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

7. $(i)\ (1,1)$ উপকেন্দ্র ও $3x + 4y = 1$ নিয়ামক বিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকাণ নির্ণয় কর। তার অক্ষেরও সমীকরণ বের কর।

$(ii)\ (-8, -2)$ উপকেন্দ্র এবং $2x - y - 9 = 0$ নিয়ামক বিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

অধ্যায়ঃ 6.1 পরাবৃত্ত (Parabola)

8. (i) যে পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র (3,4) এবং শীর্ষ বিন্দু (0,0); তার নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(iii) $(-1,1)$ উপকেন্দ্র এবং $(2,-3)$ শীর্ষ বিশিষ্ট পরাবৃত্তের অক্ষ ও নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

9. (i) একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র $(-1,3)$ এবং শীর্ষবিন্দু $(4,3)$ বিন্দুতে অবস্থিত।

(iii) একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র $(-6,-6)$ এবং শীর্ষবিন্দু $(-2,2)$.

10. (i) এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যার শীর্ষ $(2,3)$ বিন্দু এবং নিয়ামক $y = 6$; এর উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্যও নির্ণয় কর।

11. (i) এরূপ একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র $(2,5)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং $x = 4$ রেখাটি এর শীর্ষ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

অধ্যায়ঃ 6.1 পরাবৃত্ত (Parabola)

12. (i) একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার শীর্ষবিন্দু $(4,-3)$ বিন্দুতে অবস্থিত। উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 4 এবং অক্ষটি x –অক্ষের সমান্তরাল।

(iv) $y=ax^2+bx+c$ পরাবৃত্তটির শীর্ষ $(-2,3)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং এটি $(0,5)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে a, b, c এর মান নির্ণয় কর।

15. (i) দেখাও যে, $lx + my + n = 0$ সরলরেখাটি $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের স্পর্শক হবে যদি $ln = am^2$ হয়।

অধ্যায়ঃ উপবৃত্ত (Ellipse)

উদাহরণ-2 $25x^2 + 16y^2 = 400$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের ও নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উদাহরণ-3 p এর মান কত হলে $4x^2 + py^2 = 80$ উপবৃত্তটি $(0, \pm 4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে? উপবৃত্তটির অক্ষ দুইটির দৈর্ঘ্য এবং উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর।

উদাহরণ-4 $5x^2 + 4y^2 = 1$ উপবৃত্তের নিয়ামক দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

উদাহরণ-8 উপবৃত্তের বৃহৎ ও ক্ষুদ্র অক্ষ দুইটিকে যথাক্রমে x ও y অক্ষ ধরে উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যকার দূরত্ব 8 এবং নিয়ামক দুইটির মধ্যকার দূরত্ব 18.

অধ্যায়ঃ উপবৃত্ত (Ellipse)

1. নিম্নলিখিত উপবৃত্ত সমূহের উৎকেন্দ্রতা, উপকেন্দ্রদ্বয়, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও সমীকরণ এবং নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

   (iii) $2x^2 + 3y^2 - 1 = 0$

2. (a) উপবৃত্তের অক্ষ দুইটিকে যথাক্রমে x ও y অক্ষ ধরে নিম্নলিখিত বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

   (i) $(0, 2\sqrt{2})$ ও $(-3,0)$

   (b) উপবৃত্তের অক্ষ দুইটিকে x ও y অক্ষ ধরে $(2, 2)$ ও $(3, 1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। এর উৎকেন্দ্রিকতাও নির্ণয় কর।

অধ্যায়ঃ উপবৃত্ত (Ellipse)

4. (i) p এর মান কত হলে $px^2 + 4y^2 = 1$ উপবৃত্তটি $(\pm1,0)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে? উপবৃত্তটির অক্ষ দুইটির দৈর্ঘ্য এবং কেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর।

5. (ii) দেখাও যে, $2x^2 + y^2 - 8x - 2y + 1 = 0$ সমীকরণটি একটি উপবৃত্ত নির্দেশ করে। এর উৎকেন্দ্রতা এবং কেন্দ্র ও উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

6. উপবৃত্তের প্রধান অক্ষদ্বয়কে x ও y অক্ষ বিবেচনা করে নিম্নের শর্তমতে উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর :

(ii) যার উৎকেন্দ্রতা $= \frac{1}{3}$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 8$.

7. উপবৃত্তের প্রধান অক্ষদ্বয়কে x ও y-অক্ষ বিবেচনা করে নিম্নের শর্তমতে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) যার উৎকেন্দ্রতা $= \frac{4}{5}$ এবং উপকেন্দ্রের স্থানাংক $(0, \pm4)$.

অধ্যায়ঃ উপবৃত্ত (Ellipse)

9. একটি উপবৃত্তের উপকেন্দ্র x-অক্ষের উপর এবং এর কেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত। নিম্নের শর্তানুযায়ী উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) যা $(\frac{10}{3}, \sqrt{5})$ বিন্দুগামী এবং যার উৎকেন্দ্রিকতা $= \frac{4}{5}$

10. উপবৃত্তের অক্ষদ্বয়কে x ও y-অক্ষ বিবেচনা করে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর

(iv) উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যার উপকেন্দ্রদ্বয় $(\pm 2, 0)$ এবং বৃহৎ অক্ষ $= 8$ একক।

11. (i) যে উপবৃত্তের ফোকাসের স্থানাংক $(-1, 1)$, উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{2}$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $x - y = 0$; তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

অধ্যায়ঃ 6.2 অধিবৃত্ত (Hyperbola)

উদাহরণ-1. একটি অধিবৃত্ত $(6,4)$ও $(-3,1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। এর কেন্দ্র মূল বিন্দুতে এবং আড় অক্ষ x অক্ষ বরাবর হলে, অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উদাহরণ-5. যে অধিবৃত্তের নিয়ামক $2x + y = 1$, উপকেন্দ্র $(1,1)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{3}$ তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

উদাহরণ-6. একটি অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক $(4,2)$ ও $(8,2)$এবং উৎকেন্দ্রিকতা 2 হলে, অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

অধ্যায়ঃ 6.2 অধিবৃত্ত (Hyperbola)

2. (iii) $9x^2 - 16y^2 = 144$ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র এবং উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর।

(vi) দেখাও যে, $x^2 - 8y^2 = 2$ অধিবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ $3x = \pm 4$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ।

5. স্থানাংকের অক্ষদ্বয়কে অক্ষ ধরে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর:

6. (i) উপকেন্দ্র $(1, -8)$, উৎকেন্দ্রতা $\sqrt{5}$এবং নিয়ামক $3x - 4y = 10$ বিশিষ্ট অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(ii) যার উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব $= 16$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$.

অধ্যায়ঃ ১০.১ (১ম পত্র) যোগজীকরণ (Integration)

4. (i) $\int \sqrt{1-\cos 2x}\, dx$

(ii) $\int \frac{1}{1+\cos 2x} dx$

(iii) $\int \frac{dx}{1-\cos 2x}$

5. (i) $\int \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} dx$

(ii) $\int cot^2 x dx$

7. $\int sec^2 x cosec^2 x dx$

অধ্যায়ঃ ১০.২ (১ম পত্র) যোগজীকরণ (Integration)

উদাহরণ-6: $\int cos^4 x\, dx$ নির্ণয় কর।

2. (ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

5. (iv) $\int 5\cos 4x \sin 3x\, dx$

7. (ii) $\int sin^2 x \cos 2x\, dx$

8. (i) $\int \frac{1}{1+\cos x} dx$

(v) $\int \sin px \cos qx\, dx\ ; (p > q)$

(iii) $\int sin^2 x cos^2 x dx$

(iii) $\int \frac{1}{1+\sin x} dx$

অধ্যায়ঃ ১০.৩ (১ম পত্র) যোগজীকরণ (Integration)

উদাহরণ-8: $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}} dx$ নির্ণয় কর।

1. (iii) $\int \cos x \, e^{\sin x} dx$

4. (iv) $\int \frac{\sin x}{3+4\cos x} dx$

5. (i) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$

6. (iii) $\int \frac{1}{x(1+\ln x)} dx$

7. (ii) $\int \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2} dx$

(v) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-2x^4}} dx$

(vii) $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x} dx$

অধ্যায়ঃ ১০.৩ (১ম পত্র) যোগজীকরণ (Integration)

9. (iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$ (iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$

11. (iii) $\int \frac{dx}{16-4x^2}$

14. (ii) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}$

15. (i) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x}}$

20. (ii) $\int \frac{1}{1+\tan x} dx$

22. (i) $\int \frac{d\theta}{1+3cos^2\theta}$

25. (i) $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}}$

অধ্যায়ঃ ১০.৪ (১ম পত্র) যোগজীকরণ (Integration)

উদাহরণ- 1: $\int x^2 e^x dx$ নির্ণয় কর ।

উদাহরণ- 3: $\int e^x \sin x \, dx$ নির্ণয় কর ।

উদাহরণ- 5: $\int \mathrm{x} \tan^{-1} x \, dx$ নির্ণয় কর ।

1.(iii) $\int \ln x \, dx$

3.(v) $\int x \, tan^2 x dx$

4.(iii) $\int x^2 \, sin^2 x dx$

5.(ii) $\int e^x \sin 2x \, dx$

6.(iv) $x \sin^{-1} x^2 dx$

8.(i) $\int \frac{e^x}{x}(1 + x \ln x) dx$

8.(ii) $\int e^x \sec x (1 + \tan x) dx$

8.(v) $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$

অধ্যায়ঃ ১০.৫ (১ম পত্র) যোগজীকরণ (Integration)

2. (i) $\int \frac{x^2}{x^2-4} dx$

(ii) $\int \frac{x^2-1}{x^2-4} dx$

4. (i) $\int \frac{dx}{x^2(x-1)}$

5. (i) $\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)}$

অধ্যায়ঃ ১০.৬ (১ম পত্র) যোগজীকরণ (Integration)

উদাহরণ-4: $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x} dx$ নির্ণয় কর ।

উদাহরণ-6: $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\ dx$ নির্ণয় কর ।

উদাহরণ-7: $\int_0^1 \frac{(\sin^{-1} x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$ নির্ণয় কর ।

অধ্যায়ঃ ১০.৬ (১ম পত্র) যোগজীকরণ (Integration)

3. (i) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \frac{\sec x+1}{\sec x} dx$

4. (i) $\int_0^{\pi/2} cos^2 x\, dx$ (v) $\int_0^{\pi/2} cos^3 x\, dx$

5. (ii) $\int_0^{\pi/2} \sin x \sin 2x\, dx$

6. (ii) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\sin x}$

7. (ii) $\int_0^{\pi/4} 4tan^3 x sec^2 dx$

7. (v) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{cos^5 x}{sin^7 x} dx$

8. (vi) $\int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2} dx$

9. (iii) $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$ (iv) $\int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{9-2x^2}}$

অধ্যায়ঃ ১০.৬ (১ম পত্র) যোগজীকরণ (Integration)

10. (iii) $\int_0^{\pi/2}(1+\cos x)^2 \sin x\, dx$

(vii) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{9-sin^2x}$

(ix) $\int_0^{\pi/2} \frac{cos^3x}{\sqrt{\sin x}} dx$

(xi) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\ sin^3x\, dx$

12. (ii) $\int_0^1 xe^{x^2} dx$

13. (i) $\int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(iv) $\int_0^1 \frac{(\tan^{-1} x)^2}{1+x^2} dx$

15. (i) $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\, dx$

অধ্যায়ঃ ১০.৬ (১ম পত্র) যোগজীকরণ (Integration)

16. (v) $\int_0^1 \ln(x^2+1)\,dx$

(vi) $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

(vii) $\int_1^{\sqrt{3}} x\tan^{-1}x\,dx$

অধ্যায়ঃ ১০.৭ (১ম পত্র) যোগজীকরণ (Integration)

উদাহরণ-4: $y^2 = 4x$ পরাবৃত্তের এবং $y = x$ সরলরেখা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

3. (i) $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

4. (i) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

5. (i) $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্ত এবং $x = 3$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

অধ্যায়ঃ ১০.৭ (১ম পত্র) যোগজীকরণ (Integration)

8. (i) $y^2 = 16x$ ও $y = x$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

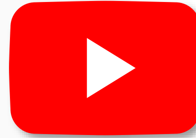
9. (ii) দেখাও যে, $y^2 = 4ax$ এবং $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত দুইটি দ্বারা আবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\frac{16}{3}a^2$ বর্গ একক।

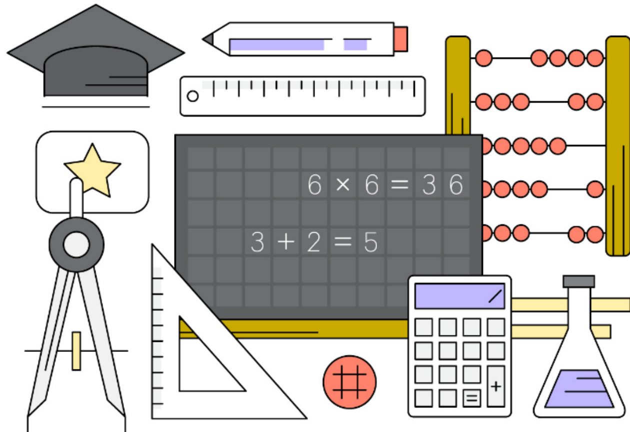
10. দেখাও যে, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ অধিবৃত্ত এবং স্থানাংকের অক্ষদ্বয়ের অন্তর্গত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{6}a^2$ বর্গ একক।



Higher Math 2nd Paper

এইচ এস সি ২১ শর্ট সিলেবাসের উচ্চতর গনিত ২য় পত্রের ক্লাস গুলো পেতে নিচের বাটনে ক্লিক করো







DOWNLOAD THE APP

সূচিপত্র

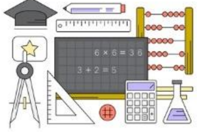
10 MINUTE SCHOOL

এইচ এস সি ২১ শর্ট সিলেবাসের উচ্চতর গনিত ২য় পত্রের ক্লাস গুলো পেতে নিচের বাটনে ক্লিক করো

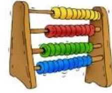




বহুপদী ও এর সমীকরণ







কণিক









বিপরীত ত্রিকোণমিতি







স্থিতিবিদ্যা







Higher Math 1st & 2nd Paper

QNA









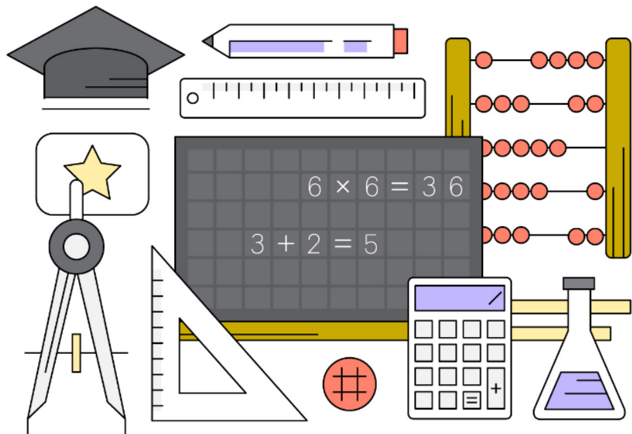
মডেল টেস্ট এবং সলিউশন

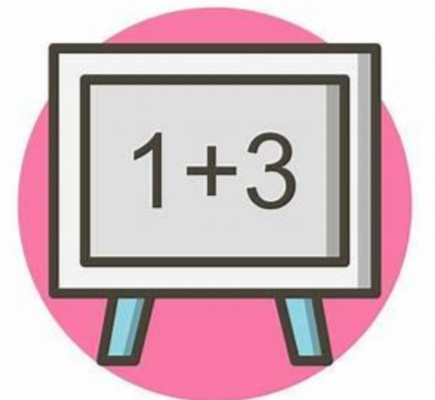






বহুপদী ও এর সমীকরণ





বহুপদী ও এর সমীকরণ

চলক এবং ধ্রুবক সম্বলিত এমন একটা expression যেখানে চলকের কোন **ঋনাত্বক বা (ভগ্নাংশ)ঘাত** থাকবে না।

$$p(x) = 7x^5 + 6x^9 + 10x^3 + 2x + 1 + \frac{2}{x}$$

$2 \times x^{-1}$

A. Yes

B. No

2. $p(a) = x^3 + 2x^2 + \frac{1}{x} + 3a$

DOWNLOAD THE APP

বহুপদী ও এর সমীকরণ

10 MINUTE SCHOOL

DIY

1. $p(x) = 7x^9 + 5x^8 + 6x^7 + 10x^{10} + 5x^2 + 2$

   a. মুখ্য সহগ ? = 10.

2. $p(a) = 5a^5 + 4a^3 + 7a^9 + 10a^{12} + 2a^{13}$

   বহুপদীর ঘাত ? = 13

3. $a^3b^2 + 7ab^5 + 5a^3b^5 + 3a + 5b$

   বহুপদীর ঘাত ? = 8

বহুপদী ও এর সমীকরণ

ঘাত 7 6 4

4. $9x^4y^3 - 8x^6 + 4xy^3 + 7$ বহুপদীর ঘাত কত ?

A. 6 B. 7 C. 4 D. 3

5. $x = 2$ এবং $y = 3$ হলে

মুখ্য পদ $= 9 \times 2^4 \times 3^3 = ??$

গৌণ পদ $= -8 \times 2^6 \times 3^3 + 4 \times 2 \times 3^3 + 7 = ??$

বহুপদী ও এর সমীকরণ

$ax^2 + bx + c = 0$

$(i) a \neq 0$

$(ii)\ b = 0$ হলে, $ax^2 + c = 0 \rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

$b = 0$ "হলে মূলদ্বয় সমান ও বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হবে" $\sqrt{2}, \sqrt{-2}$

$a > 0, c > 0, b = 0$ হলে x এরমান কাল্পনিক / জটিল হবে.

$\left[\begin{array}{l} a > 0, c < 0, b = 0 \\ a < 0, c > 0, b = 0 \end{array}\right]$ মূলদ্বয় বাস্তব হবে

$(iii) c = 0$ হলে, $ax^2 + bx = 0 \rightarrow x(ax + b) = 0 \rightarrow x = 0, -\frac{b}{a}$

একটি মূল শূন্য হবে

বহুপদী ও এর সমীকরণ

$ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় শূন্য হওয়ার শর্ত কোনটি?

$A.\ b = 0$ $B.\ c = 0$ $C.\ b = 0 = c$ $D.\ c \neq 0$

$ax^2 = 0$

$x = 0,0$

দ্বিঘাত বহুপদীর গঠন :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

মূল α, β হলে,

গঠনঃ $x^2 - (\alpha + \beta) + \alpha\beta = 0$

সহগ সমীকৃত করে,

$$-(\alpha + \beta) = \frac{b}{a}$$

$$(\alpha + \beta) = -\frac{b}{a} = \frac{x \text{ এর সহগ}}{x^2 \text{ এর সহগ}}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{c}{a}$$

$$= \frac{x \text{ বর্জিত পদ}}{x^2 \text{ এর সহগ}}$$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 3x - 2x + 6 = 0$

$\Rightarrow x(x - 3) - 2(x - 3) = 0$

$\Rightarrow (x - 3)(x - 2) = 0$

$\Rightarrow x = 3, 2$

$x^2 - (3 + 2)x + 3 \times 2 = 0$

দ্বিঘাত বহুপদীর গঠন :

মূল $5, -7.$

সমীকরণঃ $x^2 - (5-7)x + 5(-7) = 0$

$\rightarrow \quad x^2 + 2x - 35 = 0$ Ans..

মূল $3 + 2i, 3 - 2i.$

সমীকরণঃ $x^2 - (3 + 2i + 3 - 2i)x + (3 + 2i)(3 - 2i) = 0$

$\rightarrow \quad x^2 - 6x + 3^2 - (2i)^2 = 0$

$\rightarrow \quad x^2 - 6x + 9 + 4 = 0$

$\rightarrow \quad x^2 - 6x + 13 = 0$

দ্বিঘাত বহুপদীর গঠন :

$\frac{1}{1-3i}$ মুলযুক্ত দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর?

$$x = \frac{1}{1-3i}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = 1 - 3i$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 = (-3i)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} - 2.\frac{1}{x}.1 + 1^2 = 9i^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1 + 9 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 10 = 0$$

$$\Rightarrow 1 - 2x + 10x^2 = 0$$

$$\Rightarrow 10x^2 - 2x + 1 = 0$$

দ্বিঘাত বহুপদীর গঠন :

পূর্ণসংখ্যা সহগ দ্বিমাত্রিক সমীকরণ,

যার একটি মূল $\sqrt{-5}-1$

A. $x^2+2x+6=0$

B. $x^2+x+3=0$

C. $x^2+2x-6=0$

D. $x^2+x-3=0$

$$x=\sqrt{-5}-1$$
$$x+1=\sqrt{-5}$$
$$(x+1)^2=\left(\sqrt{-5}\right)^2$$
$$x^2+2x+1=-5$$
$$x^2+2x+6=0$$

দ্বিঘাত বহুপদীর গঠন :

মূলদ সহগবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করো যার একটি মূল $x = \frac{1}{3+i\sqrt{2}}$?

A. $x^2 + 4x - 1 = 0$

B. $11x^2 - 6x + 1 = 0$

C. $2x^2 - 6x + 7 = 0$

D. $x^2 - 6x + 11 = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = 3 + i\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} - 3 = -i\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x} - 3\right)^2 = \left(i\sqrt{2}\right)^2$$

Ans..

বহুপদী ও এর সমীকরণ

Problems

1. $ax^2 + bx + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত $m : n$ হলে দেখাও যে, $\sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = 0$

সমাধান: ধরি, $ax^2 + bx + b = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি α ও β।

তাহলে, $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{b}{a}$

প্রশ্নমতে, $\alpha : \beta = m : n$

$$\therefore \frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{n}$$

Problems

1. $ax^2+bx+b=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত $m:n$ হলে দেখাও যে, $\sqrt{\frac{m}{n}}+\sqrt{\frac{n}{m}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=0$

সমাধান: ধরি, $ax^2+bx+b=0$ সমীকরণের মূল দুইটি α ও β ।

তাহলে, $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta=\frac{b}{a}$

$$\text{L.H.S}=\sqrt{\frac{m}{n}}+\sqrt{\frac{n}{m}}+\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$=\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}+\sqrt{\frac{b}{a}}$$

Problems

1. $ax^2 + bx + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত $m : n$ হলে দেখাও যে, $\sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = 0$

সমাধান: ধরি, $ax^2 + bx + b = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি α ও β ।

তাহলে, $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{b}{a}$

$$= \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{\alpha\beta}} + \sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$= \frac{-\frac{b}{a}}{\sqrt{\frac{b}{a}}} + \sqrt{\frac{b}{a}}$$

$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

Problems

1. $ax^2 + bx + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত $m : n$ হলে দেখাও যে, $\sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = 0$

সমাধান: ধরি, $ax^2 + bx + b = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি α ও β ।

তাহলে, $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{b}{a}$

$$= \frac{-\sqrt{\frac{b}{a}} \times \sqrt{\frac{b}{a}}}{\sqrt{\frac{b}{a}}} + \sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$= -\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = 0 = \text{R.H.S}$$

Proved

DOWNLOAD THE APP

Problems

10 MINUTE SCHOOL

2. $27x^2 + 6x - (p+2) = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গ হলে, p এর মান নির্ণয় কর?

ধরি, সমীকরণের একটি মূল α, তাহলে অপর মূলটি α^2

$$\alpha + \alpha^2 = -\frac{6}{27} = -\frac{2}{9} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

Problems

2. $27x^2 + 6x - (p+2) = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গ হলে, p এর মান নির্ণয় কর?

ধরি, সমীকরণের একটি মূল α, তাহলে অপর মূলটি α^2

এবং,

$$\alpha.\alpha^2 = -\frac{(p+2)}{27}$$

$$\Rightarrow \alpha^3 = -\frac{(p+2)}{27}$$

$$\Rightarrow 27\alpha^3 = -p - 2$$

$$\therefore p = -2 - 27\alpha^3 \dots\dots\dots\dots (ii)$$

Problems

2. $27x^2 + 6x - (p+2) = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গ হলে, p এর মান নির্ণয় কর?

(i) নং হতে পাই,

$$9\alpha^2 + 9\alpha = -2$$

$$\Rightarrow 9\alpha^2 + 9\alpha + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 9\alpha^2 + 6\alpha + 3\alpha + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 3\alpha(3\alpha + 2) + 1(3\alpha + 2) = 0$$

$$\Rightarrow (3\alpha + 2)\,(3\alpha + 1) = 0$$

$3\alpha + 2 = 0$ অথবা, $3\alpha + 1 = 0$

$\therefore \alpha = -\frac{2}{3}$ $\qquad$ $\therefore \alpha = -\frac{1}{3}$

Problems

2. $27x^2 + 6x - (p+2) = 0$ **সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গ হলে, p এর মান নির্ণয় কর?**

$\therefore \alpha$ এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$$p = -2 - 27 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^3$$
$$= -2 + 27 \times \frac{8}{27}$$
$$= -2 + 8$$
$$= 6$$

আবার,

$$p = -2 - 27 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^3$$
$$= -2 + 27 \times \frac{1}{27}$$
$$= -2 + 1$$
$$= -1$$

$\therefore p = 6, -1$

DOWNLOAD THE APP

HOME WORK

10 MINUTE SCHOOL

ঢাকা বোর্ড ২০১৯

$\mathbf{F}(x) = 27x^2 + 6x - (m+2)$,

$\mathbf{P}(x) = rx^2 - 2nx + 4m$ এবং $\mathbf{Q}(x) = mx^2 + nx + r$

ক. $(2 + 2\sqrt{3}i)$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর।

খ. $F(x) = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হলে, m এর মান নির্ণয় কর?

গ. $\mathrm{P}(x) = 0$ এবং $Q(x) = 0$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ মূল থাকবে,

প্রমাণ কর যে, $(2m - r)^2 + 2n^2 = 0$ অথবা $2m + r = 0$.

Problems

3. $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের পার্থক্য 1 হলে দেখাও যে, $p^2 + 4q^2 = (1 + 2q)^2$

সমাধান: ধরি, মূলদ্বয় $\alpha, \alpha + 1$

এখানে, $\alpha + \alpha + 1 = -\frac{p}{1}$

$2\alpha + 1 = -\frac{p}{1}$

$\therefore \alpha = -\frac{(p+1)}{1}$

যোগফল হতে অজানা রাশির মান গুণফল এ বসাবো

এবং, মূলদ্বয়ের গুণফলঃ $\alpha.(\alpha + 1) = \frac{q}{1}$

$\therefore \alpha^2 + \alpha = q$

Problems

3. $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের পার্থক্য 1 হলে দেখাও যে, $p^2 + 4q^2 = (1 + 2q)^2$

সমাধান:

$$\left\{-\frac{(p+1)}{2}\right\}^2 + \frac{-(p+1)}{2} = q$$

$$\frac{1}{4}(p^2 + 2p + 1) - \frac{(p+1)}{2} - q = 0$$

$$p^2 + 2p + 1 - 2p - 2 - 4q = 4 \times 0$$ [4 দ্বারা গুন করে পাই]

$$p^2 - 1 - 4q = 0$$

Problems

3. $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের পার্থক্য 1 হলে দেখাও যে, $p^2 + 4q^2 = (1 + 2q)^2$

সমাধান:

$$p^2 = 1 + 4q$$

$$p^2 + 4q^2 = 1 + 4q + 4q^2$$

$$= 1 + 2.1.2q + (2q)^2$$

$$\therefore p^2 + 4q^2 = (1 + 2q)^2 \;;$$

Proved

Problems

4. k এর মান কত হলে, $(k^2-3)x^2+3kx+3k+1=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় পরস্পর উল্টো হবে?

সমাধান:

(d) ধরি, মূলদ্বয় $\alpha, \frac{1}{\alpha}$

মূলদ্বয়ের গুণফল $\alpha . \frac{1}{\alpha} = \frac{3k+1}{k^2-3}$

$$k^2-3=3k+1$$

$$k^2-3k-4=0$$

$$k^2-4k+k-4=0$$

$$k(k-4)+1(k-4)=0$$

$$(k-4)(k+1)=0$$

Problems

4. k এর মান কত হলে, $(k^2 - 3)x^2 + 3kx + 3k + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় পরস্পর উল্টো হবে?

সমাধান:

(d)

$\therefore k - 4 = 0$

$\rightarrow k = 4$

অথবা,

$\therefore k + 1 = 0$

$\rightarrow k = -1$

Problems

5. $\frac{1}{x}+\frac{1}{p-x}=\frac{1}{q}$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অন্তর r হলে p কে q ও r এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। [ব.'০১; য,'০২]

সমাধান:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{p-x}=\frac{1}{q}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{p-x}=\frac{1}{q}$$

$$\frac{p-x+x}{x(p-x)}=\frac{1}{q}$$

$$px-x^2=pq$$

$$x^2-px+pq=0$$

Problems

5. $\frac{1}{x}+\frac{1}{p-x}=\frac{1}{q}$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অন্তর r হলে p কে q ও r এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। [ব.'০১; য,'০২]

সমাধান:

ধরি, মূলদ্বয় $\alpha,\ \alpha-r$

মূলদ্বয়ের যোগফলঃ

$$\alpha+\alpha-r=-\frac{-p}{1}$$

$$2\alpha-r=p$$

$$2\alpha=p+r$$

$$\therefore \alpha=\frac{1}{2}(p+r)$$

$\alpha,\alpha+r$

$\alpha+r-\alpha$

$=r$

Problems

5. $\frac{1}{x}+\frac{1}{p-x}=\frac{1}{q}$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অন্তর r হলে p কে q ও r এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। [ব.'০১; য,'০২]

সমাধান: মূলদ্বয়ের গুণফল:

$$\alpha.(\alpha-r)=\frac{pq}{1}$$

$$\alpha^2-r\alpha)=pq$$

$$\left\{\frac{1}{2}(p+r)\right\}^2-r\,\frac{p+r}{2}=pq$$

$$\frac{1}{4}(p^2+2pr+r^2)-\frac{rp+r^2}{2}=pq$$

$$p^2+2pr+r^2-2pr-2r^2=4pq$$

Problems

5. $\frac{1}{x}+\frac{1}{p-x}=\frac{1}{q}$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অন্তর r হলে p কে q ও r এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। [ব.'০১; য,'০২]

সমাধান:

$$p^2-4pq-r^2=0$$

$$p^2-4pq=r^2$$

$$p^2-2.p.2q+(2q)^2=r^2+4q^2$$

$$(p-2q)^2=4q^2+r^2$$

$$p-2q\pm\sqrt{4q^2+r^2}$$

$$\therefore \boldsymbol{p=2q+\pm\sqrt{4q^2+r^2}}$$

Problems

6. $\boldsymbol{x^2 - px + q = 0}$ **সমীকরণের মূলদ্বয় ক্রমিক পূর্ণ সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর যে,** $\boldsymbol{p^2 - 4q - 1 = 0}$

সমাধান: ধরি, মূলদ্বয় $\alpha, \ \alpha + 1$

মূলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha + \alpha + 1 =- -\frac{p}{1}$

$$2\alpha + 1 = p$$

$$2\alpha = p - 1$$

$$\alpha = \frac{p-1}{2}$$

$= \cdots \ldots \ldots \ldots \boldsymbol{H.W}$

Problems

7. $ax^2 + bx + c = 0$ **সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত** $3 : 4$ **হলে, দেখাও যে,** $12b^2 = 49a^2$

সমাধান:

ধরি, মূলদ্বয় $3\alpha,\ 4\alpha$

মূলদ্বয়ের যোগফল, $3\alpha + 4\alpha = -\frac{b}{a}$

$$7\alpha = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha = -\frac{b}{7a}$$

Problems

7. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত $3:4$ হলে, দেখাও যে, $12b^2 = 49a^2$

সমাধান: মূলদ্বয়ের গুণফল $(3\alpha)(4\alpha) = \frac{c}{a}$

$$12\alpha^2 = \frac{c}{a}$$

$$12(-\frac{b}{7a})^2 = \frac{c}{a}$$

$$12 \times \frac{b^2}{49a^2} = \frac{c}{a}$$

$$12b^2 = 49a^2$$

Proved

CQ

8.যদি $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হয়, তবে

(i) $\alpha + \frac{1}{\beta}, \ \beta + \frac{1}{\alpha}$ [কু.বো'০৮]

(ii) $\frac{\alpha+\beta}{2}, \sqrt{\alpha\beta}$

(iii) $\frac{1}{\alpha^3}, \frac{1}{\beta^3}$

এখানে,

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$ এবং

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

CQ

৪.যদি $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হয়, তবে

(i) $\alpha + \frac{1}{\beta}, \ \beta + \frac{1}{\alpha}$ [কু.বো'০৮]

সমাধান:

(i) $\alpha + \frac{1}{\beta}, \ \beta + \frac{1}{\alpha}$ মূলযুক্ত সমীকরণঃ

$$x^2 - \left(\alpha + \frac{1}{p} + \beta + \frac{1}{\alpha}\right)x + \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \left(\alpha + \beta + \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)x + \alpha\beta + 1 + 1 + \frac{1}{\alpha\beta} = 0$$

$$\Rightarrow 1x^2 - \left(-\frac{b}{a} + \frac{-b/a}{c(a)}\right)x + \frac{c}{a} + 2 + \frac{1}{c/a} = 0$$

$$\Rightarrow \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . \mathrm{H.W}$$

এখানে,

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$ এবং

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

CQ

8.যদি $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হয়, তবে

(ii) $\frac{\alpha+\beta}{2}, \sqrt{\alpha\beta}$

সমাধান:

(ii) $\frac{\alpha+\beta}{2}, \sqrt{\alpha\beta}$ মূলযুক্ত দ্বিঘাত সমীকরণঃ

$$x^2 - \left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \sqrt{\alpha\beta}\right)x + \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \times \sqrt{\alpha\beta}\right) = 0$$

$$=)x^2 - \left(\frac{-b/a}{2} + \sqrt{q}\right)x + \frac{-b/a}{2} \cdot \sqrt{\frac{c}{a}} = 0$$

এখানে,

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ এবং

$\alpha\beta = \frac{c}{a}$

CQ

৪.যদি $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হয়, তবে

(ii) $\frac{\alpha+\beta}{2}, \sqrt{\alpha\beta}$

সমাধান:

(ii) $\frac{\alpha+\beta}{2}, \sqrt{\alpha\beta}$ **মূলযুক্ত দ্বিঘাত সমীকরণঃ**

এখানে, $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ এবং

$\alpha\beta = \frac{c}{a}$

$$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}\right)x - \frac{b}{2a} \cdot \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{-b+2\sqrt{ac}}{2a}x - \frac{b\sqrt{c}}{2a^{3/2}} = 0$$

$$\Rightarrow 2a^{3/2}x^2 - (2a\sqrt{c} - b\sqrt{a})x - b\sqrt{c} = 0$$

Ans

Problems

9.এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূল দুইটি যথাক্রমে $x^2 - 2bx + b^2 - a^2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের সমষ্টি এবং অন্তরফলের ধনাত্মক মান হবে।

সমাধান:

ধরি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha, \ \beta$

$$\therefore \alpha + \beta = -\frac{-2b}{1} = 2b$$

এবং $\alpha\beta = \frac{b^2 - a^2}{1} = b^2 - a^2$

Problems

9.এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূল দুইটি যথাক্রমে $x^2 - 2bx + b^2 - a^2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের সমষ্টি এবং অন্তরফলের ধনাত্মক মান হবে।

সমাধান:

এখানে,

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$= (2b)^2 - 4(b^2 - a^2)$$

$$= 4b^2 - 4b^2 + 4a^2$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{যখন } x > 0 \\ -x & \text{II } \quad x < 0 \end{cases}$$

$$(\alpha - \beta)^2 = 4a^2$$

$$|\alpha - \beta| = 2a; \quad a > 0$$

$$= -2a; \; a < 0$$

বহুপদী ও এর সমীকরণ

$a > 0$ শর্তে

নির্ণেয় সমীকরণঃ $x^2 - (2b + 2a)x + 2b \times 2a = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2(a + b)x + 4ab = 0$

Ans..

$a < 0$ শর্তে

নির্ণেয় সমীকরণঃ $x^2 - (2b - 2a)x + 2b \times (-2a) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2(a - b)x - 4ab = 0$

Ans..

Problems

10. $7x^2 - 5x - 3 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta}$ এবং $\frac{1}{\beta} + \frac{2}{\alpha}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান:

এখানে, $\alpha + \beta = -\frac{-5}{7} = \frac{5}{7}$

এবং $\alpha\beta = \frac{-3}{7}$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 + x_2 = 0$$

$\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta}$ এবং $\frac{1}{\beta} + \frac{2}{\alpha}$ মূলযুক্ত সমীকরণঃ $x^2 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta} + \frac{2}{\beta} + \frac{2}{\alpha}\right)x + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\beta} + \frac{2}{\alpha}\right) = 0$

$$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{3}{\alpha} + \frac{3}{\beta}\right)x + \frac{5}{\alpha\beta} + \frac{2}{\alpha^2} + \frac{2}{\beta^2} + \frac{2}{\alpha\beta} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 3\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right)x + \frac{5}{\alpha\beta} + 2\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2}\right) = 0$$

Problems

10. $7x^2 - 5x - 3 = 0$ **সমীকরণের মূলদ্বয়** α, β হলে $\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta}$ এবং $\frac{1}{\beta} + \frac{2}{\alpha}$ **মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।**

সমাধান:

$$\Rightarrow x^2 - 3 \times \frac{\frac{5}{7}}{-\frac{3}{7}} x + \frac{5}{-\frac{3}{7}} + 2x \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x - \frac{35}{3} x + 2 \times \frac{\left(\frac{5}{7}\right)^2 - 2\left(\frac{-3}{7}\right)}{\left(\frac{-3}{7}\right)^2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x - \frac{35}{3} + 2 \times \frac{\frac{25}{49} + \frac{6}{7}}{\frac{9}{49}} = 0$$

Problems

10. $7x^2 - 5x - 3 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta}$ এবং $\frac{1}{\beta} + \frac{2}{\alpha}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান:

$$\Rightarrow x^2 + 5x - \frac{35}{3} + 2 \times \frac{\frac{25+42}{49}}{\frac{9}{49}} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x - \frac{35}{3} + 2 \times \frac{67}{9} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x + \frac{134}{9} - \frac{35}{3} = 0$$

Problems

11. $2x^2+3x+5=0$ α,β; $\frac{1}{\alpha^3},\frac{1}{\beta^3}$ মূলযুক্ত সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান:

এখানে, মূলদ্বয়ের যোগফল $\alpha+\beta=-\frac{3}{2}$ এবং, $\alpha\beta=\frac{5}{2}$

$\frac{1}{\alpha^3}$ এবং $\frac{1}{\beta^3}$ মূলযুক্ত সমীকরণঃ

$$x^2-\left(\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}\right)x+\frac{1}{\alpha^3}\times\frac{1}{\beta^3}=0$$

$$\Rightarrow x^2-\frac{\beta^3+\alpha^3}{\alpha^3\beta^3}x+\frac{1}{(\alpha\beta)^3}=0$$

$$\Rightarrow x^2-\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^3}x+\frac{1}{(\alpha\beta)^3}=0$$

Problems

11. $2x^2 + 3x + 5 = 0$ $\alpha, \beta; \frac{1}{\alpha^3}, \frac{1}{\beta^3}$ মূলযুক্ত সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান:

$$\Rightarrow x^2 - \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \times \frac{5}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{5}{2}\right)^3} x + \frac{1}{\left(\frac{5}{2}\right)^3} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{-\frac{27}{8} + \frac{45}{4}}{\frac{125}{8}} x + \frac{8}{125} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{-\frac{27 + 90}{8\ \ 2}}{\frac{125}{8}} x + \frac{8}{125} = 0$$

Problems

11. $2x^2 + 3x + 5 = 0$ $\alpha, \beta; \frac{1}{\alpha^3}, \frac{1}{\beta^3}$ মূলযুক্ত সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান:

$$\Rightarrow x^2 - \frac{63}{125}x + \frac{8}{125} = 0$$

$$\Rightarrow 125x^2 - 63x + 8 = 0$$

Problems

12. $x^2 + 2bx + c = 0$ **এর মূলদ্বয়** α, β **হলে** $\alpha^2 \beta^2$ **মূলযুক্ত সমীকরণ নির্ণয় কর।**

সমাধান:

এখানে, $\alpha + \beta = -\frac{2b}{1} = -2b$

এবং $\alpha\beta = \frac{c}{1} = c$

α^2, β^2 মূলযুক্ত দ্বিঘাত সমীকরণঃ

$$x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha^2 . \beta^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\}x + (\alpha\beta)^2 = 0$$

⇒..................(H.W)

Problems

13. $x^2 - bx + c = 0$ এবং $x^2 - cx + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের পার্থক্য একটি ধ্রুব রাশি হলে, প্রমাণ কর যে, $b + c + 4 = 0$

সমাধান:

ধরি, $x^2 - bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় α, β।

$$\therefore \alpha + \beta = -\frac{-b}{1} = b$$

এবং $\alpha\beta = \frac{c}{1} = c$

প্রশ্নানুসারে, $x^2 - cx + b = 0$ এর মূলদ্বয় $\alpha + k,\ \beta + k$.

$$\therefore \alpha + k + \beta + k = -\frac{-c}{1}$$

$$\Rightarrow (\alpha + \beta) + 2k = c$$

$$\Rightarrow b + 2k = c$$

$$\Rightarrow 2k = c - b$$

$$\Rightarrow k = \frac{c-b}{2}$$

Problems

13. $x^2 - bx + c = 0$ **এবং** $x^2 - cx + b = 0$ **সমীকরণের মূলদ্বয়ের পার্থক্য একটি ধ্রুব রাশি হলে, প্রমাণ কর যে,** $b + c + 4 = 0$

সমাধান:

আবার, $(\alpha + k)(\beta + k) = \frac{b}{1}$

$$\Rightarrow \alpha\beta + k\alpha + k\beta + k^2 = b$$

$$\Rightarrow c + k(\alpha + \beta) + \left(\frac{c-b}{b}\right)^2 = b$$

$$\Rightarrow c + \frac{c-b}{2} \times b + \frac{c^2 - 2bc + b^2}{4} = b$$

$$\Rightarrow 4c + 2bc - 2b^2 + c^2 - 2bc + b^2 = 4b$$

$$\Rightarrow 4c + b^2 + c^2 - 4b = 0$$

Problems

13. $\boldsymbol{x^2 - bx + c = 0}$ **এবং** $\boldsymbol{x^2 - cx + b = 0}$ **সমীকরণের মূলদ্বয়ের পার্থক্য একটি ধ্রুব রাশি হলে, প্রমাণ কর যে,** $\boldsymbol{b + c + 4 = 0}$

সমাধান:

$$\Rightarrow 4c + 4b + c^2 - b^2 = 0$$

$$\Rightarrow 4(c - b) + (c + b)(c - b) = 0$$

$$\Rightarrow (c - b)(4 + c + b)(c - b) \neq 0; b + c + 4 = 0$$

(প্রমাণিত)

বহুপদী ও এর সমীকরণ

$ax^2 + bx + c = 0$

α, β

$\alpha + \beta = \sum\alpha = -\frac{b}{a}$ ($b \rightarrow x$, $a \rightarrow x^2$)

$\alpha\beta = \frac{c}{a}$ ($c \rightarrow x^0$, $a \rightarrow x^2$)

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

α, β, γ

$\varepsilon\alpha = \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$ ($b \rightarrow x^2$, $a \rightarrow x^3$)

$\varepsilon\alpha\beta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta = -\frac{c}{a}$ ($c \rightarrow x$, $a \rightarrow x^3$)

$\alpha\beta\gamma = \frac{d}{a}$ ($d \rightarrow x^0$, $a \rightarrow x^3$)

Problems

14. $\boldsymbol{x^3 + px^2 + qx + r = 0}$ **সমীকরণের মূলগুলি** $\boldsymbol{\alpha,\ \beta,\ \gamma}$ **হলে** $\boldsymbol{\sum\alpha^3}$ **এর মান নির্ণয় কর।**

সমাধান:

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

মূলত্রয় $\boldsymbol{\alpha,\ \beta,\ \gamma}$

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{\mathrm{p}}{1} = -p$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{q}{1} = q$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{\pi}{1} = -\pi$$

DOWNLOAD THE APP

Problems

10 MINUTE SCHOOL

14. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলগুলি $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ হলে $\sum \alpha^3$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

প্রদত্ত রাশি $= \sum \alpha^3$

$= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

$= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma + 3\alpha\beta\gamma$

$= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma$

(1) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - b - ca)$

(2) $a^2 + b^2 + c^2$

$= (a + b + c)^2 - 2ab - 2bc - 2ca$

Problems

14. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলগুলি $\alpha, \ \beta, \ \gamma$ হলে $\sum\alpha^3$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

প্রদত্ত রাশি $= \sum\alpha^3$

$$= -p.\{(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2\alpha\beta - 2\beta\gamma - 2\gamma\alpha - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha\} + 3(-r)$$

$$= -P\{(-p)^2 - 3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\} - 3\pi$$

$$= -P\{p^2 - 3q\} - 3\pi$$

$$= -P^3 + 3pq - 3\pi\}$$

$$= 3pq - P^3 - 3\pi$$

(1) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-b-ca)$

(2) $a^2 + b^2 + c^2$

$= (a+b+c)^2 - 2ab - 2bc - 2ca$

Problems

15. $x^3 + qx + r = 0$ …………………. α, β, γ

$(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে,

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{0}{1} = 0$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{q}{1} = q$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{r}{1} = -r$$

Problems

15. $x^3 + qx + r = 0$ ……………….. $\alpha,\ \beta,\ \gamma$

$(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

প্রদত্ত রাশি $= (\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2$

$= \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + \beta^2 - 2\beta\gamma + \gamma^2 + \gamma^2 - 2\gamma\alpha + \alpha^2$

$= 2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$

$= 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 2q$

$= 2\{(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} - 2q$

$= 2\{0^2 - 2 \times q\} - 2q$

$= -4q - 2q$

$= -6q$ **Ans..**

Problems

16. $3x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ **সমীকরণের মূলগুলি** α, β, γ **হলে** $\sum \alpha^2 b$ **এর মান নির্ণয় কর।**

সমাধান:

এখানে,

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{-2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{0}{3} = 0$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{1}{3}$$

Problems

16. $3x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ সমীকরণের মূলগুলি α, β, γ হলে $\sum\alpha^2 b$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

প্রদত্ত রাশি $= \sum\alpha^2 b$

(মূল)^2 × (অন্য একটি মূল)^2

$$= \alpha^2\beta + \beta^2\alpha + \alpha^2\gamma + \gamma^2\alpha + \beta^2\gamma + \gamma^2\beta$$

$$= \alpha\beta(\alpha + \beta) + \alpha\gamma(\alpha + \gamma) + \beta\gamma(\beta + \gamma)$$

$$= \alpha\beta\left(\frac{2}{3} - \gamma\right) + \alpha\gamma\left(\frac{2}{3} - \beta\right) + \beta\gamma\left(\frac{2}{3} - \alpha\right)$$

Problems

16. $3x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ সমীকরণের মূলগুলি $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ হলে $\sum \alpha^2 b$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

$$= \frac{2}{3}\alpha\beta - \alpha\beta\gamma + \frac{2}{3}\alpha\gamma - \alpha\beta\gamma + \frac{2}{3}\beta\gamma - \alpha\beta\gamma$$

$$= \frac{2}{3}(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - 3\alpha\beta\gamma$$

$$= \frac{2}{3} \times 0 - 3(-\frac{1}{3})$$

$$= \frac{2}{3} \times 0 - \cancel{3}(-\frac{1}{\cancel{3}})$$

$$= 0 + 1$$

$$= 1$$

Ans..

Problems

17. $x^3 + qx + r = 0$ **সমীকরণের মূলগুলি** α, β **হলে** $(\beta - \gamma)^2 = \frac{3r - q\alpha}{\alpha}$ **এর মান নির্ণয় কর।**

সমাধান:

এখানে,

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{0}{1} = 0$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{q}{1} = q$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{r}{1} = -r$$

Problems

17. $x^3 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলগুলি α, β হলে $(\beta - \gamma)^2 = \frac{3r - q\alpha}{\alpha}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

প্রদত্ত রাশি $= (\beta - \gamma)^2$

$$= (\beta + \gamma)^2 - 4\beta\gamma$$

$$= (-\alpha)^2 - 4(-\frac{r}{\alpha})$$

$$= \alpha^2 + \frac{4r}{\alpha}$$

$$= \frac{\alpha^3 + 4r}{\alpha} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (i)$$

Problems

17. $x^3 + qx + r = 0$ **সমীকরণের মূলগুলি** α, β **হলে** $(\beta - \gamma)^2 = \frac{3r - q\alpha}{\alpha}$ **এর মান নির্ণয় কর।**

সমাধান: আবার, প্রদত্ত সমীকরণের একটি মূল α ,

$$\therefore \alpha^3 + q\alpha + r = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^3 = -q\alpha - r$$

$$\therefore (\beta - \gamma)^2 = \frac{\alpha^3 + 4r}{\alpha}$$

$$= \frac{-q\alpha - r + 4r}{\alpha}$$

$$= \frac{3r - q\alpha}{\alpha}$$

Proved

Problems

18. $r(1-r)=1$ **এর জটিল মূলদ্বয়** z_1 **ও** z_2 **হলে, প্রমাণ কর যে,** $z_1^3+z_2^3=-2$

সমাধান:

$$\Rightarrow \pi - r^2 = 1$$

$$\Rightarrow -\pi^2 + \pi - 1 = 0$$

$$\Rightarrow -(\pi^2 - \pi + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \pi^2 - \pi + 1 = 0$$

মূলদ্বয় z_1, z_2

$$\therefore z_1 + z_2 = -\frac{-1}{1} = 1$$

$$z_1 z_2 = 1/1 = 1$$

Problems

18. $r(1-r)=1$ এর জটিল মূলদ্বয় z_1 ও z_2 হলে, প্রমাণ কর যে, $z_1^3+z_2^3=-2$

সমাধান:

$L.H.S = z_1^3 + z_2^3$

$= (z_1+z_2)^3 - 3z_1z_2(z_1+z_2)$

$= 1^3 - 3\times 1 \times 1$

$= 1-3$

$= -2$

$= R.H.S$

Proved

বহুপদী ও এর সমীকরণ

নিশ্চায়কঃ দ্বিঘাত বহুপদীর মূলের প্রকৃতি নির্ণয়।

$$ax^2 + bx + c = 0\,;$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- মূলদ্বয় বাস্তব কিনা
- মূলদ্বয় সমান কিনা
- মূলদ্বয় মূলদ কিনা

বাস্তবঃ $b^2 - 4ac > 0$

সমানঃ $b^2 - 4ac = 0$

মূলদঃ $b^2 - 4ac$ পূর্ণবর্গ হতে হবে

$$\sqrt{25} = \sqrt{5^2}$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}$$

$$\frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a}$$

Problems

19. দেখাও যে, $a = b$ না হলে $2x^2 - 2(a+b)x + a^2 + b^2 = 0$ সমীকরণের মূলগুলি বাস্তব হতে পারে না।

সমাধান:

এখানে, নিশ্চায়কঃ $\{-2(a+b)\}^2 - 4 \times 2(a^2+b^2)$

$= 4(a^2 + 2ab + b^2) - 8a^2 - 8b^2$

$= 4a^2 + 8ab + 4b^2 - 8a^2 - 8b^2$

$= 8ab - 4a^2 - 4b^2$

$= -4(a^2 - 2ab + b^2)$

$= -4(a-b)^2$

কেবল $a = b$ হলেই $-4(a-b)^2$ অঋনাত্তক হবে।

$\therefore a = b$ না হলে সমীকরণের মূলগুলি বাস্তব হতে পারে না।

Problems

20. k এর মান কত হলে, $(k+1)x^2 + 2(k+3)x + 2k + 3$ রাশিটি একটি পূর্ণবর্গ হবে?

সমাধান:

রাশিটি একটি পূর্ণবর্গ, $\therefore (k+1)x^2 + 2(k+3)x + 2k + 3 = 0$

সমীকরণের নিশ্চায়ক $= 0$ হবে।

$\Rightarrow \{2(k+3)\}^2 - 4 \times (k+1) \times (2x+3) = 0$

$\Rightarrow 4(k^2 + 2 \times k \times 3 + 3^2) - 4(2k^2 + 3k + 2k + 3) = 0$

$\Rightarrow 4k^2 + 24k + 36 - 8k^2 - 20k - 12 = 0$

$\Rightarrow -4k^2 + 4k + 24 = 0$

$\Rightarrow -4(k^2 - k - 6) = 0$

$\Rightarrow k^2 - k - 6 = 0$

$\Rightarrow k(k-3) + 2(k-3) = 0$

$\Rightarrow (k-3)(k+2) = 0$

$\therefore k = 3, -2$

Ans..

Problems

21. $x^2 + bx + c = 0$ **সমীকরণের মূল দুইটি বাস্তব ও অসমান হলে দেখাও যে,**
$2x^2 - 4(1 + c)x + (b^2 + 2c^2 + 2) = 0$ **সমীকরণের মূল দুইটি জটিল হবে**

সমাধান:

$x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি বাস্তব ও অসমান হলে

নিশ্চায়ক > 0 হবে

$\Rightarrow b^2 - 4 \times 1 \times c > 0$

$\Rightarrow b^2 - 4c > 0$

১ম সমীকরণের মূলদয় বাস্তব ও অসমান হলে,
২য় সমীকরণের মূলদয় জটিল হবে

Problems

21. $x^2 + bx + c = 0$ **সমীকরণের মূল দুইটি বাস্তব ও অসমান হলে দেখাও যে,**
$2x^2 - 4(1+c)x + (b^2 + 2c^2 + 2) = 0$ **সমীকরণের মূল দুইটি জটিল হবে**

সমাধান:

আবার,

$$2x^2 - 4(1+c)x + b^2 + 2c^2 + 2 = 0$$

সমীকরণের নিশ্চায়ক $= \{-4(1+c)\}^2 - 4 \times 2 \times (b^2 + 2c^2 + 2)$।

$$= 16(1 + 2c + c^2) - 8b^2 - 16c^2 - 16$$

$$= 16 + 32c + 16c^2 - 8b^2 - 16c^2 - 16$$

$$= 32c - 8b^2$$

$$= -8(b^2 - 4c) \quad < 0$$

১ম সমীকরণের মূলদয় বাস্তব ও অসমান হলে, ২য় সমীকরণের মূলদয় জটিল হবে

Problems

22. k এর মান কত হলে, $(k-1)x^2-(k+2)x+4=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে?

সমাধান: [ব.০৬ রা.০৮ য.১২; ঢা,দি.১৩]

এখানে, মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হলে,

নিশ্চায়ক $=0$ হবে।

$\Rightarrow \{-(k+2)\}^2-4\cdot(k-1)\cdot 4=0$

$\Rightarrow k^2+2\times \mathrm{k}\times 2+2^2-16k+16=0$

$\Rightarrow k^2-12k+20=0$

$\Rightarrow k^2-10\mathrm{k}-2k+20=0$

$\Rightarrow x(k-10)-2(k-10)=0$

$\Rightarrow (k-10)(k-2)=0$

$\therefore k-10=0$ অথবা, $k-2=0$

$\therefore k=10$ অথবা, $k=2$

Ans..

Problems

23. k এর মান কত হলে, $(3k+1)x^2-(k+11)x+9=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় জটিল হবে?

সমাধান: [বুয়েট' ১১-১২]

এখানে, মূলদ্বয় জটিল হলে, নিশ্চায়ক < 0 হবে।

$\Rightarrow \{-(k+11)\}^2 - 4\times(3k+1)\times 9 < 0$

$\Rightarrow k^2 + 2\times k\times 1 + 11^2 - 108k - 36 < 0$

$\Rightarrow k^2 - 86k + 85 < 0$

$\Rightarrow k^2 - 85k - k + 85 < 0$

$\Rightarrow k(k-85) - 1(k-85) < 0$

$\Rightarrow (k-85)(k-1) < 0$

$\therefore k - 85 < 0$ অথবা, $k - 1 > 0$

$\therefore k < 85$ অথবা, $k > 1$

$\therefore 1 < k < 85$

Ans..

Problems

24. চতুর্ঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ গঠন কর যার দুইটি মূল যথাক্রমে $2, 3$ এবং বাকী মূল $x^2 + 4x + 5 = 0$ সমীকরণ মূল।

সমাধান: [বুয়েট’ ০২-’০৩]

$2, 3$ মূলযুক্ত দ্বিধাত সমীকরণঃ

$$x^2 - (2+3)x + 2 \times 3 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

নির্ণয় চতুর্ঘাত সমীকরণঃ

$$(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 4x + 5) = 0$$

$$\Rightarrow x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 5x^3 - 20x^2 - 25x + 6x^2 + 24x + 30 = 0$$

$$\Rightarrow x^4 - x^3 - 9x^2 - x + 30 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow (\ )(\ )(\ )(\ ) = 0$$

Problems

25. যদি α ও β অসমান হয় এবং $\alpha^2 = 5\alpha - 3$ এবং $\beta^2 = 5\beta - 3$ হয় তবে $\frac{\alpha}{\beta}$ এবং $\frac{\beta}{\alpha}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।

[বুয়েট' ০০-'০১]

সমাধান:

$(i) - (ii)$

$\Rightarrow \alpha^2 - \beta^2 = 5\alpha - 5\beta$

$\Rightarrow (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = 5(\alpha - \beta)$

$\Rightarrow (\alpha + \beta) = 5$

$(i) + (ii)$

$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 5\alpha + 5\beta - 6$

$\Rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 5(\alpha + \beta) - 6$

$\Rightarrow 5^2 - 2\alpha\beta = 5 \times 5 - 6$

$\Rightarrow -2\alpha\beta = 25 - 6 - 25$

$\Rightarrow \alpha\beta = 3$

$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{B}{\alpha}\right)x + \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\beta}{\alpha} = 0$

$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}\right)x + 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 - \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}x + 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 - \frac{5^2 - 2 \times 3}{3}x + 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 - \frac{19}{3}x + 1 = 0$ **Ans..**

Problems

26. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $cx^2 - 2bx + 4a = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়কে α, β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। [চ.০৬ রা'১১ দি.১০]

সমাধান:

এখানে, $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূল α, β

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow b = -a(\alpha + \beta)$ $\quad\Rightarrow c = a\alpha\beta$

আবার $cx^2 - 2bx + 4a = 0$

$\Rightarrow a\alpha\beta x^2 - 2\{-a(\alpha + \beta)\}x + 4a = 0$

$\Rightarrow a\{\alpha\beta x^2 + 2\alpha x + 2\beta x + 4\} = 0$

$\Rightarrow \alpha x(\beta x + 2) + 2(\beta x + 2)\} = 0$

$\Rightarrow (\alpha x + 2)(\beta x + 2) = 0$

$\therefore (\beta x + 2) = 0$

$\Rightarrow x = -\frac{2}{\beta}$

অথবা,

$\therefore (\alpha x + 2) = 0$

$\Rightarrow x = -\frac{2}{\alpha}$

Ans..

Problems

27. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha,\ \beta$ হলে $ac(x^2+1) - (b^2 - 2ac)x = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়কে $\alpha,\ \beta$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। [চ.০৯-১৩; রুয়েট'১২-১৩]

সমাধান:

এখানে,

$ax^2 + bx + c = 0$ এর মূল $\alpha,\ \beta$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \qquad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow b = -a(\alpha+\beta) \qquad \Rightarrow c = a\alpha\beta$$

আবার

$$ac(x^2+1) - (b^2 - 2ac)x = 0$$

$$\Rightarrow acx^2 + ac - b^2x + 2acx = 0$$

$$\Rightarrow acx^2 - b^2x + 2acx + ac = 0$$

$$\Rightarrow a \cdot a\alpha\beta x^2 - \{-a(a+\beta)\}^2 x + 2aa\alpha\beta x + a \cdot a\alpha\beta = 0$$

Problems

27. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $ac(x^2 + 1) - (b^2 - 2ac)x = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়কে α, β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

[চ.০৯-১৩; রুয়েট'১২-১৩]

সমাধান:

$$\Rightarrow a^2\alpha\beta x^2 - a^2(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)x + 2a^2\alpha\beta x + a^2\alpha\beta = 0$$

$$\Rightarrow a^2(\alpha\beta x^2 - \alpha^2 x - 2\alpha\beta x - \beta^2 x + 2\alpha\beta x + \alpha\beta) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha\beta x^2 - \alpha^2 x - \beta^2 x + \alpha\beta = 0$$

$$\Rightarrow \alpha x(\beta x - \alpha) - \beta(\beta x - \alpha) = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha x - \beta)(\beta x - \alpha) = 0$$

$\therefore (\beta x - \alpha) = 0$ অথবা, $\therefore (\alpha x - \beta) = 0$

$\Rightarrow x = \frac{\alpha}{\beta}$ $\Rightarrow x = \frac{\beta}{\alpha}$

Ans..

Problems

28. $x^2-(1+k^2)x+\frac{1}{2}(1+k^2+k^4)=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha,\ \beta$ হলে দেখাও যে, $\alpha^2+\beta^2=k^2$

সমাধান:

এখানে, $$\alpha+\beta=-\frac{-(1+k^2)}{1}=(1+k^2)$$

$$\alpha\beta=\frac{\frac{1}{2}(1+k^2+k^4)}{1}=\frac{1}{2}(1+k^2+k^4)$$

$$L.H.S=\alpha^2+\beta^2$$

$$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

$$=(1+k^2)^2-2\frac{1}{2}(1+k^2+k^4)$$

$$=1+2k^2+k^4-1-k^2-k^4$$

$$=k^2=R.H.S$$

[Proved]

Problems

29. $\frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} = 0$ হলে দেখাও যে, $(h^2 - a^2)x^2 - 2hkx + k^2 - b^2$ রাশিটি পূর্ণবর্গ হবে। [সি.০৪-১০;]

সমাধান:

এখানে, রাশিটি পূর্ণবর্গ হলে $(h^2 - a^2)x^2 - 2hkx + k^2 - b^2 = 0$

সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হবে, অর্থাৎ, নিশ্চায়ক $= 0$ হবে

$$\Rightarrow (-2hk)^2 - 4 \times (h^2 - a^2) \times (k^2 - b^2) = 0$$

$$\Rightarrow 4h^2k^2 - 4(h^2k^2 - h^2b^2 - a^2k^2 + a^2b^2) = 0$$

$$\Rightarrow 4(h^2k^2 - h^2k^2 + h^2b^2 + a^2k^2 - a^2b^2) = 0$$

$$\Rightarrow h^2b^2 + a^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

$$\Rightarrow h^2b^2 + a^2k^2 = a^2b^2$$

$$\Rightarrow \frac{h^2b^2}{a^2b^2} + \frac{a^2k^2}{a^2b^2} =$$

$$\Rightarrow \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} = 1$$

[Proved]

DOWNLOAD THE APP

Problems

10 MINUTE SCHOOL

30. $mx^2 + nx + l = 0$ **সমীকরণের মূল দুইটির অনুপাত** r **হলে দেখাও যে,** $\frac{(r+1)^2}{r} = \frac{n^2}{ml}$

সমাধান:

ধরি, সমীকরণের একটি মূল α, তাহলে অপর মূলটি $r\alpha$

এখানে, $\alpha + r\alpha = -\frac{n}{m}$

$\Rightarrow \alpha(1+r) = -\frac{n}{m}$

$\Rightarrow \alpha = -\frac{n}{m(1+r)}$

এবং,

$\alpha . r\alpha = \frac{l}{m}$

$\Rightarrow \alpha^2 r = \frac{l}{m}$

$\Rightarrow \left\{-\frac{n}{m(1+r)}\right\}^2 r = \frac{l}{m}$

$\Rightarrow \frac{n^2}{m^2(1+r)^2} \times r = \frac{l}{m}$ (m)

$\Rightarrow n^2 r = lm(1+r)^2$

$\Rightarrow n^2 r = lm(1+r)^2$

$\Rightarrow \frac{n^2}{ml} = \frac{(1+r)^2}{r}$

[Proved]

Problems

সাধারণ মূল

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$$

$$a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$$

ধরি, সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূল $= \alpha$

$$a_1\alpha^2 + b_1\alpha + c_1 = 0$$

$$a_2\alpha^2 + b_2\alpha + c_2 = 0$$

বজ্রগুনণ পদ্ধটি হতে পাইঃ

$$\frac{\alpha^2}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{\alpha}{a_2c_1 - a_1c_2} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

১ম ও ২য় অনুপাত হতেঃ $\alpha = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_2c_1 - a_1c_2}$

২য় ও ৩য় অনুপাত হতেঃ $\alpha = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$

$$\therefore \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_2c_1 - a_1c_2} = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$(a_2c_1 - a_1c_2)^2 = (b_1c_2 - b_2c_1)(a_1b_2 - a_2b_1)$$

(২য় ভগ্নাংশের হর)^2 = ১ম ভগ্নাংশের হর × ৩য় ভগ্নাংশের হর

Problems

31. $x^2 + kx - 6k = 0$ এবং $x^2 - 2x - k = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে k এর মান নির্ণয় কর।

[রা.০১,০৭; ব.'০৭; সি.'১]

ধরি, সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূল $= \alpha$

$$\alpha^2 + k\alpha - 6k = 0$$

$$\alpha^2 - 2\alpha - k = 0$$

বজ্রগুনণ পদ্ধটি হতে পাইঃ

$$\frac{\alpha^2}{-k^2 - 12k} = \frac{\alpha}{-6k + k} = \frac{1}{-2 - k}$$

$$\frac{\alpha^2}{-(k^2 + 12k)} = \frac{\alpha}{-5k} = \frac{1}{-(2 + k)}$$

$$\frac{\alpha^2}{(k^2 + 12k)} = \frac{\alpha}{5k} = \frac{1}{(2 + k)}$$

Problems

31. $x^2 + kx - 6k = 0$ এবং $x^2 - 2x - k = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে k এর মান নির্ণয় কর।

[রা.০১,০৭; ব.'০৭; সি.'১]

শর্তানুযায়ী, $(5k)^2 = (k^2 + 12k) \times (2 + k)$

$\Rightarrow 25k^2 = 2k^2 + k^3 + 24k + 12k^2$

$\Rightarrow k^3 + 14k - 25v^2 + 24k = 0$

$\Rightarrow k^3 - 11k^2 + 24k = 0$

$\Rightarrow k(x^2 - 11k + 24) = 0$

$\therefore k = 0$

অথবা, $\therefore k^2 - 11k + 24 = 0$

$\Rightarrow k^2 - 8k - 3k + 24 = 0$

$\Rightarrow (k - 3)(k - 8) = 0$

$\therefore k = 3, 8$

$\therefore k = 0, 3, 8$ **Ans..**

Problems

32. $ax^2 + bx + c = 0$ এবং $cx^2 + bx + a = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে দেখাও যে, $c + a = \pm b$

[দি.’১৩]

ধরি, সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূল $= \alpha$

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$$

$$c\alpha^2 + b\alpha + a = 0$$

বজ্রগুনণ পদ্ধটি হতে পাইঃ

$$\frac{\alpha^2}{ab - bc} = \frac{\alpha}{c^2 - a^2} = \frac{1}{ab - bc}$$

Problems

32. $ax^2 + bx + c = 0$ এবং $cx^2 + bx + a = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে দেখাও যে, $c + a = \pm b$

[দি.'১৩]

শর্তানুযায়ী,

$$(c^2 - a^2)^2 = (ab - bc) \times (ab - bc)$$

$$\Rightarrow (a^2 - c^2)^2 = b(a - c) \,.\, b(a - c)$$

$$\Rightarrow (a + c)^2 \left(a - 1)^2 = b^2(a - 1)^2\right.$$

$$\Rightarrow (a + c)^2 = b^2$$

$$\Rightarrow a + c = \pm b$$

$$\therefore c + a = \pm b$$

[Proved]

Problems

33.দুইটি মূলের যোগফল শূন্য হলে $4x^3 + 16x^2 - 9x - 36 = 0$ সমীকরণটি সমাধান কর। [-কু.'১৩]

ধরি, মূলত্রয় $\alpha, -\alpha, \beta$

মূলগুলোর যোগফলঃ $\alpha - \alpha + \beta = -\frac{16}{4}$

$\therefore \beta = -4$

মূলগুলোর গুণফলঃ $\alpha.(-\alpha).\beta = -\frac{-36}{4}$

$\Rightarrow -\alpha^2.(-4) = 9$

$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{9}{4}$

$\therefore \alpha = \pm\frac{3}{2}$

মূলগুলিঃ $\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -4$

Ans..

Problems

34.দুইটি মূলের অনুপাত $3:4$ হলে $2x^3 - x^2 - 24 = 0$ সমীকরণটি সমাধান কর।

সমাধান:

ধরি, মূলগুলি $3\alpha, 4\alpha, \beta$

মূলগুলির যোগফল $3\alpha + 4\alpha + \beta = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow 7\alpha + \beta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{1}{2} - 7\alpha \ldots\ldots(i)$$

এবং

$$\Rightarrow 3\alpha.4\alpha + 4\alpha.\beta + 3\alpha.\beta = -\frac{22}{2}$$

$$\Rightarrow 12\alpha^2 + 4\alpha\beta + 3\alpha\beta = -11$$

$$\Rightarrow 12\alpha^2 + 7\alpha(\frac{1}{2} - 7\alpha) = -11$$

$$\Rightarrow 12\alpha^2 + \frac{7\alpha}{2} - 79\alpha^2 = -11$$

$$\Rightarrow 12\alpha^2 + \frac{7\alpha}{2} - 79\alpha^2 = -11$$

$$\Rightarrow -37\alpha^2 + \frac{7}{2}\alpha + 11 = 0$$

$$\Rightarrow -2 - 74\alpha^2 + 7\alpha + 22 = 0$$

$$\Rightarrow -(74\alpha^2 - 7\alpha - 22) = 0$$

$$\Rightarrow (74\alpha^2 - 44\alpha + 37\alpha - 22) = 0$$

$$\Rightarrow 2\alpha(37\alpha - 22) + 1(37\alpha - 22) = 0$$

Problems

34.দুইটি মূলের অনুপাত 3: 4 হলে $2x^3 - x^2 - 24 = 0$ সমীকরণটি সমাধান কর।

$$\Rightarrow (37\alpha - 22)(2\alpha + 1) = 0$$

$\therefore 37\alpha - 22 = 0$ অথবা, $2\alpha + 1 = 0$

$$\Rightarrow 37\alpha + 22 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{22}{37}$$

$$\Rightarrow 2\alpha = -1$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{1}{2} - 7\alpha \ldots \ldots (i)$$

$\alpha = \frac{22}{37}$ হলে, $\Rightarrow \beta = \frac{1}{2} - 7 \times \frac{22}{37} = -\frac{271}{74}$

$\alpha = -\frac{1}{2}$ হলে, $\Rightarrow \beta = \frac{1}{2} - 7 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4$

Problems

34.দুইটি মূলের অনুপাত $3:4$ হলে $2x^3 - x^2 - 24 = 0$ সমীকরণটি সমাধান কর।

আবার, মূলগুলির গুণফল, $= -\frac{-24}{2} = 12 > 0$

$\alpha = \frac{22}{37}$ হলে, $(3\alpha)(4\alpha)(\beta) = \left(3 \times \frac{22}{37}\right).\left(4 \times \frac{22}{37}\right).\left(\frac{-271}{74}\right) < 0$

$\therefore \alpha = \frac{22}{37}$ গ্রহণযোগ্য নয় ।

$\alpha = -\frac{1}{2}$ হলে, $(3\alpha)(4\alpha)(\beta) = \left(3 \times -\frac{1}{2}\right).\left(4 \times -\frac{1}{2}\right).4 < 0$

$= 12$

$\therefore$ নির্ণয় মূলগুলিঃ $-\frac{3}{2}, -2, 4$

Ans.

Problems

35. $3x^3 - 26x^2 + 52x - 24 = 0$ সমীকরণের মূলগুলি গুণোত্তর শ্রেনীযুক্ত হলে, সমীকরণটি সমাধান কর।

গুণোত্তর শ্রেনীযুক্তঃ

ত্রিঘাতঃ ar^{-1}, a, ar

চতুর্ঘাতঃ $ar^{-3}, ar^{-1}, ar, ar^3$

সমান্তর শ্রেনীযুক্তঃ

ত্রিঘাতঃ $a - d, a, a + d$

চতুর্ঘাতঃ $a - 3d, a - d, a + d, a + 3d$

সমাধান:

ধরি, মূলগুলি ar^{-1}, a, ar

আবার, মূলগুলির গুণফল, $ar^{-1} . a . ar = -\frac{-24}{3}$

$a^3 = 8 = 2^3$

$a = 2$

Problems

35. $3x^3 - 26x^2 + 52x - 24 = 0$ **সমীকরণের মূলগুলি গুণোত্তর শ্রেনীযুক্ত হলে, সমীকরণটি সমাধান কর।**

মূলগুলির যোগফলঃ $\frac{a}{r} + a + ar = -\frac{-26}{3}$

$\Rightarrow \frac{2}{r} + 2 + 2r = \frac{26}{3}$

$\Rightarrow \frac{2 + 2r + 2r^2}{r} = \frac{26}{3}$

$\Rightarrow 6 + 6r + 6r^2 = 26r$

$\Rightarrow 6r^2 - 20r + 6 = 0$

$\Rightarrow 2(3r^2 - 10r + 3) = 0$

$\Rightarrow 3r^2 - 10r + 3 = 0$

$\Rightarrow 3r(r-3) - 1(r-3) = 0$

$\Rightarrow (r-3)(3r-1) = 0 \quad \therefore r = 3, \frac{1}{3}$

$r = \frac{1}{3}$ হলে,

$\frac{a}{r} = \frac{2}{\frac{1}{3}} = 6$

$ar = 2 \times \frac{1}{3} = 2/3$

আবার, $r = 3$ হলে,

$\frac{a}{r} = \frac{2}{3}$

এবং $ar = 2 \times 3 = 6$

$\therefore$ নির্ণয় মূলগুলিঃ $\frac{2}{3}, 2, 6$ **Ans.**

Problems

36. $32x^3 - 48x^2 + 22x - 3 = 0$ **সমীকরণের মূলগুলি সমান্তর শ্রেনীযুক্ত হলে, সমীকরণটি সমাধান কর।**

ধরি, মূলগুলি $a - d\ , a, a + d$

মূলগুলির যোগফল $a - d + a + a + d = -\frac{-48}{32}$ (48 ও 32 কেটে 3 ও 2)

$$3a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

আবার, মূলগুলির গুণফল, $(a - d).a.(a + d) = -\frac{-3}{32}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} - d\right).\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2} + d\right) = \frac{3}{32}$$ (2 ও 32 কেটে 16)

$$\Rightarrow \frac{1}{4} - d^2 = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{3}{10} = d^2$$

$$\Rightarrow d^2 = \frac{4-3}{16} = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow d^2 = \pm\frac{1}{4}$$

Problems

36. $32x^3 - 48x^2 + 22x - 3 = 0$ **সমীকরণের মূলগুলি সমান্তর শ্রেনীযুক্ত হলে, সমীকরণটি সমাধান কর।**

$d = \frac{1}{4}$ হলে, $a - d = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$a + d = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$d = -\frac{1}{4}$ হলে, $a - d = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$a + d = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

Problems

36. $32x^3 - 48x^2 + 22x - 3 = 0$ **সমীকরণের মূলগুলি সমান্তর শ্রেনীযুক্ত হলে, সমীকরণটি সমাধান কর।**

$$\Rightarrow a^2\alpha\beta x^2 - a^2(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)x + 2a^2\alpha\beta x + a^2\alpha\beta = 0$$

$$\Rightarrow a^2(\alpha\beta x^2 - \alpha^2 x - 2\alpha\beta x - \beta^2 x + 2\alpha\beta x + \alpha\beta) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha\beta x^2 - \alpha^2 x - \beta^2 x + \alpha\beta = 0$$

$$\Rightarrow \alpha x(\beta x - \alpha) - \beta(\beta x - \alpha) = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha x - \beta)(\beta x - \alpha) = 0$$

$\therefore (\beta x - \alpha) = 0$ অথবা, $\therefore (\alpha x - \beta) = 0$

$\Rightarrow x = \frac{\alpha}{\beta}$ $\Rightarrow x = \frac{\beta}{\alpha}$

Ans.

Problems

37. $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0$ **সমীকরণটির একটি মূল $1 + i$ হলে অপর মূলগুলো নির্ণয় কর।**

সমাধানঃ

একটি মূল $1 + i$

$\therefore$ অপর মূল $1 - i$ [জটিল মূলগুলো অনুবন্ধী আকারে থাকে]

$1 + i$ ও $1 - i$ মূলযুক্ত দ্বিঘাত সমীকরণঃ

$$x^2 - (1 + i + 1 - i)x + (1 + i)(1 - i) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + (1^2 - i^2) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + (1 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$$

প্রদত্ত সমীকরণঃ

$$x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x^3 + 6x^2 - 6x + 2x^2 - 4x + 4 = 0$$

Problems

37. $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0$ **সমীকরণটির একটি মূল $1 + i$ হলে অপর মূলগুলো নির্ণয় কর।**

$$\Rightarrow x^2 (x^2 - 2x + 2) - 3x + (x^2 - 2x + 2) + 2(x^2 - 2x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 3x + 2) = 0$$

হয়, $x^2 - 2x + 2 = 0$

$\therefore x = 1 + i$ বা

$x = 1 - i$

অথবা, $(x^2 - 3x + 2) = 0$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 2) - 1(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = 1, 2$$

$\therefore$ নির্ণেয় মূলগুলো- $(1 - i)$, 1, ও 2 **Ans:**

Problems

38. $8x^4 - 2x^3 - 27x^2 + 6x + 9 = 0$ সমীকরণটির যেকোন দুটি মূলের যোগফল ০ হলে , সমীকরণটির অপর দুটি মূলের মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

ধরি,

মূলগুলো যথাক্রমে $\alpha, -\alpha,\ \beta$ এবং γ

মূলগুলোর যোগফলঃ $\alpha - \alpha + \beta + \gamma = -\frac{-2}{8} = \frac{1}{4}$ $\quad \therefore \beta + \gamma = \frac{1}{4}$

এবং $\alpha(-\alpha)\beta + \alpha\beta\gamma + (-\alpha)\beta\gamma + (-\alpha)\alpha\gamma = \frac{-6}{8}$

$\Rightarrow -\alpha^2\beta + \alpha\beta\gamma - \alpha\beta\gamma - \alpha^2\gamma = \frac{-3}{4}$

$\Rightarrow -\alpha^2(\beta + \gamma) = \frac{-3}{4}$

$\Rightarrow \alpha^2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \alpha^2 = 3 \qquad \therefore \alpha = \pm\sqrt{3}$

আবার,

$\alpha(-\alpha)\beta\gamma = \frac{9}{8}$

$\Rightarrow -\alpha^2\beta\gamma = \frac{9}{8}$

$\Rightarrow -3\beta\gamma = \frac{9}{8}$ $\quad [\alpha^2 = 3]$

$\Rightarrow \beta\gamma = \frac{-3}{8}$

Problems

38. $8x^4 - 2x^3 - 27x^2 + 6x + 9 = 0$ **সমীকরণটির যেকোন দুটি মূলের যোগফল ০ হলে , সমীকরণটির অপর দুটি মূলের মান নির্ণয় কর।**

আমরা জানি,

$$\beta - \gamma = \sqrt{(\beta+\gamma)^2 - 4\beta\gamma}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 4\left(-\frac{3}{8}\right)} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{2}} = \frac{5}{4}$$

$$\beta + \gamma = \frac{1}{4}$$

$$\beta - \gamma = \frac{5}{4}$$

$$2\beta = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \beta = \frac{3}{4}$$

এবং

$$\gamma = \frac{1}{4} - \beta = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{-1}{2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $\beta = \frac{3}{4}, \gamma = -\frac{1}{2}$

Problems

38. $8x^4 - 2x^3 - 27x^2 + 6x + 9 = 0$ **সমীকরণটির যেকোন দুটি মূলের যোগফল ০ হলে , সমীকরণটির অপর দুটি মূলের মান নির্ণয় কর।**

ব্যতিক্রম নিয়মঃ

[$\beta\gamma$ এর মান নির্ণয়ের পর থেকে]

β ও γ মূল বিশিষ্ট সমীকরণঃ

$$x^2 - (\beta + \gamma)x + \beta\gamma = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{1}{4}x + \left(-\frac{3}{8}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 8x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 8x^2 - 6x + 4x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2x(4x - 3) + 1(4x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow (4x - 3)(2x + 1) = 0$$

হয়, $4x - 3 = 0$ অথবা, $2x + 1 = 0$

$\therefore x = \frac{3}{4}$ $\therefore x = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $\beta = \frac{3}{4}, \gamma = -\frac{1}{2}$

Problems

39. $a\tan\theta + bsec\theta = c$ **সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে প্রমাণ কর যে,**

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{2ca}{a^2-c^2}$$

সমাধানঃ

এখানে,

$$a\tan\theta + bsec\theta = c$$

$$\Rightarrow (\text{a}\tan\theta - c)^2 = (-\text{b}\sec\theta)^2$$

$$\Rightarrow \text{a}^2\tan^2\theta - 2ac\tan\theta + c^2 = b^2\sec^2\theta$$

$$\Rightarrow \text{a}^2\tan^2\theta - 2ac\tan\theta + c^2 = b^2(1+\tan^2\theta)$$

$$\Rightarrow \text{a}^2\tan^2\theta - 2ac\tan\theta + c^2 = b^2 + b^2\tan^2\theta$$

$$\Rightarrow (\text{a}^2 - \text{b}^2)\tan^2\theta - 2ac\tan\theta + c^2 - b^2 = 0$$

Problems

39. $a\tan\theta + b\sec\theta = c$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে প্রমাণ কর যে,

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{2ca}{a^2-c^2}$$

সমাধানঃ

$$\tan\alpha + \tan\beta = -\frac{-2ac}{a^2-b^2} = \frac{2ac}{a^2-b^2}$$

এবং $\tan\alpha.\tan\beta = -\frac{c^2-b^2}{a^2-b^2}$

$$L.S = \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta} = \frac{\frac{2ac}{a^2-b^2}}{1-\frac{c^2-b^2}{a^2-b^2}} = \frac{\frac{2ac}{a^2-b^2}}{\frac{a^2-b^2-c^2+b^2}{a^2-b^2}} = \frac{2ac}{a^2-c^2} = R.S$$

(প্রমাণিত)

Problems

40.দুজন ছাত্রকে একটি দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান করতে বলা হলো। একজন ছাত্র সমীকরণে x এর সহগটি ভুল লিখে 2 এবং 6 এই দুইটি বীজ পেল। অপর ছাত্র ধ্রুবক পদটি ভুল লিখে 2 এবং -9 বীজ দুটি পেল। নির্ভুল সমীকরণের বীজগুলো নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

ধরি,

সমীকরণটি, $ax^2 + bx + c = 0$

১ম ছাত্রের ক্ষেত্রে, $ax^2 + b_1x + c = 0 \quad [x = 2, 6]$

এখন,

2 ও 6 মূলকযুক্ত সমীকরণঃ

$$x^2 - (2+6)x + 2.6 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \qquad \therefore a = 1, \qquad c = 12$$

Problems

40.দুজন ছাত্রকে একটি দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান করতে বলা হলো। একজন ছাত্র সমীকরণে x এর সহগটি ভুল লিখে 2 এবং 6 এই দুইটি বীজ পেল। অপর ছাত্র ধ্রুবক পদটি ভুল লিখে 2 এবং -9 বীজ দুটি পেল। নির্ভুল সমীকরণের বীজগুলো নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

২য় ছাত্রের ক্ষেত্রে, $ax^2 + b_1x + c = 0 \quad [x = 2, -9]$

2 ও -9 মূলকযুক্ত সমীকরণঃ

$x^2 - (2 - 9)x + 2.(-9) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 7x - 18 = 0$

$\therefore a = 1, \qquad b = 7$

নির্ভুল সমীকরণঃ

$x^2 - (2 - 9)x + 2.(-9) = 0$

$\Rightarrow x^2 + 7x + 12 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 4x + 3x + 12 = 0$

$\Rightarrow x(x + 4) + 3(x + 4) = 0$

$\Rightarrow (x + 4)(x + 3) = 0$

Problems

40.দুজন ছাত্রকে একটি দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান করতে বলা হলো। একজন ছাত্র সমীকরণে x এর সহগটি ভুল লিখে 2 এবং 6 এই দুইটি বীজ পেল। অপর ছাত্র ধ্রুবক পদটি ভুল লিখে 2 এবং -9 বীজ দুটি পেল। নির্ভুল সমীকরণের বীজগুলো নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

হয়, $(x+4)=0$ অথবা, $(x-3)=0$

$\therefore x=-4$ $\therefore x=3$

$\therefore$নির্ণেয় মান, $x=-4,3$

CQ

প্রশ্ন-০১: $F(x) = 27x^2 + 6x - (m+2)$, $P(x) = rx^2 - 2nx + 4m$ এবং $Q(x) = mx^2 + nx + r$ [ঢা. বো.- ১৯]

ক) $(2 + 2\sqrt{3}\,i)$ মূল বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর।

খ) $F(x) = 0$ সমীকরণটির একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হলে , m এর মান নির্ণয় কর।

গ) $P(x) = 0$ এবং $Q(x) = 0$ সমীকরণ দুটির একটি সাধারণ মূল থাকলে প্রমাণ কর যে , $(2m - r)^2 + 2n^2 = 0$ অথবা $2m + r = 0$

CQ

ক) $(2 + 2\sqrt{3}\, i)$ মূল বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

ধরি,

$$x = 2 + 2\sqrt{3}\, i$$

$$\Rightarrow (x - 2)^2 = \left(2\sqrt{3}\, i\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = -(4 \times 3) = -12$$

$$\therefore x^2 - 4x + 16 = 0 \textbf{ (Ans)}$$

CQ

প্রশ্ন-০১: $F(x) = 27x^2 + 6x - (m + 2)$, $P(x) = rx^2 - 2nx + 4m$

এবং $Q(x) = mx^2 + nx + r$ [ঢা. বো.- ১৯]

খ) $F(x) = 0$ সমীকরণটির একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হলে , m এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি,

মূলদ্বয় যথাক্রমে α ও α^2

মূলদ্বয়ের যোগফল,

$$\alpha + \alpha^2 = -\frac{6}{27} = -\frac{2}{9}$$

$$\Longrightarrow 9\alpha^2 + 9\alpha = -2$$

$$\Longrightarrow 9\alpha^2 + 9\alpha + 2 = 0$$

$$\Longrightarrow 9\alpha^2 + 6\alpha + 3\alpha + 2 = 0$$

CQ

প্রশ্ন-০১: $F(x) = 27x^2 + 6x - (m+2)$, $P(x) = rx^2 - 2nx + 4m$
এবং $Q(x) = mx^2 + nx + r$ [ঢা. বো.- ১৯]

খ) $F(x) = 0$ সমীকরণটির একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হলে , m এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

$$\Rightarrow 3\alpha(3\alpha + 2) + 1(3\alpha + 2) = 0$$

$$\Rightarrow (3\alpha + 2)(3\alpha + 1) = 0$$

হয়, $(3\alpha + 2) = 0$ অথবা, $(3\alpha + 1) = 0$

$\therefore \alpha = -\frac{2}{3}$ $\therefore \alpha = -\frac{1}{3}$

এবং $\alpha . \alpha^2 = \frac{-(m+2)}{27}$

CQ

প্রশ্ন-০১: $F(x) = 27x^2 + 6x - (m+2)$, $P(x) = rx^2 - 2nx + 4m$
এবং $Q(x) = mx^2 + nx + r$ [ঢা. বো.- ১৯]

খ) $F(x) = 0$ সমীকরণটির একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হলে , m এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

$$\Rightarrow 27\alpha^3 = -m - 2 \quad \therefore m = -(27\alpha^3 + 2)$$

$$\alpha = -\frac{1}{3} \text{ হলে, } m = -\left\{27\left(\frac{-1}{3}\right)^3 + 2\right\} = -1$$

$$\alpha = -\frac{2}{3} \text{ হলে, } m = -\left\{27\left(\frac{-2}{3}\right)^3 + 2\right\} = 6$$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $m = -1, 6$

CQ

প্রশ্ন-০১: $F(x) = 27x^2 + 6x - (m+2)$, $P(x) = rx^2 - 2nx + 4m$

এবং $Q(x) = mx^2 + nx + r$ [ঢা. বো.- ১৯]

গ) $P(x) = 0$ এবং $Q(x) = 0$ সমীকরণ দুটির একটি সাধারণ মূল থাকলে প্রমাণ কর যে ,

$(2m - r)^2 + 2n^2 = 0$ অথবা $2m + r = 0$

সমাধানঃ

$P(x) = 0$

$\Longrightarrow rx^2 - 2nx + 4m = 0$

$Q(x) = 0$

$\Longrightarrow mx^2 + nx + r = 0$

ধরি,

সাধারণ মূল α

$r\alpha^2 - 2n\alpha + 4m = 0$

$m\alpha^2 + n\alpha + r = 0$

CQ

প্রশ্ন-০১: $F(x) = 27x^2 + 6x - (m + 2)$, $P(x) = rx^2 - 2nx + 4m$ এবং $Q(x) = mx^2 + nx + r$ [ঢা. বো.- ১৯]

গ) $P(x) = 0$ এবং $Q(x) = 0$ সমীকরণ দুটির একটি সাধারণ মূল থাকলে প্রমাণ কর যে, $(2m - r)^2 + 2n^2 = 0$ অথবা $2m + r = 0$

সমাধানঃ

বজ্রগুণন পদ্ধতিতে পাই,

$$\frac{\alpha^2}{-2nr - 4mn} = \frac{\alpha}{4m^2 - r^2} = \frac{1}{nr + 2mn}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2}{-2n(r + 2n)} = \frac{\alpha}{(2m + r)(2m - r)} = \frac{1}{n(2m + r)}$$

CQ

প্রশ্ন-০১: $F(x) = 27x^2 + 6x - (m+2)$, $P(x) = rx^2 - 2nx + 4m$

এবং $Q(x) = mx^2 + nx + r$ [ঢা. বো.- ১৯]

গ) $P(x) = 0$ এবং $Q(x) = 0$ সমীকরণ দুটির একটি সাধারণ মূল থাকলে প্রমাণ কর যে ,

$(2m - r)^2 + 2n^2 = 0$ অথবা $2m + r = 0$

সমাধানঃ

শর্তানুযায়ী,

$$(4m^2 - r^2) = (-2nr - 4mn)(nr + 2mn)$$

$$\Rightarrow \{(2m + r)(2m - r)\}^2 = -2n(2m + r).n.(2m + r)$$

$$\Rightarrow (2m + r)^2\ (2m - r)^2 = -2n^2(2m + r)^2$$

$$\Rightarrow (2m + r)^2\ (2m - r)^2 + 2n^2(2m + r)^2 = 0$$

CQ

প্রশ্ন-০১: $F(x) = 27x^2 + 6x - (m+2)$, $P(x) = rx^2 - 2nx + 4m$
এবং $Q(x) = mx^2 + nx + r$ [ঢা. বো.- ১৯]

গ) $P(x) = 0$ এবং $Q(x) = 0$ সমীকরণ দুটির একটি সাধারণ মূল থাকলে প্রমাণ কর যে,
$(2m - r)^2 + 2n^2 = 0$ অথবা $2m + r = 0$

সমাধানঃ

$$\Rightarrow (2m + r)^2 \{(2m - r)^2 + 2n^2\} = 0$$

$\therefore 2m + r = 0$ অথবা, $(2m - r)^2 + 2n^2 = 0$

(প্রমাণিত)

CQ

প্রশ্ন-০২: $qx^2 + px + q = 0$, $q \neq 0$ এবং $2x^3 - 9x^2 + 14x - 5 = 0$ এর একটি মূল $2 - i$

[য. বো.- ১৯]

ক) $x^2 - 2mx + 8m - 15 = 0$ এর মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান m এর মান কত ?

খ) দেখাও যে, $qx^2 + px + 1 = 0$ এর মূলদ্বয় $\frac{1}{u}$ এবং $\frac{1}{v}$

গ) উদ্দীপকের দ্বিতীয় সমীকরণের বাস্তব মূল এবং $\frac{1}{4}$ মূলবিশিষ্ট একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর।

CQ

ক) $x^2 - 2mx + 8m - 15 = 0$ এর মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান m এর মান কত ?

সমাধানঃ

দেওয়া আছে,

$$x^2 - 2mx + 8m - 15 = 0$$

মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হলে, নিশ্চায়ক $= 0$

$$\Rightarrow (-2m)^2 - 4.1.(8m - 15) = 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 4(8m - 15) = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 8m + 15 = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 5m - 3m + 15 = 0$$

$$\Rightarrow m(m - 5) - 3(m - 5) = 0$$

$$\Rightarrow (m - 5)(m - 3) = 0$$

হয়, $(m - 5) = 0$ অথবা, $(m - 3) = 0$

$\therefore m = 5$ $\therefore m = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $m = 3 , 5$

CQ

প্রশ্ন-০২: $qx^2 + px + q = 0$, $q \neq 0$ এবং $2x^3 - 9x^2 + 14x - 5 = 0$ এর একটি মূল $2 - i$

খ) দেখাও যে, $qx^2 + px + 1 = 0$ এর মূলদ্বয় $\frac{1}{u}$ এবং $\frac{1}{v}$

সমাধানঃ

ধরি, মূলদ্বয় যথাক্রমে u ও v

$\therefore u + v = -\frac{p}{1} = p$ এবং $uv = \frac{q}{1} = q$

এখন, $\frac{1}{u}$ ও $\frac{1}{v}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণঃ

$$x^2 - \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right)x + \frac{1}{u}.\frac{1}{v} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{-p}{q}x + \frac{1}{q} = 0$$

$$\Rightarrow qx^2 + px + 1 = 0$$

সুতরাং, $qx^2 + px + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\frac{1}{u}$ ও $\frac{1}{v}$ **(দেখানো হলো)**

CQ

প্রশ্ন-০২: $qx^2 + px + q = 0$, $q \neq 0$ এবং $2x^3 - 9x^2 + 14x - 5 = 0$ এর একটি মূল $2 - i$

গ) উদ্দীপকের দ্বিতীয় সমীকরণের বাস্তব মূল এবং $\frac{1}{4}$ মূলবিশিষ্ট একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

$2x^3 - 9x^2 + 14x - 5 = 0$ সমীকরণটির একটি মূল $2 - i$ হলে

$\therefore$ অপর মূল $2 + i$

$\therefore$ $2 + i$ ও $2 - i$ মূল বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ

$$x^2 - (2 + i + 2 - i)x + (2 + i)(2 - i) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 2^2 - i^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0$$

$\therefore$ $x^2 - 4x + 5 = 0$, $2x^3 - 9x^2 + 14x - 5 = 0$ সমীকরণের একটি উৎপাদক

CQ

প্রশ্ন-০২: $qx^2 + px + q = 0$, $q \neq 0$ এবং $2x^3 - 9x^2 + 14x - 5 = 0$ এর একটি মূল $2 - i$

গ) উদ্দীপকের দ্বিতীয় সমীকরণের বাস্তব মূল এবং $\frac{1}{4}$ মূলবিশিষ্ট একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

$$2x^3 - 9x^2 + 14x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^3 - 8x^2 + 10x - x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow 2x(x^2 - 4x + 5) - 1(x^2 - 4x + 5) = 0$$

$$\Rightarrow (2x - 1)(x^2 - 4x + 5) = 0$$

$$\Rightarrow (2x - 1)(x^2 - 4x + 5) = 0$$

হয়, $2x - 1 = 0$ অথবা, $x^2 - 4x + 5 = 0$

$$\therefore x = \frac{1}{5}$$

DOWNLOAD THE APP

CQ

10 MINUTE SCHOOL

প্রশ্ন-০২: $qx^2 + px + q = 0$, $q \neq 0$ এবং $2x^3 - 9x^2 + 14x - 5 = 0$ এর একটি মূল $2 - i$

গ) উদ্দীপকের দ্বিতীয় সমীকরণের বাস্তব মূল এবং $\frac{1}{4}$ মূলবিশিষ্ট একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

প্রদত্ত সমীকরণের বাস্তব মূল $\frac{1}{2}$

এখন, $\frac{1}{2}$ ও $\frac{1}{4}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণঃ

$$x^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)x + \frac{1}{2}.\frac{1}{4} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0$$

$$\therefore 8x^2 - 6x + 1 = 0$$

$\therefore$ নির্ণেয় দ্বিঘাত সমীকরণ, $8x^2 - 6x + 1 = 0$

CQ

প্রশ্ন-০৩: $\varphi(x) = lx^2 + mx + n$

[সি. বো.- ১৯]

ক) $x^3 + x^2 + 4x + 4 = 0$ সমীকরণের একটি মূল $2i$ হলে সমীকরণটি সমাধান কর।

খ) $\varphi(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $a\,,b$ হলে $nl(x^2+1) = (2nl - m^2)x = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়কে a, b এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

CQ

ক) $x^3 + x^2 + 4x + 4 = 0$ সমীকরণের একটি মূল $2i$ হলে সমীকরণটি সমাধান কর।

সমাধানঃ

$x^3 + x^2 + 4x + 4 = 0$ সমীকরণটির একটি মূল $2i$ হলে

$\therefore$ অপর মূল $-2i$

$\therefore$ $2i$ ও $-2i$ মূল বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ

$(x + 2i)(x - 2i) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4i^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 4 = 0$

$x^3 + x^2 + 4x + 4 = 0$

$\Rightarrow x^3 + 4x + x^2 + 4 = 0$

$\Rightarrow x(x^2 + 4) + 1(x^2 + 4) = 0$

$\Rightarrow (x^2 + 4)(x + 1) = 0$

হয়, $(x^2 + 4) = 0$ অথবা, $(x + 1) = 0$

$\therefore x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2$ $\therefore x = -1$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $x = -1, \pm 2i$

CQ

প্রশ্ন-০৩: $\varphi(x) = lx^2 + mx + n$

খ) $\varphi(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় a, b হলে $nl(x^2+1) = (2nl - m^2)x = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়কে a, b এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

সমাধানঃ

ধরি,

মূলদ্বয় যথাক্রমে a ও b

$\therefore a + b = -\frac{m}{l}$ এবং $ab = \frac{n}{l}$

এখন, $nl(x^2+1) + (2nl - m^2)x = 0$

$$\frac{n}{l}(x^2+1) + \left(\frac{2n}{l} - \frac{m^2}{l^2}\right)x = 0$$

$$\Rightarrow ab(x^2+1) + \{2ab - (a+b)^2\}x = 0$$

$$\Rightarrow ab(x^2+1) + (a^2+b^2)x = 0$$

$$\Rightarrow abx^2 + ab - a^2x - b^2x = 0$$

$$\Rightarrow abx^2 - a^2x - b^2x + ab = 0$$

$$\Rightarrow ax(bx - a) - b(bx - a) = 0$$

$$\Rightarrow (bx - a)(ax - b) = 0$$

CQ

প্রশ্ন-০৩: $\varphi(x) = lx^2 + mx + n$

খ) $\varphi(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় a, b হলে $nl(x^2 + 1) = (2nl - m^2)x = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়কে a, b এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

সমাধানঃ

হয়, $(bx - a) = 0$

$\therefore x = \frac{a}{b}$

অথবা, $(ax - b) = 0$

$\therefore x = \frac{b}{a}$

$$\therefore x = \frac{a}{b}, \frac{b}{a}$$

CQ

প্রশ্ন-০৪: $P(x) = mx^3 + nx^2 + qx + r = 0$

[দি. বো.- ১৯]

ক) $m = 0$, এবং $n = q = r = 1$ হলে , $P(x) = 0$ সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর।

খ) $P(x) = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে $\sum \alpha^3$ নির্ণয় কর।

গ) এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদ্বয় যথাক্রমে $P(x) = 0$ সমীকরণের মূল দুটির সমষ্টি ও অন্তরফলের পরমমান হবে, যেখানে, $m = 0, n = 2, q = 1, r = -1$

CQ

প্রশ্ন-০৪: $P(x) = mx^3 + nx^2 + qx + r = 0$

ক) $m = 0$, এবং $n = q = r = 1$ হলে , $P(x) = 0$ সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

$$P(x) = mx^3 + nx^2 + qx + r = 0$$

$m = 0$, এবং $n = q = r = 1$

$0 + x^2 + x + 1 = 0$ [মান বসিয়ে]

$\Rightarrow x^2 + x + 1 = 0$

নিশ্চায়ক $= b^2 - 4ac = 1^2 - 4.1.1 = -3$

যেহেতু নিশ্চায়ক ঋণাত্মক

মূলদ্বয় অবাস্তব ও অসমান।

CQ

প্রশ্ন-০৪: $P(x) = mx^3 + nx^2 + qx + r = 0$

খ) $P(x) = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে $\sum \alpha^3$ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

$P(x) = mx^3 + nx^2 + qx + r = 0$ সমীকরণটির মূলত্রয় α, β, γ হলে,

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{n}{m} \quad , \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{q}{m} \quad , \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{r}{m}$$

$$\sum \alpha^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$$

$$= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma + 3\alpha\beta\gamma$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)\{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha)\} + 3\alpha\beta\gamma$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)\{(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} + 3\alpha\beta\gamma$$

CQ

প্রশ্ন-০৪: $P(x) = mx^3 + nx^2 + qx + r = 0$

খ) $P(x) = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে $\sum \alpha^3$ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

$$= (\alpha + \beta + \gamma)\{(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} + 3\alpha\beta\gamma$$

$$= -\frac{n}{m}\left(\frac{n^2}{m^2} - \frac{3q}{m}\right) + \left(-\frac{3r}{m}\right) = -\frac{n^3}{m^3} + \frac{3qn}{m^2} - \frac{3r}{m}$$

$$= \frac{-n^3 + 3mnq - 3m^2r}{m^3} = \frac{3mnq - 3m^2r - n^3}{m^3}$$

$$\therefore \sum \alpha^3 = \frac{3mnq - 3m^2r - n^3}{m^3}$$

CQ

প্রশ্ন-০৪: $P(x) = mx^3 + nx^2 + qx + r = 0$

গ) এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদ্বয় যথাক্রমে $P(x) = 0$ সমীকরণের মূল দুটির সমষ্টি ও অন্তরফলের পরমমান হবে, যেখানে, $m = 0, n = 2, q = 1, r = -1$

সমাধানঃ

$$P(x) = mx^3 + nx^2 + qx + r = 0$$

$m = 0,$ এবং $n = 2,\ q = 1, r = -1$

$0 + 2x^2 + x - 1 = 0$ [মান বসিয়ে]

$\therefore 2x^2 + x - 1 = 0$

ধরি,

মূলদ্বয় যথাক্রমে α ও β

$\therefore \alpha + \beta = -\frac{1}{2}$ এবং $\alpha\beta = -\frac{1}{2}$

নির্ণেয় সমীকরণদ্বয়ের মূলদ্বয় $(\alpha + \beta)$,$|\alpha - \beta|$

$$\therefore (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \frac{1}{4} - 4\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \alpha - \beta = \pm\frac{3}{2}$$

DOWNLOAD THE APP

CQ

10 MINUTE SCHOOL

প্রশ্ন-০৪: $\mathrm{P(x) = mx^3 + nx^2 + qx + r = 0}$

গ) এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদ্বয় যথাক্রমে $P(x) = 0$ সমীকরণের মূল দুটির সমষ্টি ও অন্তরফলের পরমমান হবে, যেখানে, $m = 0, n = 2, q = 1, r = -1$

সমাধানঃ

$$\therefore |\alpha - \beta| = \frac{3}{2}$$

নির্ণেয় সমীকরণঃ $x^2 - \{(\alpha + \beta) + |\alpha - \beta|\}x + (\alpha = \beta).|\alpha + \beta| = 0$

$$\Rightarrow x^2 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)x + \left(-\frac{1}{2}\right).\frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x - \frac{3}{4} = 0 \qquad \Rightarrow 4x^2 - 4x - 3 = 0$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $4x^2 - 4x - 3 = 0$

DOWNLOAD THE APP

MCQ

10 MINUTE SCHOOL

1. $5 - 3x - x^2$ এর সর্বোচ্চ মান কোনটি ?

a) 3　　b) 5　　c) $\frac{47}{4}$　　d) $\frac{29}{4}$

ব্যাখ্যাঃ

সর্বোচ্চ/সর্বনিম্ন মান,

$$c - \frac{b^2}{4a} = 5 - \frac{(-3)^2}{4(-1)} = 5 + \frac{9}{4} = \frac{29}{4}$$

2. $5 + 3x - x^2$ এর সর্বোচ্চ মান কোনটি ?

a) 3　　b) 5　　c) $\frac{47}{4}$　　d) $\frac{29}{4}$

ব্যাখ্যাঃ

সর্বোচ্চ/সর্বনিম্ন মান,

$$c - \frac{b^2}{4a} = 5 - \frac{3^2}{4(-1)} = 5 + \frac{9}{4} = \frac{29}{4}$$

MCQ

3. $x^2 - 7x + 12 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে $\alpha + \beta$ এবং $\alpha\beta$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ-

a) $x^2 - 19x + 84 = 0$ ✓

b) $x^2 + 14x - 144 = 0$

c) $x^2 - 14x + 144 = 0$

d) $x^2 + 19x - 84 = 0$

ব্যাখ্যাঃ

$\alpha + \beta \rightarrow p$ এবং $\alpha\beta \rightarrow q$ ধরে

$\alpha + \beta = 7$ এবং $\alpha\beta = 12$

$x^2 - (7 + 12)x + 7 \times 12 = 0$

$\therefore x^2 - 19x + 84 = 0$

DOWNLOAD THE APP

MCQ

10 MINUTE SCHOOL

4. $x^2 - 5x + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল 4 হলে, অপর মূল-

a) -5
b) -4
c) 4
d) 1

ব্যাখ্যাঃ অপর মূল α হলে,

$$\alpha + 4 = -\frac{-5}{1} = 5 \quad \therefore \alpha = 5 - 4 = 1$$

5. $x^2 - 4x + 4 = 0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α ও β হলে, $\alpha^3 + \beta^3$ এর মান কত ?

a) 24
b) 32
c) 16
d) 8

ব্যাখ্যাঃ $\therefore \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 4^3 - 3.4.4 = 64 - 48 = 16$

DOWNLOAD THE APP

MCQ

10 MINUTE SCHOOL

6 ও 7 নং প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

$2x^3 - 5x + 6x - 1 = 0$ সমীকরণের মূল তিনটি α , β ও γ হলে -

6. $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ এর মান কত ?

a) $\frac{5}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) -3 d) 3

ব্যাখ্যাঃ

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{6}{2} = 3$$

7. $\sum \alpha^2$ এর মান কত ?

a) $\frac{1}{4}$ b) $-\frac{1}{4}$ c) -4 d) 4

ব্যাখ্যাঃ

$$\sum \alpha^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = \frac{25}{4} - 2 \times 3 = \frac{1}{4}$$

MCQ

৪. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের পৃথায়ক পূর্ণসংখ্যা হলে -

i) মূল দুটি বাস্তব হবে

ii) মূল দুটি অসমান হবে

iii) মূল দুটি মূলদ হবে

নিচের কোনটি সঠিক?

a) i , ii b) i, iii c) ii, iii d) i, ii ও iii

ব্যাখ্যাঃ যেহেতু পৃথায়ক পূর্ণসংখ্যা তাই সবগুলোই হবে

MCQ

9. কোন দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $3 - i4$ হলে দ্বিঘাত সমীকরণটি হবে-

a) $x^2 - 6x + 25 = 0$
b) $x^2 + 6x + 25 = 0$
c) $x^2 - 6x - 25 = 0$
d) $x^2 + 6x - 25 = 0$

ব্যাখ্যাঃ

$$x = 3 - i4$$
$$\Rightarrow x - 3 = -i4$$
$$\Rightarrow (x-3)^2 = (-i4)^2$$
$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 = -16$$
$$\therefore x^2 - 6x + 25 = 0$$

MCQ

10. $x^2 + 4x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α , β হলে মূলদ্বয়ের ঘন এর সমষ্ঠি কত ?

a) 112 b) 16 c) −16 ✓ d) −112

ব্যাখ্যাঃ

$$\therefore \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$
$$= (-4)^3 - 3 \times 4 \times (-4)$$
$$= -64 + 48 = -16$$

11. $x^2 + 2x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α , β হলে $\alpha^2 + \beta^2$ এর মান কত ?

a) −2 b) −1 c) 1 d) 2 ✓

ব্যাখ্যাঃ

$\alpha + \beta = -2 \quad \alpha\beta = 1$ হলে,

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-2)^2 - 2 \times 1 = 2$$

MCQ

12. $x^2 + 2x + 1 = 0$ মূলদুটির যোগফল কত ?

a) 5 b) $-\frac{5}{3}$ c) -5 d) $\frac{4}{3}$

ব্যাখ্যাঃ
মূলদটি α ও β হলে,
$\alpha + \beta = -\frac{-4}{3} = \frac{4}{3}$

13. যদি $f(x) = 0$ সমীকরণের তিনটি মূল $1, -1, 2$ হয়, তবে $f(2x) = 0$ এর মূলগুলো হবে-

a) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$ b) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1$
c) $2, -2, 4$ d) $0, 1, -2$

ব্যাখ্যাঃ
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f(2x) = a(2x)^3 + b(2x)^2 + c(2x)$
$f(x)$ এর মূল $1, -1, 2$ হলে, $f(2x)$ এর মূল হবে $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$

MCQ

14. $x^2 + kx + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হলে k এর মান কত?

a) 2 ✓ b) 1 c) 0 d) -1

ব্যাখ্যাঃ

মূলদ্বয় সমান ও বাস্তব হলে,

নিশ্চায়ক $= 0$

$\Rightarrow b^2 - 4ac = 0$

$\Rightarrow k^2 - 4.1.1 = 0$

$\Rightarrow k^2 = 2^2$

$\therefore k = 2$

MCQ

15. $x^2 - 3x + 5 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে $\frac{1}{\alpha}$ ও $\frac{1}{\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি?

a) $5x^2 + 3x - 1 = 0$
b) $5x^2 - 3x + 1 = 0$ ✔
c) $5x^2 - 3x - 1 = 0$
d) $5x^2 + 3x + 1 = 0$

ব্যাখ্যাঃ

$$\alpha + \beta = -\frac{-3}{1} = 3 \qquad \alpha\beta = \frac{5}{1} = 5$$

$$x^2 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)x + \frac{1}{\alpha}.\frac{1}{\beta} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right)x + \frac{1}{\alpha\beta} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{1}{5} = 0$$

$$\therefore 5x^2 - 3x + 1 = 0$$

DOWNLOAD THE APP

MCQ

10 MINUTE SCHOOL

16. $x^2 - 3x + 5$ এর ন্যূনতম মান কোনটি ?

a) 3

b) 5

c) $\frac{15}{4}$

d) $\frac{11}{4}$

ব্যাখ্যাঃ

$$ax^2 + bx + c$$

$$max: c - \frac{b^2}{4a}; \quad a < 0$$

$$min: c - \frac{b^2}{4a}; \quad a > 0$$

$$\Rightarrow 5 - \frac{9}{4} = \frac{11}{4}$$

MCQ

17. P এর কিরূপ মানের জন্য $x^2 + px + 1$ সমীকরণের মূলদ্বয় জটিল হবে ?

a) $-2 \leq p \leq 2$

b) $-4 < p \leq 4$

c) $-2 < p < 2$

d) $-4 \leq p < 4$

ব্যাখ্যাঃ

নিশ্চায়ক < 0

$\Rightarrow p^2 - 4.1.1 < 0$

$\Rightarrow p^2 - 4 < 0$

$\Rightarrow (p+2)(p-2) < 0$

হয়,

$p + 2 > 0$

$\Rightarrow p > -2$

অথবা,

$p - 2 < 0$

$\Rightarrow p < 2$

$\therefore -2 < p < 2$

DOWNLOAD THE APP

MCQ

10 MINUTE SCHOOL

18. $3x^2 - 2x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α , β হলে মূলদ্বয়ের বর্গের সমষ্ঠি কত ?

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{2}{9}$

c) $-\frac{2}{9}$ ✔

d) $-\frac{2}{3}$

ব্যাখ্যাঃ

মলদ্বয় α ও β হলে,

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{4}{9} - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{-2}{9}$$

MCQ

19. যদি α ও β $x^2 + x + 2 = 0$ সমীকরণের মূল হয়, তবে $-\alpha$ ও $-\beta$ যে দ্বিঘাত সমীকরণের মূল তা হলো-

a) $x^2 + x + 2 = 0$ ✔
b) $x^2 - x - 2 = 0$
c) $x^2 + x + 2 = 0$
d) $x^2 + x - 2 = 0$

ব্যাখ্যাঃ

$-\alpha$ ও $-\beta$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ,

$$x^2 + x + 2 = 0$$

20. যদি $x^2 + x + 2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হয় তবে $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ এর মান কত?

a) $\frac{2}{3}$
b) $-\frac{1}{2}$ ✔
c) $-\frac{2}{3}$
d) $-\frac{2}{9}$

ব্যাখ্যাঃ

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}$$

MCQ

21. $(5 + 3i)$ মূল বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ হবে -

a) $x^2 - 10x + 34 = 0$ ✔
b) $x^2 + 5x + 34 = 0$
c) $x^2 + 5x - 34 = 0$
d) $x^2 - 5x - 34 = 0$

ব্যাখ্যাঃ

$x = 5 + 3i$

$\Rightarrow (x - 5)^2 = (3i)^2$

$\Rightarrow x^2 - 10x + 25 = -9$

$\therefore x^2 - 10x + 34 = 0$

22. মূলদ সহগবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন কর যার একটি মূল $\frac{1}{2-\sqrt{5}}$

a) $x^2 + 4x - 2 = 0$
b) $x^2 + 4x - 1 = 0$ ✔
c) $x^2 + 2x - 1 = 0$
d) $x^2 - 4x - 1 = 0$

ব্যাখ্যাঃ

$x = \frac{1}{2 - \sqrt{5}}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{x} - 2\right)^2 = (-\sqrt{5})^2$

$\Rightarrow \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x} + 4 = 5$

$\Rightarrow 1 - 4x + 4x^2 = 5x^2$

$\therefore x^2 + 4x - 1 = 0$

MCQ

23. $3x^2 - 2x + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান হলে c এর মান কত?

a) 2
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{3}$ ✓

ব্যাখ্যাঃ নিশ্চায়ক $= 0$

$(-2)^2 - 4.3.c = 0$ $\Rightarrow -12c = -4$ $\therefore c = \frac{1}{3}$

24. $x^3 - 5x^2 + 17x - 13 = 0$ সমীকরণের একটি মূল 1 হলে অপর মূল দুটি-

a) $2 \pm 3i$ ✓
b) $2 + 3i$
c) $2 - 3i$
d) $x - 1$

ব্যাখ্যাঃ $x - 1 = 0$

$\Rightarrow x^3 - 5x^2 + 17x - 13 = 0$

$\Rightarrow x^3 - x^2 - 4x^2 + 4x + 13x - 13 = 0$

$\Rightarrow x^2(x - 1) - 4x(x - 1) + 13(x - 1) = 0$

$\Rightarrow (x - 1)(x^2 - 4x + 13) = 0$

$\therefore x = 1$

$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16 - 4.1.13}}{2.1}$

$= \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}$

$= \frac{4 \pm 3i}{2} = 2 \pm 3i$

MCQ

25. $4x^2 - x^2 - 4 = 0$ সমীকরণের একটি মূল 2 হলে অপর মূল -

a) -4 b) -2 c) 0 d) 2 ✔

ব্যাখ্যাঃ অপর মূল α হলে,

$$\Rightarrow 2 + \alpha = -\frac{4}{-1} = 4$$

$$\therefore \alpha = 2$$

26. যদি $x^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে $\alpha - 2,\ \beta - 2$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি ?

a) $(x+q)^2 + qx - r + 2 = 0$ b) $x^2 + (q+2)x + r - 6 = 0$

c) $x^2 + (q+4)x + 2q + r + 4 = 0$ ✔ d) $rx^2 + (q-2)x + 3 = 0$

ব্যাখ্যাঃ $x = \alpha - 2$

$$\therefore x + 2 = \alpha$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 + q(x+2) + r = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 + qx + 2q + r = 0$$

$$\therefore x^2 + (q+4)x + 2q + r + 4 = 0$$

MCQ

27. কোন ফাংশনটি বহুপদী ? [সকল বোর্ড-১৮]

a) $2x^2 - 5\sqrt{x} + 1$

b) $x^3 - \frac{3}{x^2} + 4x + 1$

c) $x^3 + 2x^2 - 3x + x^{-1}$

d) $2x^2 - x + 1$ ✔

ব্যাখ্যাঃ বহুপদীতে ঋণাত্মক বা ভগ্নাংশকৃতির ঘাত গ্রহণযোগ্য নয়

28. $3x^2 - 4x - 7 = 0$ সমীকরণের মূল দুটির যোগফল কত ?

a) 5

b) $-\frac{5}{3}$

c) -5

d) $\frac{4}{3}$ ✔

ব্যাখ্যাঃ

মূল দুটি α, β হলে-

$$\Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{4}{-3} = \frac{4}{3}$$

MCQ

29. $ax^2 + bx + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদুটি অশূণ্য হওয়ার শর্ত -

$a)$ $c = 0$ $b)$ $a = 0$ $c)$ $b = c = 0$ ✔$d)$ $c \neq 0$

ব্যাখ্যাঃ

$c = 0$ হলে,

$ax^2 + bx = 0$ $\Longrightarrow x(ax + b) = 0$

$\therefore x = 0$ $\therefore x = -\frac{b}{a}$

30. একটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল i^3 হলে অপর মূল কোনটি ?

$a)$ -1 $b)$ 0 $c)$ i ✔$d)$ $-i$

ব্যাখ্যাঃ

$i^3 = -i = 0 - i$

অপর মূল , $0 + i = i$

MCQ

31. $lx^2 + mx + n = 0$ সমীকরণের x এর দুটির অধিকমান দ্বারা সিদ্ধ হলে নিচের কোনটি সঠিক ?

$a)$ বাস্তব $b)$ অবাস্তব $c)$ কাল্পনিক $d)$ অভেদ

32. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত $2:3$ হলে নিচের কোনটি সঠিক ?

$a)$ $6b^2 = 25ac$ $b)$ $b^2 = ac$ $c)$ $-\frac{b}{c}$ $d)$ $3b^2 = 25ac$

ব্যাখ্যাঃ

মূলদ্বয় 2α ও 3α হলে,

$$2\alpha + 3\alpha = -\frac{b}{a} \Rightarrow 5\alpha = -\frac{b}{a} \quad \therefore \alpha = -\frac{b}{5a}$$

$$2\alpha \times 3\alpha = \frac{c}{a} \Rightarrow 6\alpha^2 = \frac{c}{a} \Rightarrow 6\left(-\frac{b}{5a}\right)^2 = \frac{c}{a} \quad \therefore 6b^2 = 25ac$$

MCQ

33. $2x^2 - 3x - p = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় পরস্পর উল্টা হলে P এর মান কত ?

$a)$ 2 $b)$ -2 $c)$ 3 $d)$ -3

ব্যাখ্যাঃ

মূলদ্বয় α ও $\frac{1}{\alpha}$ হলে, $\alpha \times \frac{1}{\alpha} = -\frac{p}{2}$ $\therefore p = -2$

34. $x^2 - 4x +$ `$16 = 0$ সমীকরণের -

i) মূলদ্বয় মূলদ হবে

ii) মূলদ্বয়ের যোগফল 4

iii) মূলদ্বয়ের গুণফল 16

নিচের কোনটি সঠিক?

$a)$i , ii $b)$i, iii $c)$ ii, iii $d)$ i, ii ও iii

MCQ

ব্যাখ্যাঃ

মূলদ্বয় α ও β হলে,

$\alpha + \beta = -\frac{4}{-1} = 4$ এবং $\alpha\beta = \frac{16}{1} = 16$

$\therefore x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16 - 4.16}}{2.1}$ [যা অমূলদ]

35. $ax^2 + bx + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের নিশ্চায়ক ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে মূলগুলো হবে-

i) বাস্তব ii) মূলদ iii) অমূলদ

নিচের কোনটি সঠিক?

a) i , ii b) i, iii c) ii, iii d) i, ii ও iii

MCQ

36. $ax^2 + bx + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের পৃথায়ক D হলে-

i) মূলদ্বয় বাস্তব যখন $D \geq 0$

ii) মূলদ্বয় সমান যখন $D = 0$

iii) মূলদ্বয় মূলদ যখন $D < 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

a) i , ii ✔   b) i, iii   c) ii, iii   d) i, ii ও iii

37. $x\left(x + \frac{x}{4}\right) = 0$ সমীকরণের -

i) দ্বিঘাত   ii) ত্রিঘাত   iii) কাল্পনিক মূলবিশিষ্ট

নিচের কোনটি সঠিক?

a) i , ii   b) i, iii ✔   c) ii, iii   d) i, ii ও iii

MCQ

ব্যাখ্যাঃ

$$x\left(x+\frac{x}{4}\right)=0 \implies x^2+4=0 \implies x^2=-4 \therefore x=\pm\sqrt{-4}=\pm 2$$

উদ্দীপকের আলোকে ৩৮ ও ৩৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

$5x^2-2x+1=0$ সমীকরণের দুটি মূল α , β

38. মূলদ্বয়ের যোগফল $\alpha+\beta=?$

a) $-\frac{2}{3}$ b) $-\frac{5}{2}$ ✓c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{5}{2}$

ব্যাখ্যাঃ

$$\alpha+\beta=-\frac{-2}{5}=\frac{2}{5}$$

MCQ

39. $(\alpha + \beta)^2$ ও $(\alpha - \beta)^2$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণে x এর সহগ কত ?

a) 200 b) 250 c) 300 d) 400

ব্যাখ্যাঃ

$$(\alpha + \beta)^2 = \frac{4}{25} = 4 \text{ এবং } \alpha\beta = \frac{1}{5}$$

$$\therefore (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \frac{4}{25} - \frac{4}{5} = \frac{-16}{25}$$

$$x^2 - \left(\frac{4}{25} - \frac{16}{25}\right)x + \frac{4}{25}\left(-\frac{16}{25}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{12}{25}x - \frac{64}{625} = 0$$

$$\therefore 625x^2 + 300x - 64 = 0$$

MCQ

উদ্দীপকের আলোকে ৩৮ ও ৩৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

$x^2 - 5x + 6 = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

40. $x^2 - 5x + 6 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α , β হলে $\alpha + \beta = ?$

$a)\ -5$ $b)\ -4$ $c)\ 5$ $d)\ 6$

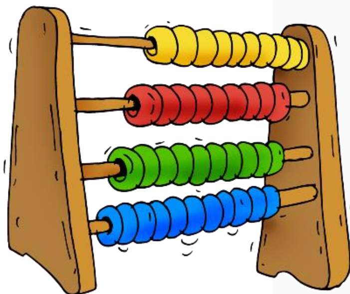
ব্যাখ্যাঃ $\alpha + \beta = -\frac{-5}{1} = 5$

41. $x^2 - 5x + 6 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় a, b হলে $a^2 + b^2 = ?$

$a)\ 11$ $b)\ 13$ $c)\ 25$ $d)\ 36$

ব্যাখ্যাঃ $a + b = -\frac{-5}{1} = 5$ এবং $ab = \frac{6}{1} = 6$

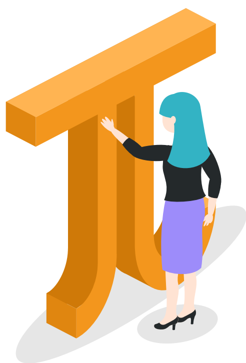
$\therefore a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 5^2 - 2 \times 6 = 13$



কণিক

Chapter-06

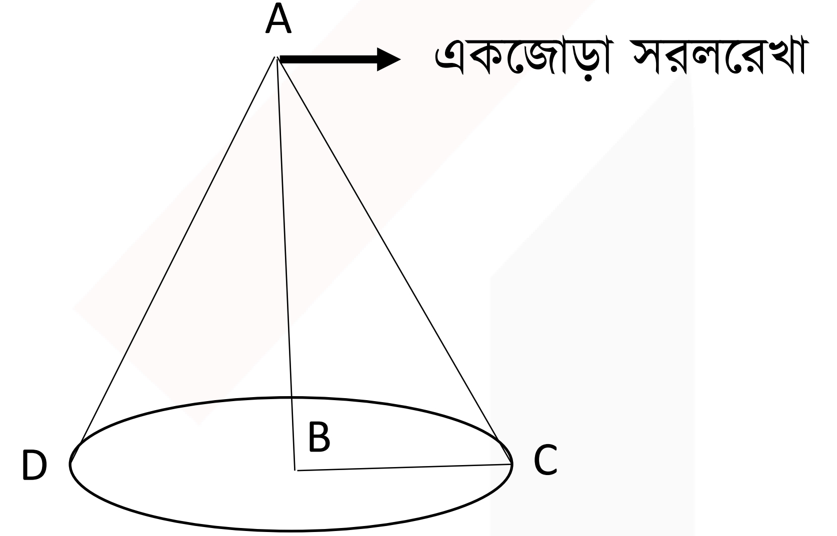




কণিক

কণিকে আলোচনার প্রধান বিষয় সমূহ:

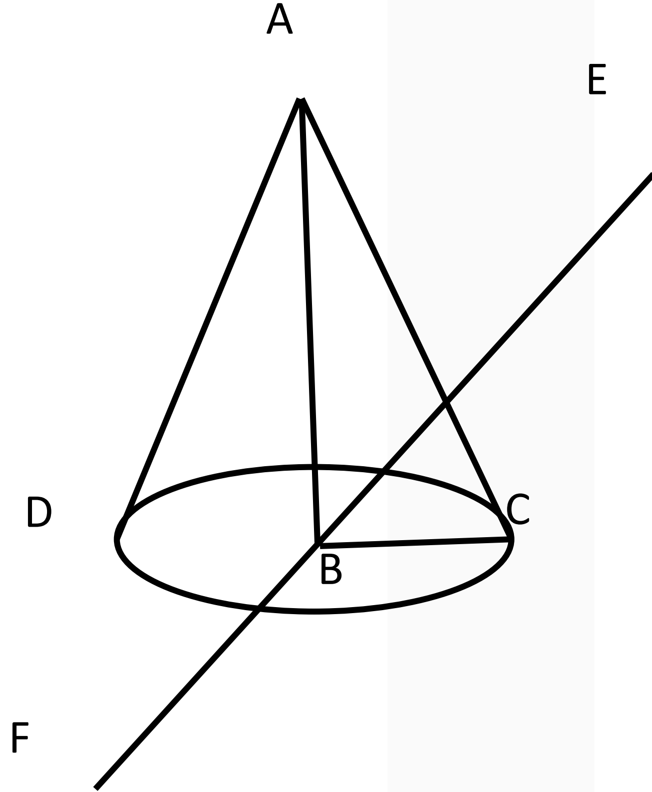
1. উপবৃত্ত (Ellipse)
2. পরাবৃত্ত (Parabola)
3. অধিবৃত্ত (Hyperbola)



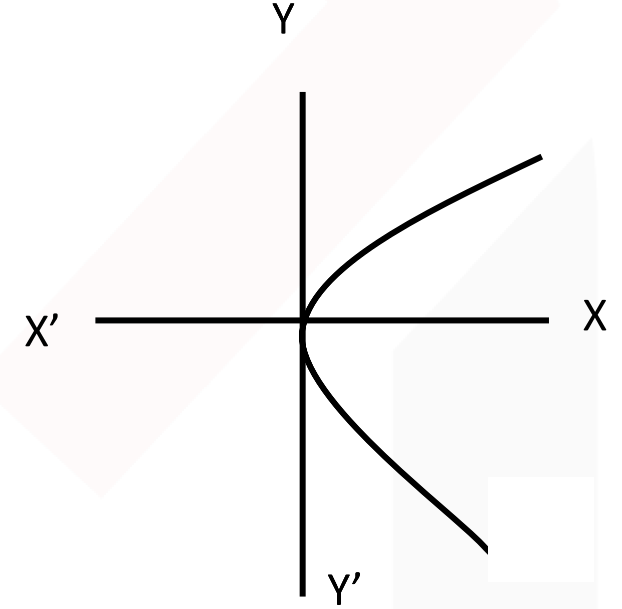
এছাড়াও প্রয়োজন-

1. বৃত্ত (Circle)
2. একজোড়া সরলরেখা (Straight line)

কণিক



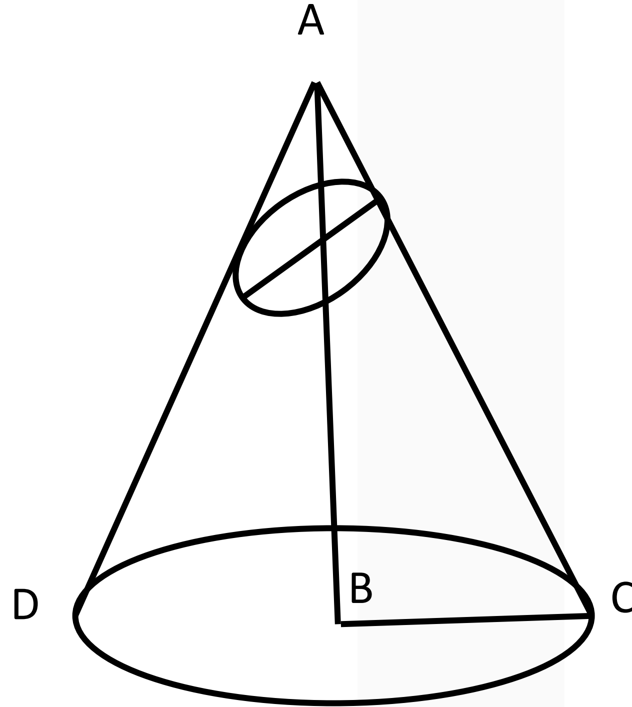




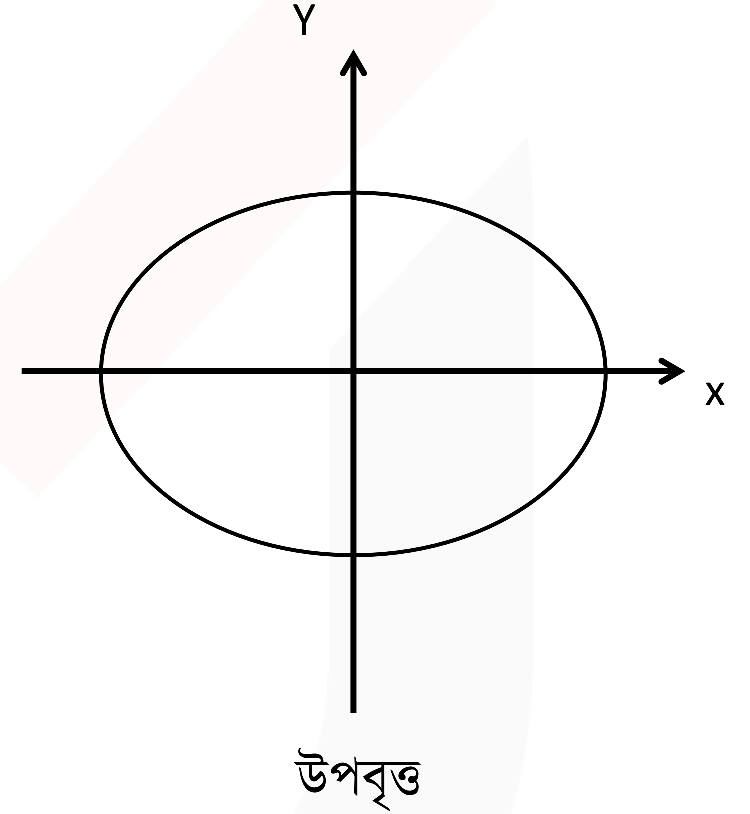
পরাবৃত্ত

AD এর সমান্তরাল করে EF ছেদন করা হলে পরাবৃত্ত পাওয়া যায়

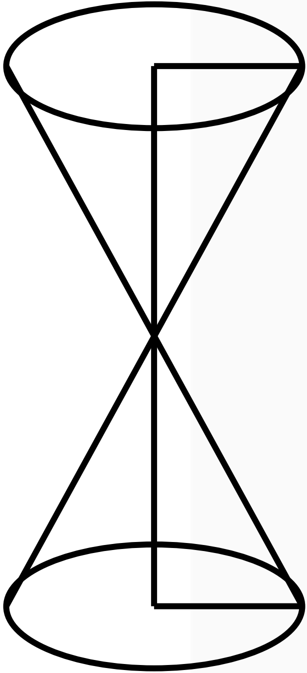
কণিক



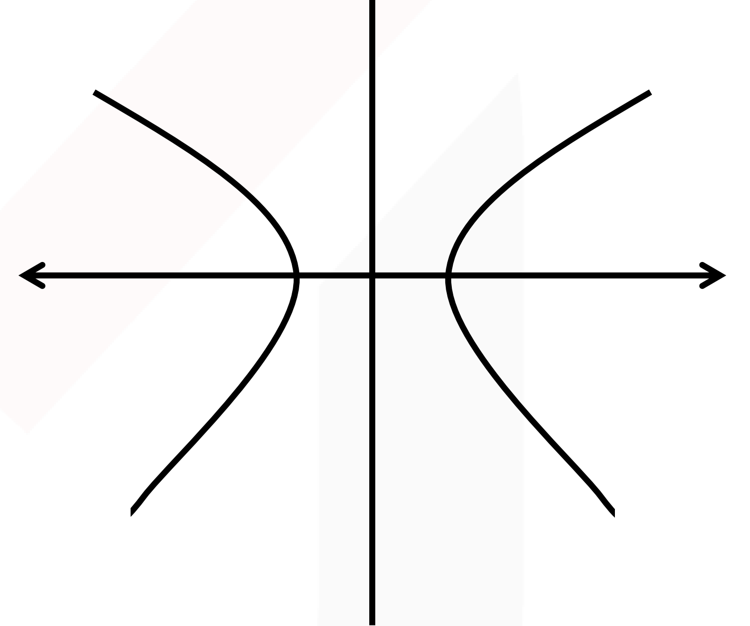




কণিক







অধিবৃত্ত

কণিক

কণিক	চিত্র	উৎকেন্দ্রিকতা (e)	সমীকরণ
বৃত্ত (Circle)		$e = 0$	$x^2 + y^2 = r^2$
উপবৃত্ত (Ellipse)		$0 < e < 1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; a > b$
পরাবৃত্ত(Parabola)		$e = 1$	$y^2 = 4ax$
অধিবৃত্ত(Hyperbola)		$e > 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; a > b$
একজোড়া সরলরেখা (Straight line)		$e = \infty$	$(a_1x + b_1 + c)(a_2 + b_2 + c) = 0$

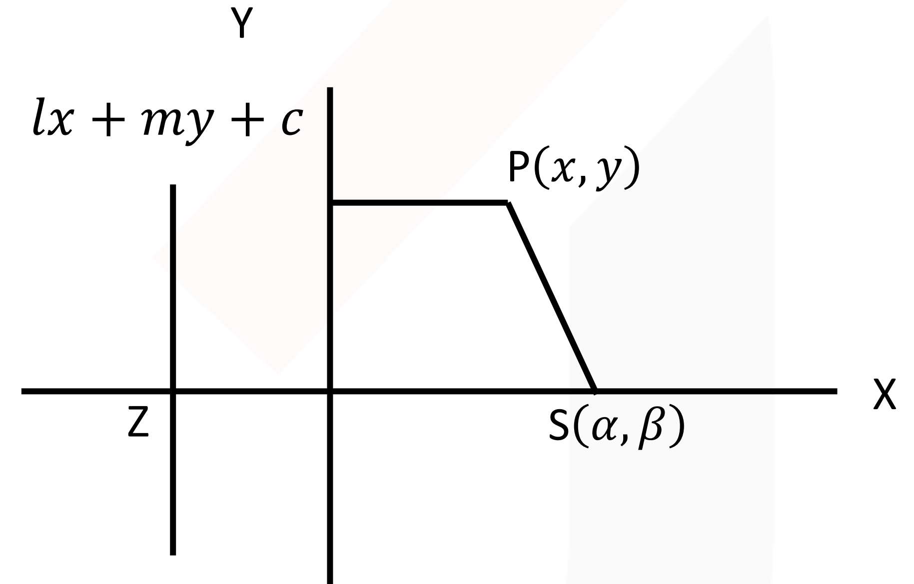
DOWNLOAD THE APP

কণিক

10 MINUTE SCHOOL

উৎকেন্দ্রিকতা (e):

- ✓ একে e দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
- ✓ বক্রতা প্রাপ্ত হওয়ার ধর্ম



কণিকঃ

কণিক একটি স্থির বিন্দু এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা হতে নির্দিষ্ট অনুপাত বজায় রেখে সঞ্চারণশীল বিন্দু সমূহের সেটকে কণিক বলে।

কণিক

$$\frac{SP}{PM} = e$$

$$\Rightarrow SP = e.PM$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = e.\frac{|lx + my + c|}{\sqrt{l^2 + m^2}}$$

$$\Rightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = e.\frac{(lx + my + c)^2}{l^2 + m^2}$$

$$\Rightarrow ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$$ [কণিকের সাধারণ সমীকরণ]

কণিক

পরাবৃত্তঃ

✓ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = 1$

এখানে,

MZ= দিকাক্ষ/নিয়ামক রেখা

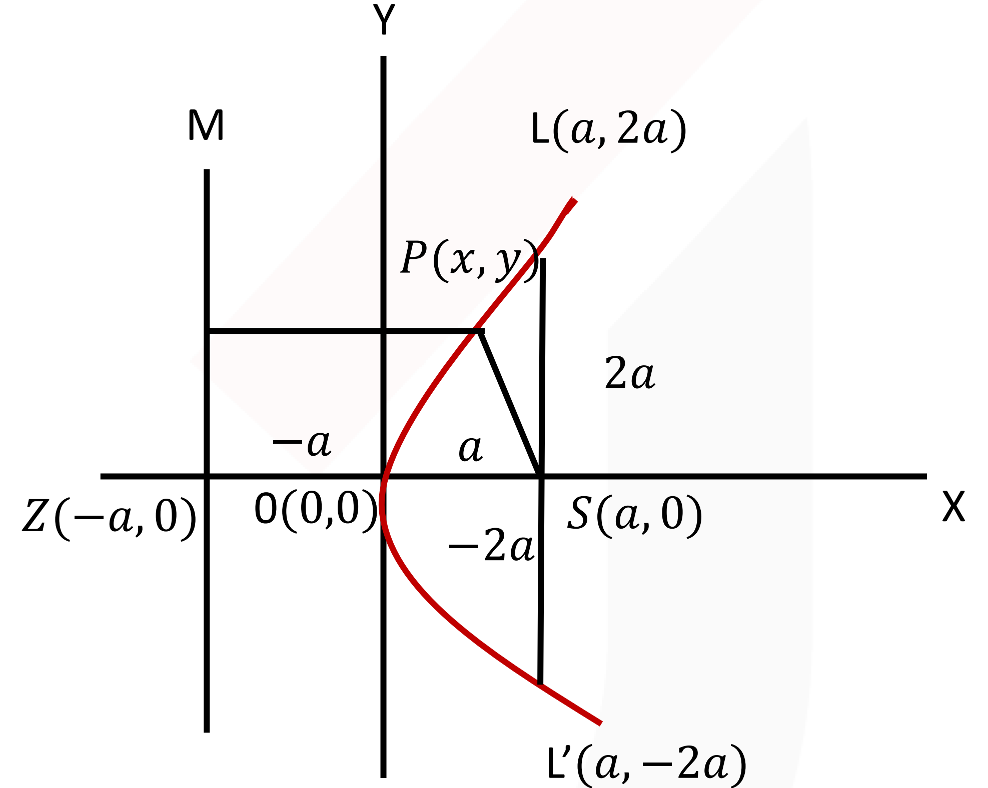
এটি x –অক্ষের সমান্তরাল হওয়ায় $x = -a \quad \therefore x + a = 0$

উপকেন্দ্র/ফোকাস $S(a, 0)$

শীর্ষবিন্দু $(0,0)$

দিকাক্ষের/নিয়ামক রেখার পাদবিন্দু, $Z(-a, 0)$

LL’= উপকেন্দ্রিক লম্ব



কণিক

পরাবৃত্তঃ

উপকেন্দ্রিক লম্বের পাদবিন্দু $L(a, 2a), L'(a, -2a)$

$$SP = e.PM$$

$$\Rightarrow SP = PM \; [e = 1]$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = \frac{|x+a|}{\sqrt{1^2}}$$

$$\Rightarrow (x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$$

$$\Rightarrow y^2 = (x+a)^2 - (x-a)^2$$

$$\therefore y^2 = 4ax$$

কণিক

পরাবৃত্তঃ

প্রয়োজনীয় বিষয়বস্তু-

১. পরাবৃত্তের রাশিমালা

২. পরাবৃত্তের সমীকরণ

৩. পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দূরত্ব নির্ণয়

কণিক

পরাবৃত্তঃ

1. $y^2 = 8x$

$= 4.2.x$

$\therefore a = 2$

2. $y^2 = 20x$

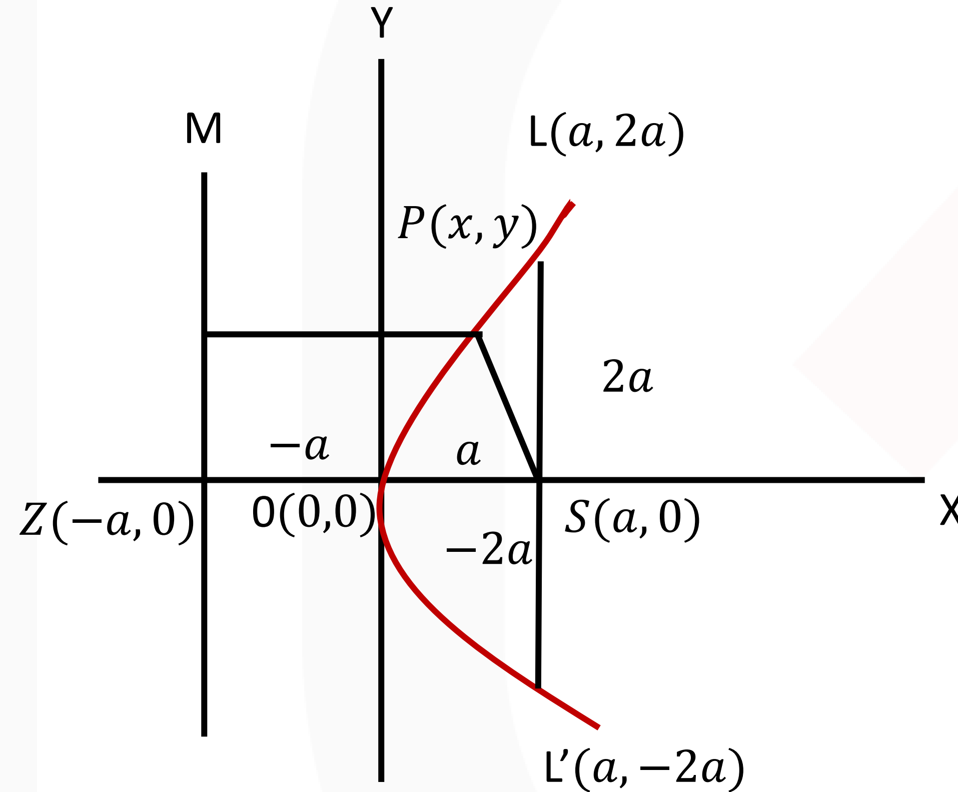
$= 4.5.x$

$\therefore a = 5$

3. $y^2 = 24x$

$= 4.6.x$

$\therefore a = 6$

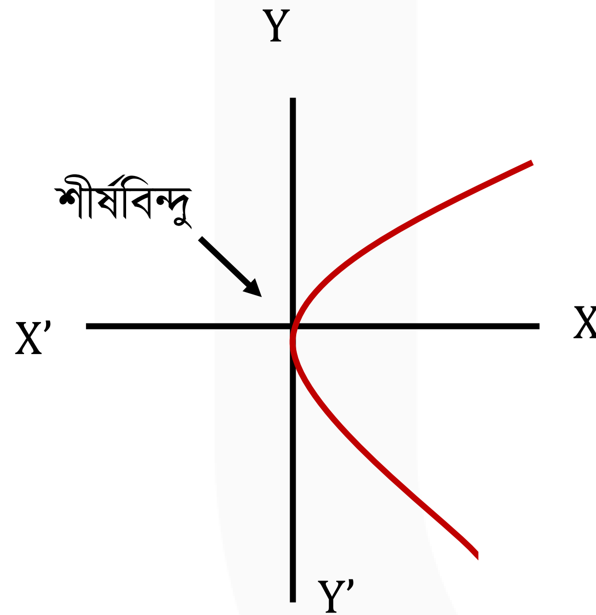


পরাবৃত্ত

পরাবৃত্তঃ

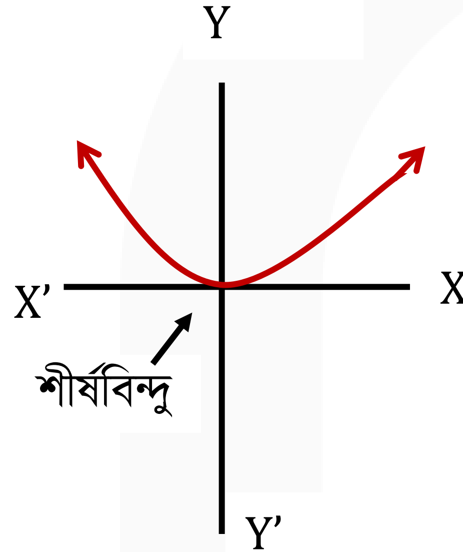
পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণঃ

$$y^2 = 4ax$$



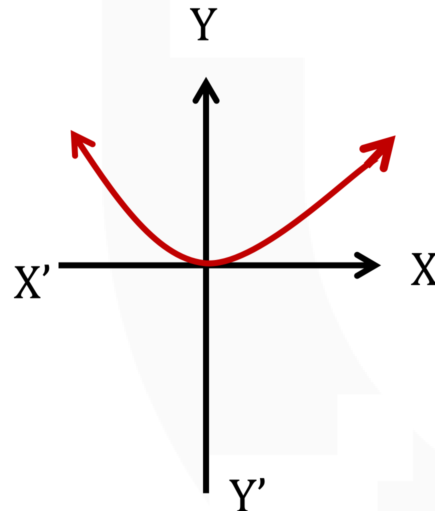
পরাবৃত্ত

$x^2 = 4ay$



$(x-1)^2 = 4ay$

1,0



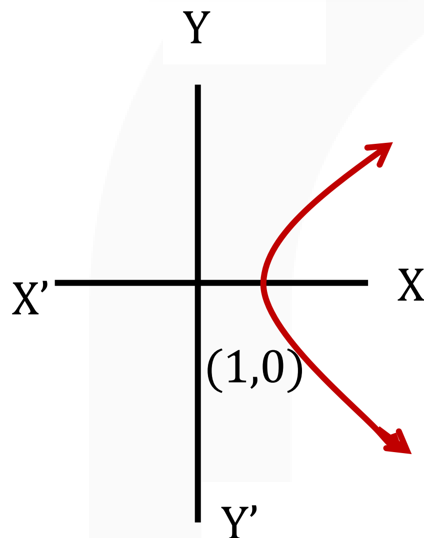
এখানে

$x = 0$ ধরলে, $y = 0$

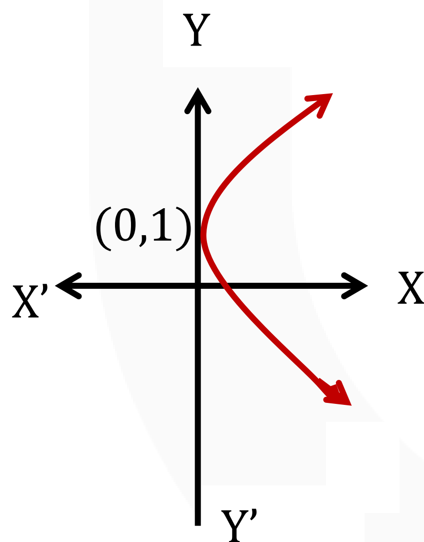
$y = 0$ ধরলে, $x = 1$

পরাবৃত্ত

$y^2 = 4a(x-1)$

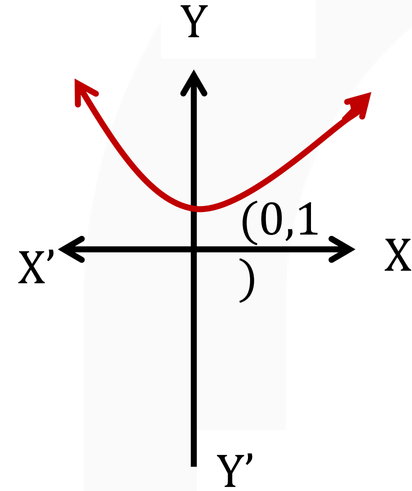


$(y-1)^2 = 4ax$

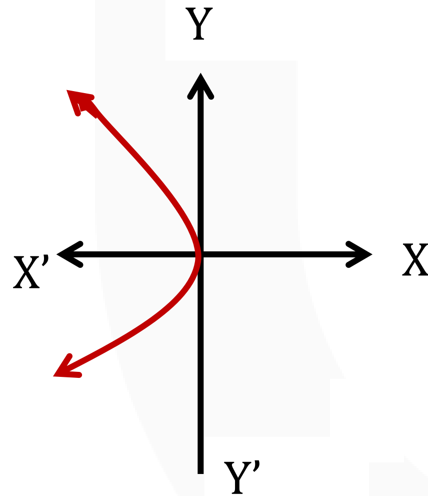


পরাবৃত্ত

$x^2 = 4a(y-1)$



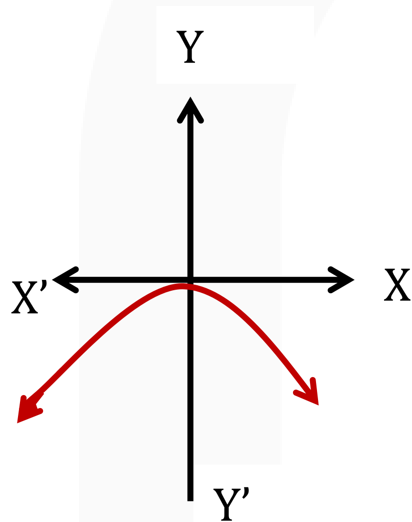
$y^2 = -4ax$



অর্থাৎ ঋণাত্মক হলে বিপরীত হবে

পরাবৃত্ত

$x^2 = -4ay$

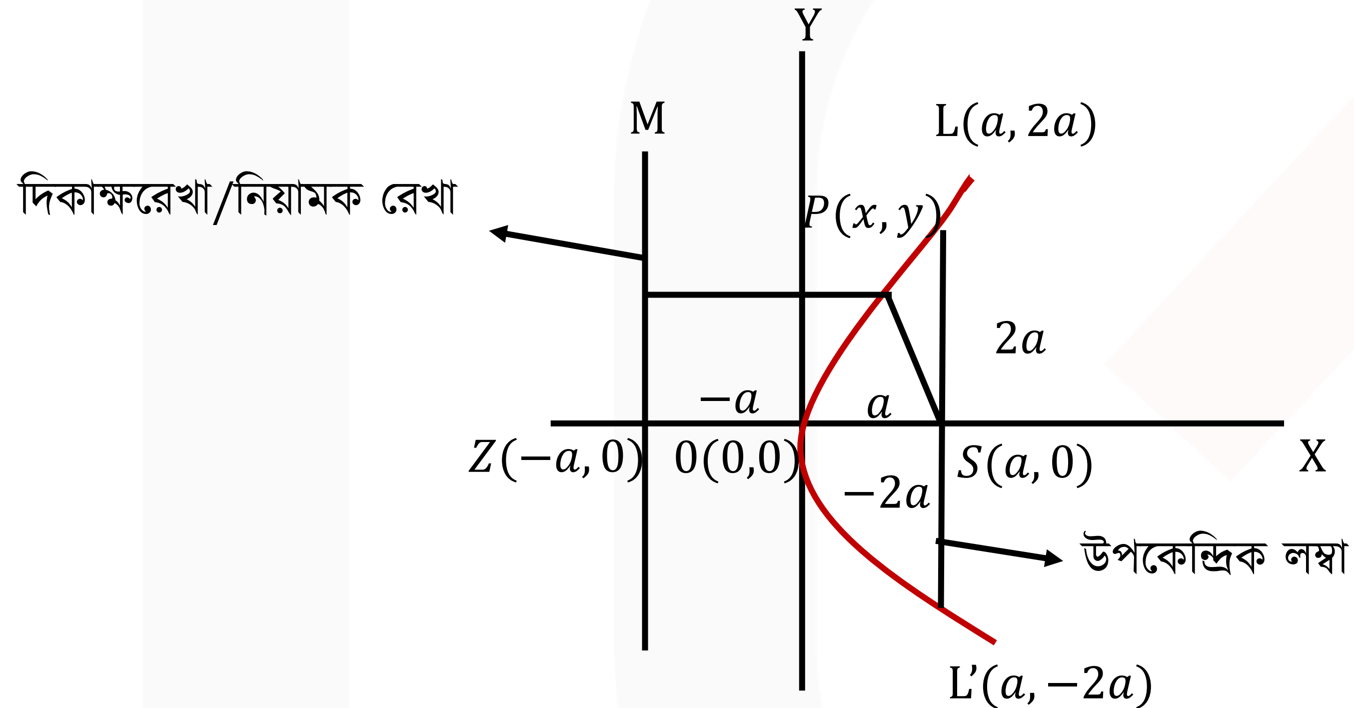


DOWNLOAD THE APP

পরাবৃত্ত

10 MINUTE SCHOOL

পরাবৃত্তের রাশিমালা



MZ= দিকাক্ষরেখা

Z= নিয়ামক রেখার পাদবিন্দু

S= Focus/ উপকেন্দ্র(-a,0)

LĹ= উপকেন্দ্রিক লম্ব

A= মূলবিন্দু

LS=SĹ=2a

L= (a,2a)

Ĺ=(a,2a)

AZ=AS=a

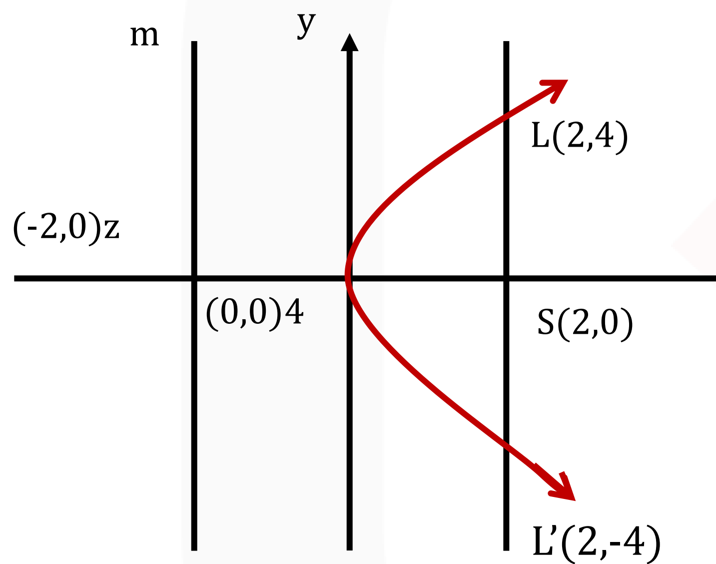
পরাবৃত্ত

উদাহরণঃ

$* \, y^2 = 8x$

$= 4.2.x$

$a = 2$



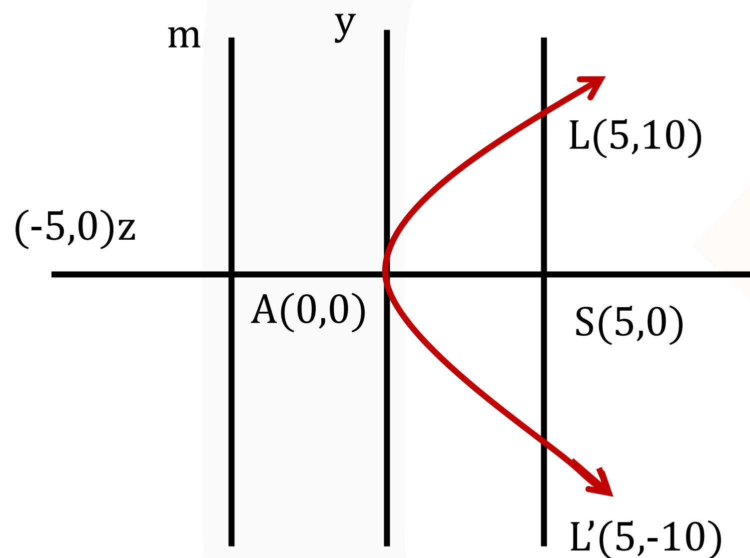
পরাবৃত্ত

উদাহরণঃ

$* \; y^2 = 20x$

$= 4.5.x$

$a = 5$



পরাবৃত্ত

দ্বিকাক্ষ রেখার সমীকরণঃ

$x = -a$ [y- অক্ষের সমান্তরাল]

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণঃ

$x = a$ [y- অক্ষের সমান্তরাল]

অক্ষরেখাঃ ফোকাস, শীর্ষবিন্দু, দ্বিকাক্ষরেখার পাদবিন্দু যে রেখার উপর অবস্থিত থাকে তাকে অক্ষরেখা বলে

সাধারণত ঘাত 1 হলে , পরাবৃত্ত ঐ রেখা বরাবর হবে।

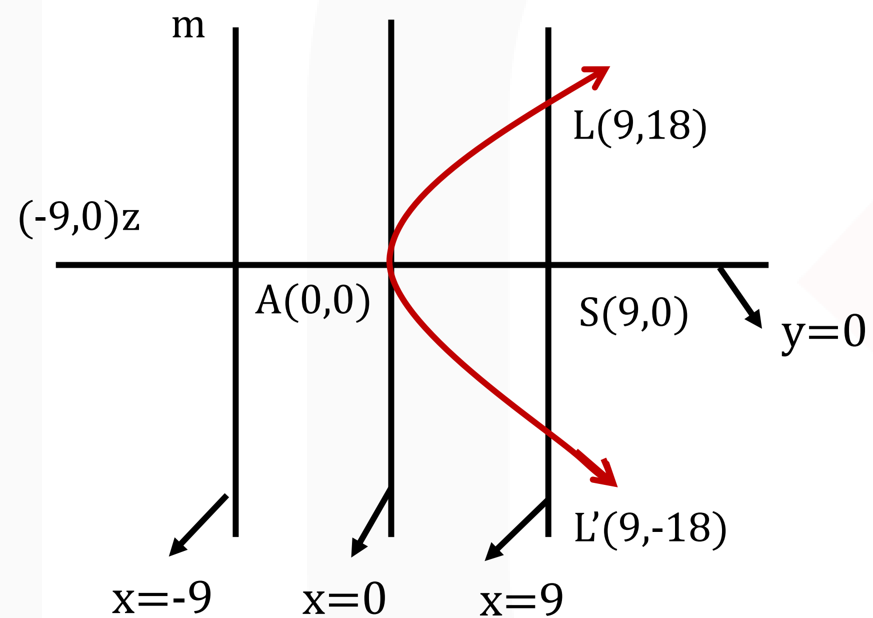
$y = 0$ [x- এর ক্ষেত্রে]

শীর্ষ স্পর্শকের সমীকরণ, x=0

এবং y- অক্ষ রেখার সমীকরণ, y=0

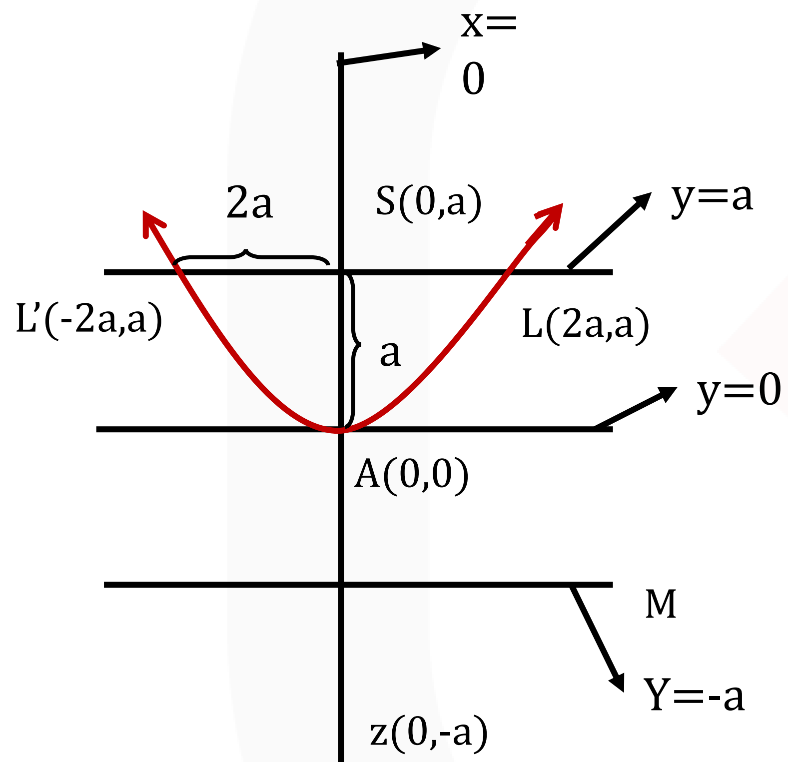
পরাবৃত্ত

$$* \; y^2 = 36x$$
$$= 4.9.x$$



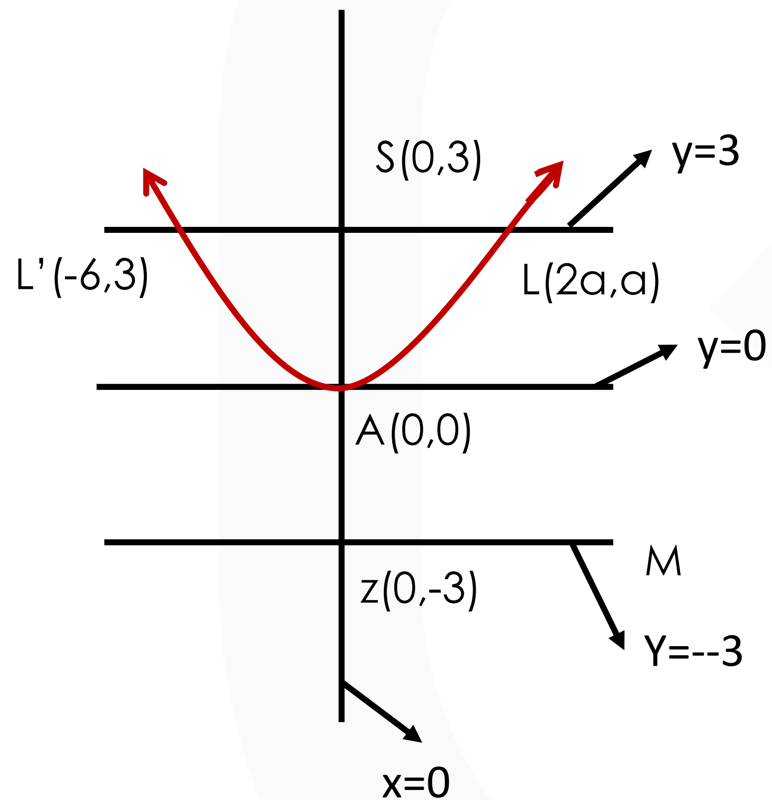
পরাবৃত্ত

$*x^2 = 4y$



পরাবৃত্ত

$$x^2 = 12y$$
$$= 4.3y$$



পরাবৃত্ত

$$(y-2)^2 = 8(x+3)$$

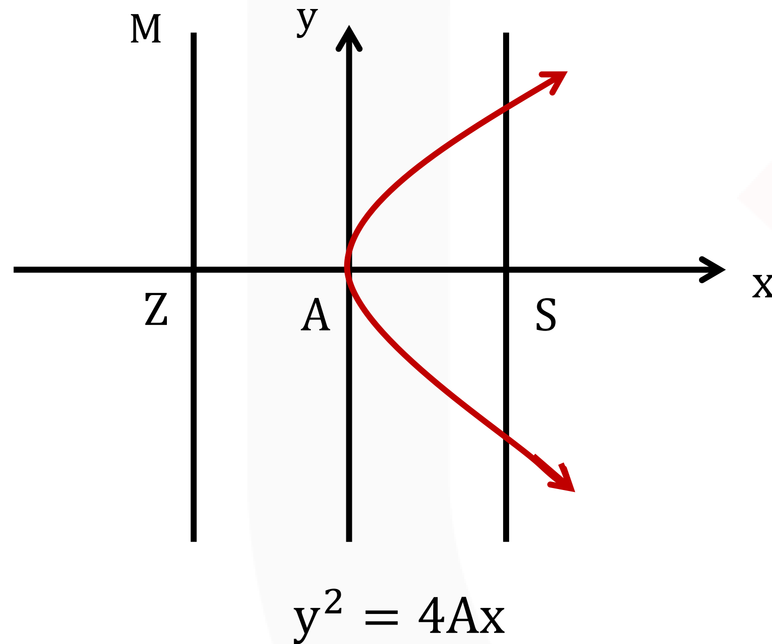
$\Rightarrow (y-2)^2 = 4.2.(x+3)$

$\Rightarrow y^2 = 4.A.X$

এখানে, y=y-2

$A = 2$

$x = x + 3$



$$y^2 = 4Ax$$

পরাবৃত্ত

শীর্ষবিন্দু:

এখানে, শীর্ষবিন্দু A

অর্থাৎ $x = 0$

$\Rightarrow x + 3 = 0$

$\Rightarrow x = -3$

এবং $y = 0$

$\Rightarrow y - 2 = 0$

$\Rightarrow y = 2$

$\therefore A(-3,2)$

পরাবৃত্ত

উপকেন্দ্র s =?

$$s = (A, 0)$$

$x = A$	$y = 0$
$\Rightarrow x + 3 = 2$	$\Rightarrow y - 2 = 0$
$\Rightarrow x = -1$	$\Rightarrow y = 2$

$$s = (-1, 2)$$

দিকাক্ষ রেখার পাদবিন্দু z=?

$z(-A, 0)$	
$x = A$	$y = 0$
$\Rightarrow x + 3 = -2$	$\Rightarrow y - 2 = 0$
$\Rightarrow x = -5$	$\Rightarrow y = 2$

DOWNLOAD THE APP

পরাবৃত্ত

10 MINUTE SCHOOL

উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তবিন্দু ?

$L\ (A, 2A)$

$x = A$

$\Rightarrow x + 3 = 2$

$\Rightarrow x = -1$

$Y = 2A$

$\Rightarrow Y - 2 = 2.2$

$\Rightarrow Y = 6$

$\therefore L\ (-1,6)$

$\acute{L}(A, -2A)$

$x = A$

$\Rightarrow x + 3 = 2$

$\Rightarrow x = -1$

$Y = 2A$

$\Rightarrow Y - 2 = 4$

$\Rightarrow Y = -2$

$\therefore \acute{L}(-1,2)$

পরাবৃত্ত

$$(y-1)^2 = 4(x+3)$$

$$\Rightarrow (y-1)^2 = 4.1.(x+3)$$

$$\Rightarrow y^2 = 4.A.,X$$

এখানে, $Y = y - 1$

$A = 1$

$x = x + 3$

শীর্ষবিন্দু A

$x = 0$	$y = 0$
$\Rightarrow x + 3 = 0$	$\Rightarrow y - 1 = 0$
$\Rightarrow x = -3$	$\Rightarrow y = 1$

$$\therefore A(-3,1)$$

পরাবৃত্ত

শীর্ষবিন্দু S

$S = (A, 0)$

$x = -A$
$\Rightarrow x + 3 = 1$
$\Rightarrow x = -2$

$y = 0$
$\Rightarrow y - 1 = 0$
$\Rightarrow y = 1$

দিকাক্ষরেখার পাদবিন্দু Z

$z = (-A, 0)$

$x = -A$
$\Rightarrow x + 3 = -1$
$\Rightarrow x = -2$

$y = 0$
$\Rightarrow y - 1 = 0$
$\Rightarrow y = 1$

$\therefore Z(-4,1)$

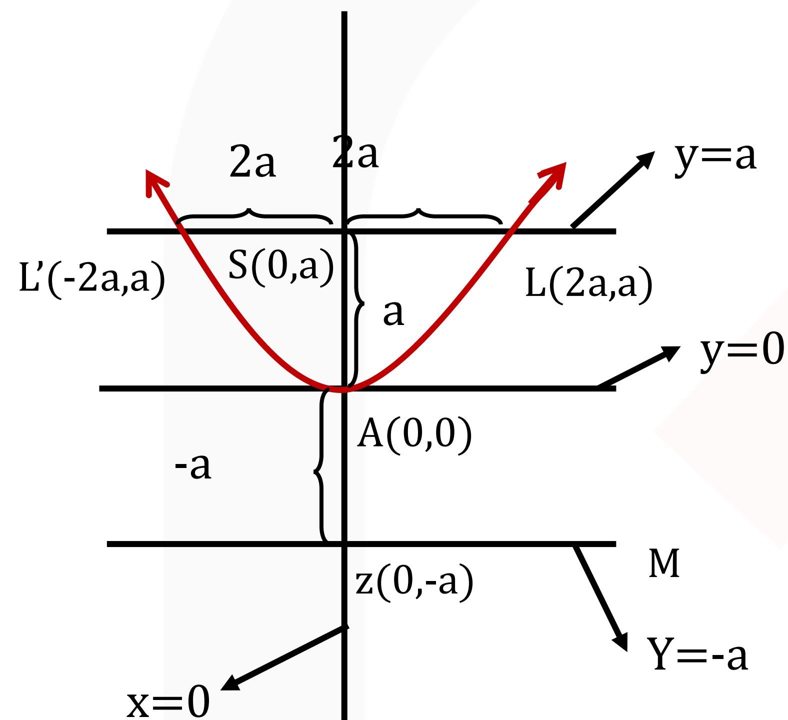
কণিক

কণিক (পরাবৃত্ত)

- রাশিমালা (খ, MCQ)
- সমীকরণ নির্ণয় (গ, MCQ)
- উপকেন্দ্রিক দূরত্ব (ক, MCQ)

Problems

1. $x^2 = 4ay$



Problems

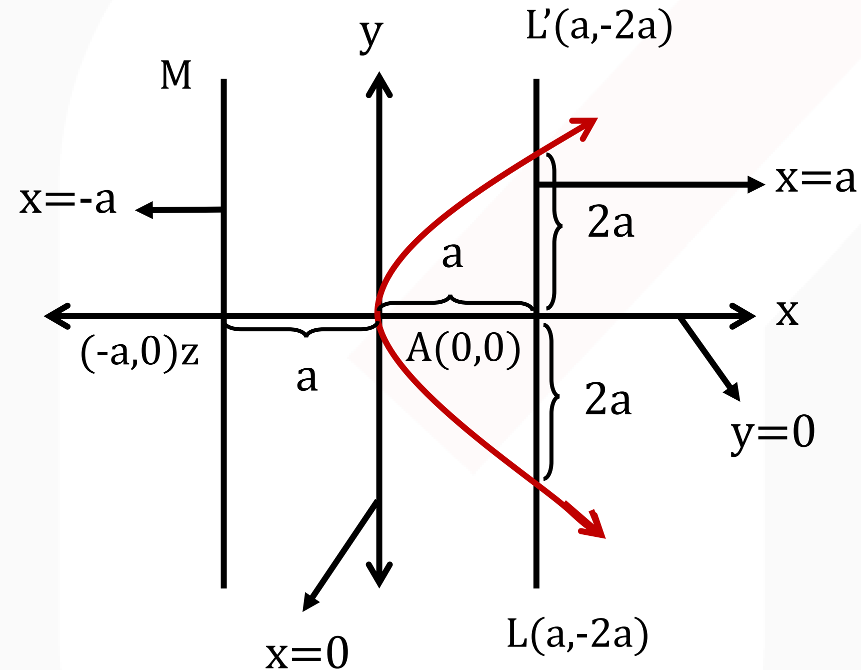
2. $y^2 = 4ax$

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $x = a$

নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $x = -a$

অক্ষ রেখার সমীকরণ, $y = 0$

শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $x = 0$



Problems

3. $3y^2 - 10x - 12y - 18 = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্ব, অক্ষরেখা ও নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

$$3y^2 - 10x - 12y - 18 = 0$$

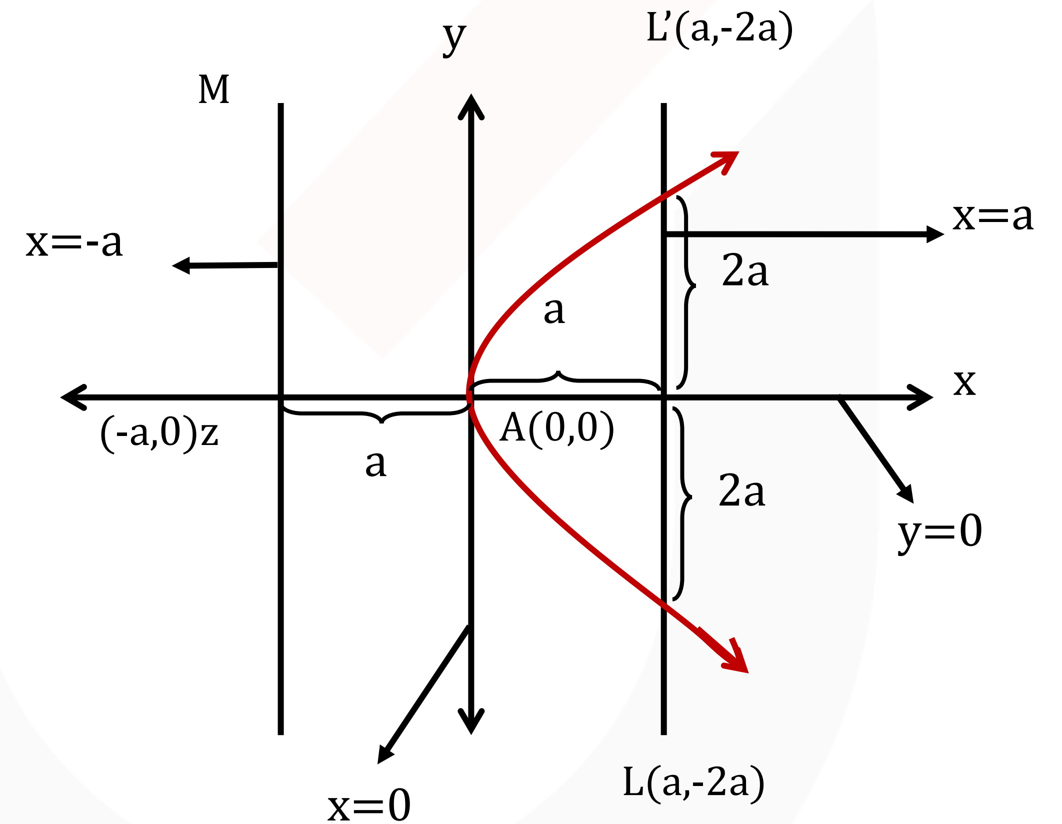
$$\Rightarrow 3y^2 - 12y = 10x + 18$$

$$\Rightarrow 3(y^2 - 4y) = 10x + 18$$

$$\Rightarrow 3(y^2 - 2.y.2 + 2^2) = 10x + 18 + 12$$

$$\Rightarrow 3(y-2)^2 = 10x + 30$$

$$\Rightarrow 3(y-2)^2 = 10(x+3)$$



Problems

3. $3y^2 - 10x - 12y - 18 = 0$ **পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্ব, অক্ষরেখা ও নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।**

সমাধানঃ

$$\Rightarrow (y-2)^2 = \frac{10}{3}(x+3)$$

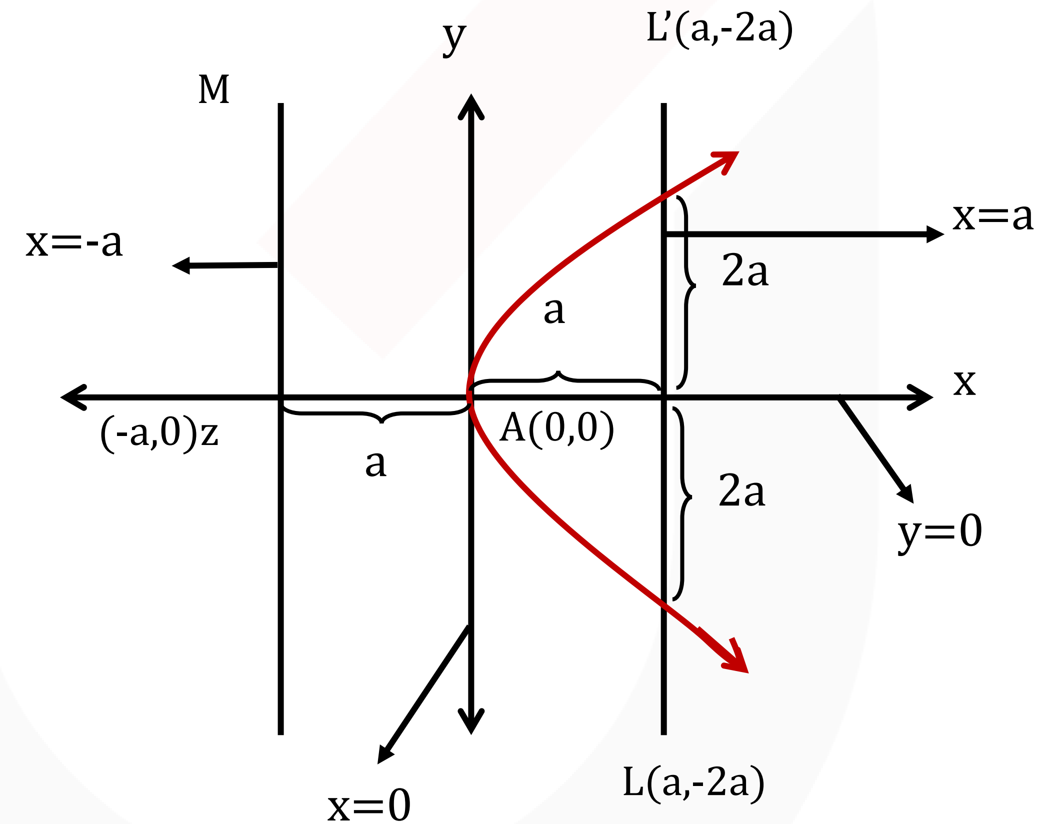
$$\Rightarrow (y-2)^2 = 4.\frac{10}{4.3}(x+3)$$

$$\Rightarrow (y-2)^2 = 4.\frac{5}{6}(x+3)$$

$$\Rightarrow Y^2 = 4AX$$

যেখানে,

$$Y = y-2\,,\ A = \frac{5}{6}\,,\ X = x+3$$



Problems

3. $3y^2 - 10x - 12y - 18 = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্ব, অক্ষরেখা ও নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

রাশিমালা নির্ণয়

সমাধানঃ

শীর্ষবিন্দু (A) নির্ণয়ঃ

$X = 0$ এবং $Y = 0$

$\Rightarrow x + 3 = 0$ | $\Rightarrow y - 2 = 0$

$\therefore x = -3$ | $\therefore y = 2$

$\therefore A(-3, 2)$

উপকেন্দ্র (S) নির্ণয়ঃ

$X = A$ এবং $Y = 0$

$\Rightarrow x + 3 = \frac{5}{6}$ | $\Rightarrow y - 2 = 0$

$\therefore x = -\frac{13}{6}$ $\quad \therefore y = 2$

$\therefore S(-\frac{13}{6}, 2)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণঃ

$X = A \Rightarrow x + 3 = \frac{5}{6} \Rightarrow x = -\frac{13}{6} \quad \therefore 6x + 13 = 0$

অক্ষরেখার সমীকরণঃ

$Y = 0 \Rightarrow y - 2 = 0 \quad \therefore y = 2$

নিয়ামক রেখার সমীকরণঃ

$X = -A \Rightarrow x + 3 = \frac{-5}{6} \Rightarrow x = -\frac{23}{6} \quad \therefore 6x + 23 = 0$

Problems

4. $y^2 = 4y + 4x - 8$ **পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্ব, অক্ষরেখা ও নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।**

সমাধানঃ

$$y^2 = 4y + 4x - 8$$

$$\Rightarrow y^2 - 4y = 4x - 8$$

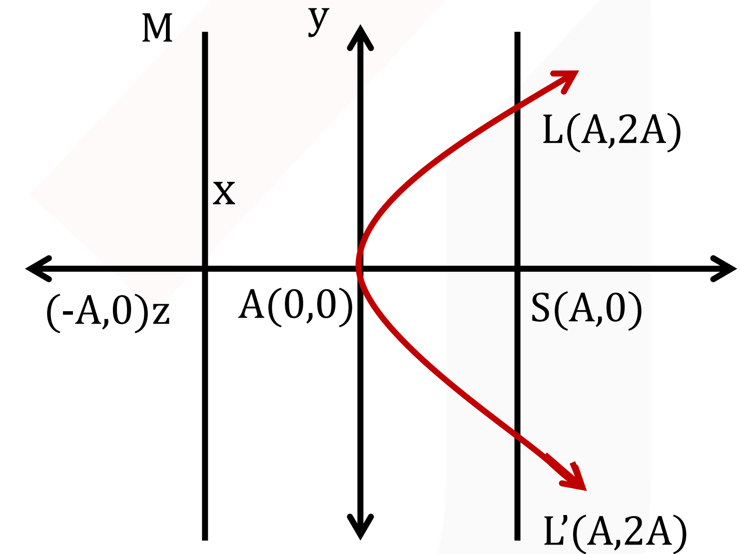
$$\Rightarrow y^2 - 2.y.2 + 2^2 = 4x - 8 + 4$$

$$\Rightarrow (y-2)^2 = 4x - 4$$

$$\Rightarrow (y-2)^2 = 4(x-1)$$

$$\Rightarrow (y-2)^2 = 4.1(x-1)$$

$$\Rightarrow Y^2 = 4AX$$



যেখানে,

$$Y = y - 2,\ A = 1,\ X = x - 1$$

Problems

4. $y^2 = 4y + 4x - 8$ **পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্ব, অক্ষরেখা ও নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।**

সমাধানঃ

রাশিমালা নির্ণয়

শীর্ষবিন্দু (A) নির্ণয়ঃ

$X = 0$ এবং $Y = 0$

$\Rightarrow x - 1 = 0$ | $\Rightarrow y - 2 = 0$

$\therefore x = 1$ | $\therefore y = 2$

$\therefore A(1, 2)$

উপকেন্দ্র (S) নির্ণয়ঃ

$X = A$ এবং $Y = 0$

$\Rightarrow x - 1 = 1$ $\quad \Rightarrow y - 2 = 0$

$\therefore x = 2$ $\quad \therefore y = 2$

$\therefore S(2, 2)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণঃ

$X = A \Rightarrow x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2 \quad \therefore x - 2 = 0$

অক্ষরেখার সমীকরণঃ

$Y = 0 \Rightarrow y - 2 = 0 \quad \therefore y = 2$

নিয়ামক রেখার সমীকরণঃ

$X = -A \Rightarrow x - 1 = -1 \quad \therefore x = 0$

Problems

4. $y^2 = 4y + 4x - 8$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্ব, অক্ষরেখা ও নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

প্রশ্ন বহির্ভূত অতিরিক্ত রাশিমালা নির্ণয়

নিয়ামক রেখার পাদবিন্দু নির্ণয়ঃ

$X = -A$ এবং $Y = 0$

$\Rightarrow x - 1 = -1$ | $\Rightarrow y - 2 = 0$

$\therefore x = 0$ | $\therefore y = 2$

$\therefore Z(0, 2)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের পাদবিন্দুঃ

$X = A$ এবং $Y = \pm 2A$

$\Rightarrow x - 1 = 1$ $\quad$ $\Rightarrow y - 2 = \pm 2.1$

$\therefore x = 2$ $\quad$ $\therefore y = 4, 0$

$\therefore L(2, 4)$ এবং $L'(2, 0)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্যঃ

$\therefore \mathrm{LL}' = 4\mathrm{a} = 4.1 = 4$

শীর্ষে স্পর্শকের সমীকরণঃ

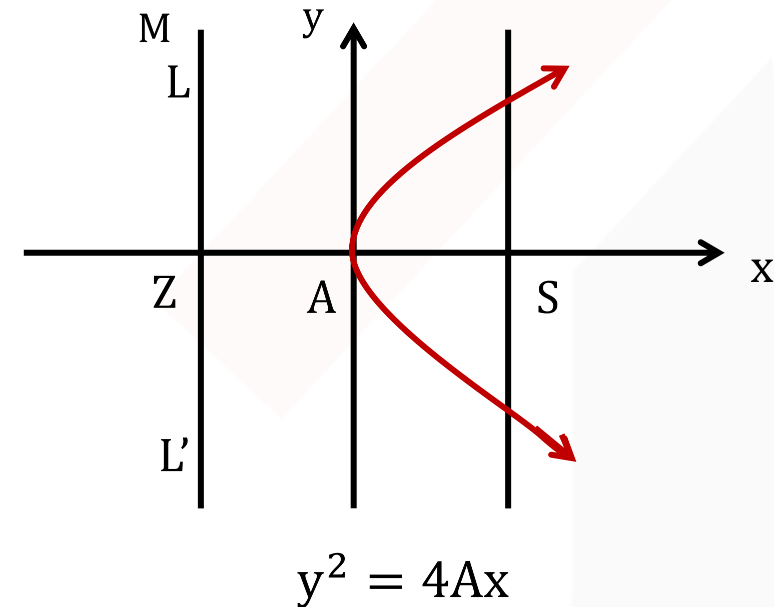
$X = 0$

$\therefore x - 1 = 0$

Problems

5. $y^2 + 8x - 2y - 23 = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্ব, অক্ষরেখা ও নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ



$y^2 = 4Ax$

$$y^2+8x-2y-23=0$$

$$\Rightarrow y^2-2y = 23-8x$$

$$\Rightarrow y^2-2.y.1+1^2 = 23-8x+1$$

$$\Rightarrow (y-1)^2 = -8(x-3)$$

$$\Rightarrow (y-1)^2 = 4.(-2)(x-3)$$

$$\Rightarrow Y^2 = 4AX$$

যেখানে,

$Y = y-1$, $A = -2$, $X = x-3$

Problems

5. $y^2 + 8x - 2y - 23 = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্ব, অক্ষরেখা ও নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

রাশিমালা নির্ণয়

সমাধানঃ

শীর্ষবিন্দু (A) নির্ণয়ঃ

$X = 0$ এবং $Y = 0$

$\Rightarrow x - 3 = 0$ | $\Rightarrow y - 1 = 0$

$\therefore x = 3$ | $\therefore y = 1$

$\therefore A(3, 1)$

উপকেন্দ্র (S) নির্ণয়ঃ

$X = A$ এবং $Y = 0$

$\Rightarrow x - 3 = -2$ $\quad \Rightarrow y - 1 = 0$

$\therefore x = 1$ $\quad \therefore y = 1$

$\therefore S(1, 1)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণঃ

$X = A \quad \Rightarrow x - 3 = -2 \quad \Rightarrow x = 1 \quad \therefore x - 1 = 0$

অক্ষরেখার সমীকরণঃ

$Y = 0 \quad \Rightarrow y - 1 = 0 \quad \therefore y = 1$

নিয়ামক রেখার সমীকরণঃ

$X = -A \quad \Rightarrow x - 3 = -(-2) \quad \therefore x - 5 = 0$

Problems

6. $x^2 + 2y - 8x + 7 = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্ব, অক্ষরেখা ও নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

$$x^2 + 2y - 8x + 7 = 0$$

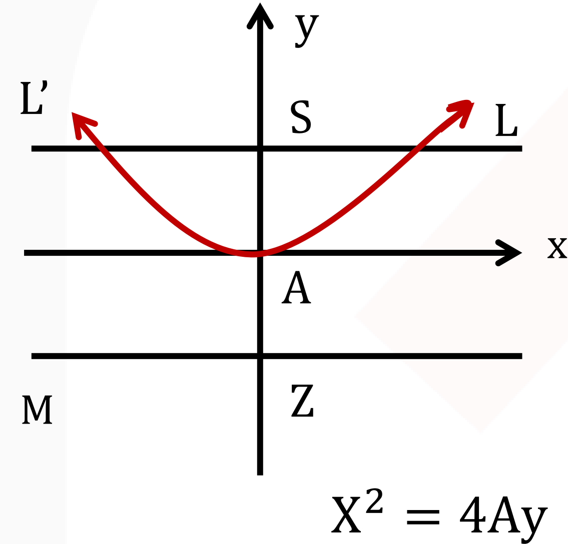
$$\Rightarrow x^2 - 8x = -2y - 7$$

$$\Rightarrow x^2 - 2.x.4 + 16 = -2y - 7 + 16$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 = -2y + 9$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 = -2\left(y - \frac{9}{2}\right)$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 = 4.\left(-\frac{1}{2}\right).\left(y - \frac{9}{2}\right)$$



$$X^2 = 4Ay$$

$$\Rightarrow X^2 = 4AY$$

যেখানে, $X = x - 4$, $A = -\frac{1}{2}$, $Y = y - \frac{9}{2}$

Problems

6. $x^2 + 2y - 8x + 7 = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্ব, অক্ষরেখা ও নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

রাশিমালা নির্ণয়

সমাধানঃ

শীর্ষবিন্দু (A) নির্ণয়ঃ

$X = 0$ এবং $Y = 0$

$\Rightarrow x - 4 = 0$ | $\Rightarrow y - \frac{9}{2} = 0$

$\therefore x = 4$ | $\therefore y = \frac{9}{2}$

$\therefore A\left(4, \frac{9}{2}\right)$

উপকেন্দ্র (S) নির্ণয়ঃ

$X = 0$ এবং $Y = A$

$\Rightarrow x - 4 = 0$ $\quad \Rightarrow y - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}$

$\therefore x = 4$ $\quad \therefore y = 4$

$\therefore S(4, 4)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণঃ

$Y = A \quad \Rightarrow y - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow y = 4 \quad \therefore y - 4 = 0$

অক্ষরেখার সমীকরণঃ

$X = 0 \quad \Rightarrow x - 4 = 0 \quad \therefore x = 4$

নিয়ামক রেখার সমীকরণঃ

$Y = -A \quad \Rightarrow y - \frac{9}{2} = -\left(-\frac{1}{2}\right) \quad \therefore y - 5 = 0$

Problems

7. $(x-4)^2 = -4(y-5)$ **পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্ব, অক্ষরেখা ও নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।**

সমাধানঃ

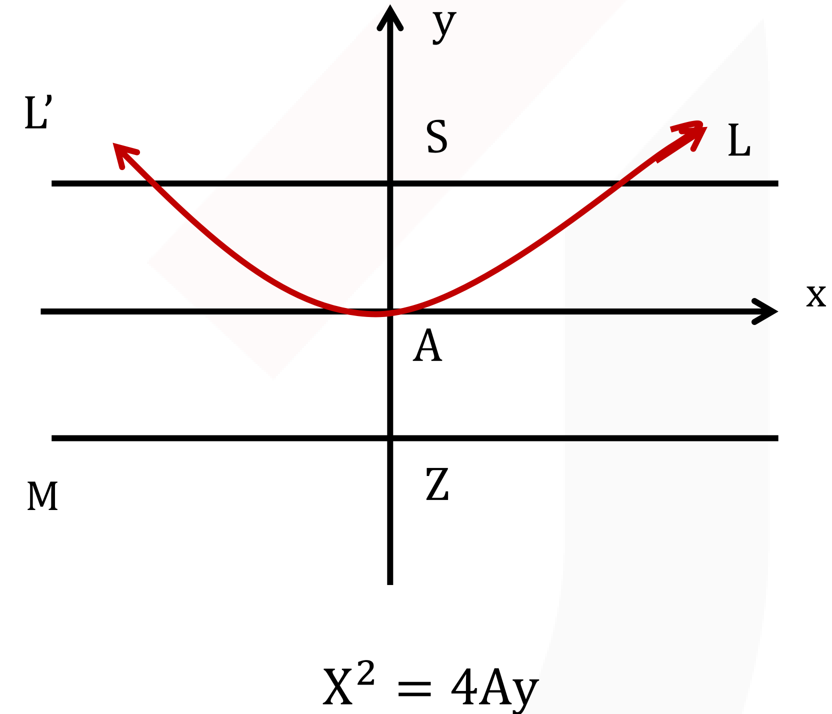
$$(x-4)^2 = -4(y-5)$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 = 4.(-1).(y-5)$$

$$\Rightarrow \mathrm{X}^2 = 4\mathrm{AY}$$

যেখানে,

$$\mathrm{X} = \mathrm{x} - 4\,,\ \mathrm{A} = -1\,,\ \mathrm{Y} = \mathrm{y} - 5$$



Problems

7. $(x-4)^2 = -4(y-5)$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্ব, অক্ষরেখা ও নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

রাশিমালা নির্ণয়

সমাধানঃ

শীর্ষবিন্দু (A) নির্ণয়ঃ

$X = 0$ এবং $Y = 0$

$\Rightarrow x - 4 = 0$ | $\Rightarrow y - 5 = 0$

$\therefore x = 4$ | $\therefore y = 5$

$\therefore A(4, 5)$

উপকেন্দ্র (S) নির্ণয়ঃ

$X = 0$ এবং $Y = A$

$\Rightarrow x - 4 = 0$ $\quad \Rightarrow y - 5 = -1$

$\therefore x = 4$ $\quad \therefore y = 4$

$\therefore S(4, 4)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণঃ

$Y = A \Rightarrow y - 5 = -1 \Rightarrow y = 4 \quad \therefore y - 4 = 0$

অক্ষরেখার সমীকরণঃ

$X = 0 \Rightarrow x - 4 = 0 \quad \therefore x = 4$

নিয়ামক রেখার সমীকরণঃ

$Y = -A \Rightarrow y - 5 = -(-1) \quad \therefore y - 6 = 0$

Problems

8. $5x^2 + 15x - 10y - 4 = 0$ **পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্ব, অক্ষরেখা ও নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।**

সমাধানঃ

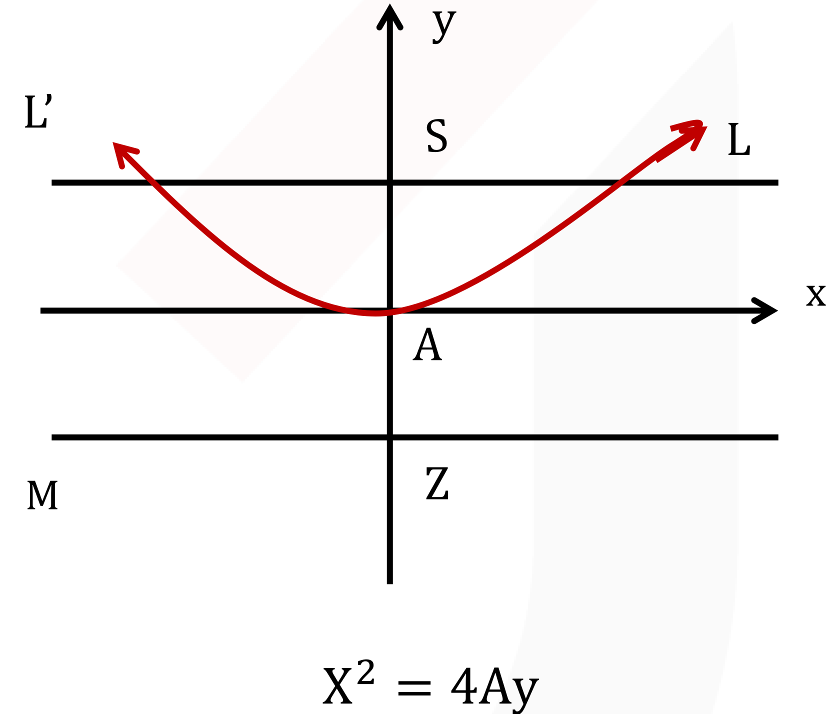
$$5x^2 + 15x - 10y - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 5x^2 + 15x = 10y + 4$$

$$\Rightarrow 5(x^2 + 3x) = 10y + 4$$

$$\Rightarrow 5\left(x^2 + 2.x.\frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) = 10y + 4 + \frac{45}{4}$$

$$\Rightarrow 5\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 10y + \frac{61}{4}$$



Problems

8. $5x^2 + 15x - 10y - 4 = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্ব, অক্ষরেখা ও নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

$$\Rightarrow 5\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 10\left(y + \frac{61}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 2\left(y + \frac{61}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{4.1}{2}\left(y + \frac{61}{4}\right)$$

$$\Rightarrow X^2 = 4AY$$

যেখানে,

$$X = x + \frac{3}{2}\ ,\ A = \frac{1}{2}\ ,\ Y = y + \frac{61}{40}$$

Problems

8. $5x^2 + 15x - 10y - 4 = 0$ **পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্ব, অক্ষরেখা ও নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।**

সমাধানঃ

শীর্ষবিন্দু (A) নির্ণয়ঃ

$X = 0$ এবং $Y = 0$

$\Rightarrow x + \frac{3}{2} = 0 \qquad \Rightarrow y + \frac{61}{40} = 0$

$\therefore x = -\frac{3}{2} \qquad \therefore y = -\frac{61}{40}$

$\therefore A\left(-\frac{3}{2}, -\frac{61}{40}\right)\left(4, \frac{9}{2}\right)$

উপকেন্দ্র (S) নির্ণয়ঃ

$X = 0$ এবং $Y = A$

$\Rightarrow x + \frac{3}{2} = 0 \qquad \Rightarrow y + \frac{61}{40} = \frac{1}{2}$

রাশিমালা নির্ণয়

$\therefore x = -\frac{3}{2} \qquad \therefore y = -\frac{61}{40}$

$\therefore S\left(-\frac{3}{2}, -\frac{61}{40}\right)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণঃ

$Y = A \quad \Rightarrow y + \frac{61}{40} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow y + \frac{41}{40} = 0 \quad \therefore 40y + 41 = 0$

অক্ষরেখার সমীকরণঃ

$X = 0 \quad \Rightarrow x + \frac{3}{2} = 0 \quad \therefore 2x + 3 = 0$

নিয়ামক রেখার সমীকরণঃ

$Y = -A \quad \Rightarrow y + \frac{61}{40} = -\frac{1}{2} \quad \therefore 40y + 81 = 0$

Problems

9. $y^2 = 8x + 5$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

$$y^2 = 8x + 5$$

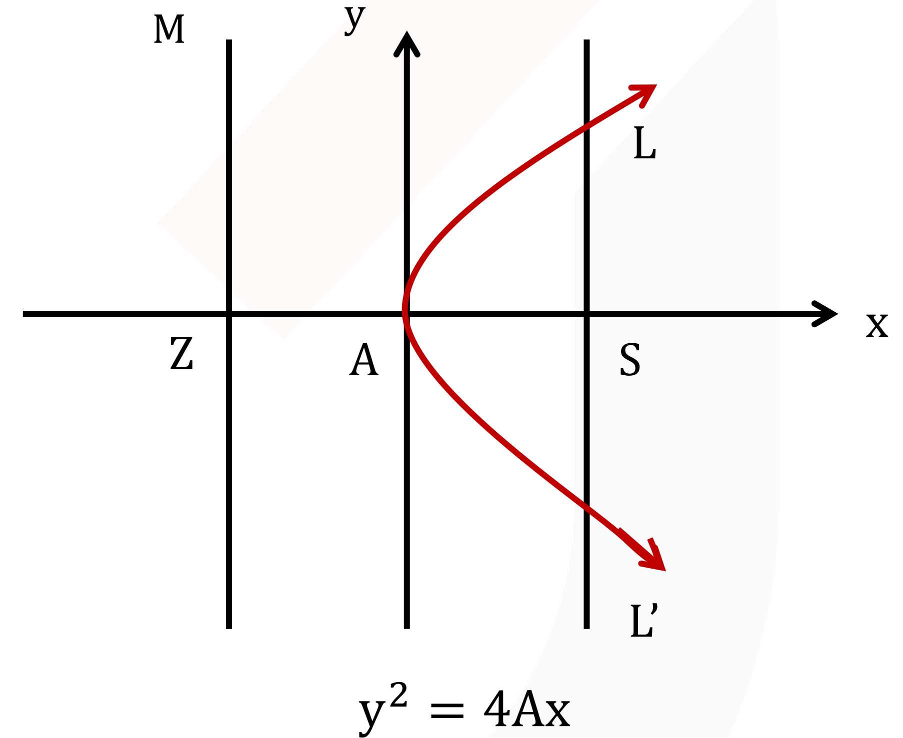
$$\Rightarrow y^2 = 8\left(x + \frac{5}{8}\right)$$

$$\Rightarrow y^2 = 4.2\left(x + \frac{5}{8}\right)$$

$$\Rightarrow y^2 = 4AX$$

যেখানে,

$$X = x + \frac{5}{8}\ ,\ A = 2$$



Problems

9. $y^2 = 8x + 5$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

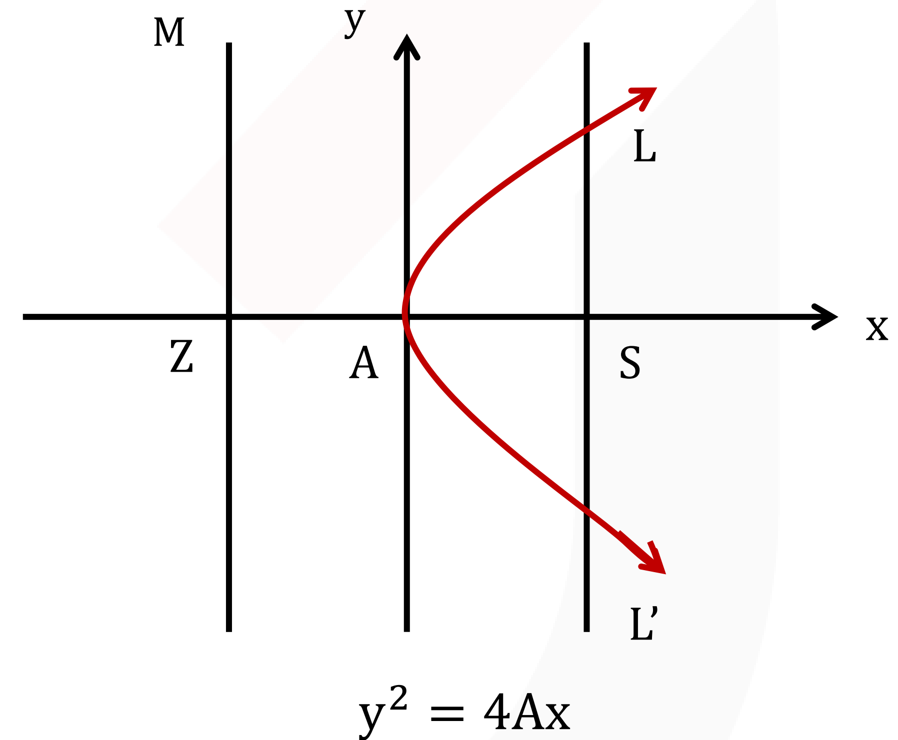
সমাধানঃ

শীর্ষবিন্দু (A) নির্ণয়ঃ

$X = 0$ এবং $Y = 0$

$\Rightarrow x + \frac{5}{8} = 0$ $\qquad \Rightarrow y = 0$

$\therefore A\left(-\frac{5}{8}, 0\right)$



উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্যঃ

$LL' = 4a = 4.2 = 8$

Problems

10. $y^2 = 8y + 5x$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

$$y^2 = 8y + 5x$$

$$\Rightarrow y^2 - 8y = 5x$$

$$\Rightarrow y^2 - 2.y.4 + 16 = 5x + 16$$

$$\Rightarrow (y-4)^2 = 5\left(x + \frac{16}{5}\right)$$

$$\Rightarrow (y-4)^2 = \frac{4.5}{4}\left(x + \frac{16}{5}\right)$$

$$\Rightarrow y^2 = 4AX$$

যেখানে, $X = x + \frac{16}{5}$, $A = \frac{5}{4}$, $Y = y - 4$

শীর্ষবিন্দু (A) নির্ণয়ঃ

$X = 0$ এবং $Y = 0$

$\Rightarrow x + \frac{16}{5} = 0$ $\quad \Rightarrow y - 4 = 0$

$$\therefore A\left(-\frac{16}{5}, 4\right)$$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্যঃ

$$LL' = 4a = \frac{4.5}{4} = 5$$

Problems

11. $y^2 = 4(x-2)$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

$$y^2 = 4(x-2)$$

$$\Rightarrow y^2 = 4.1(x-2)$$

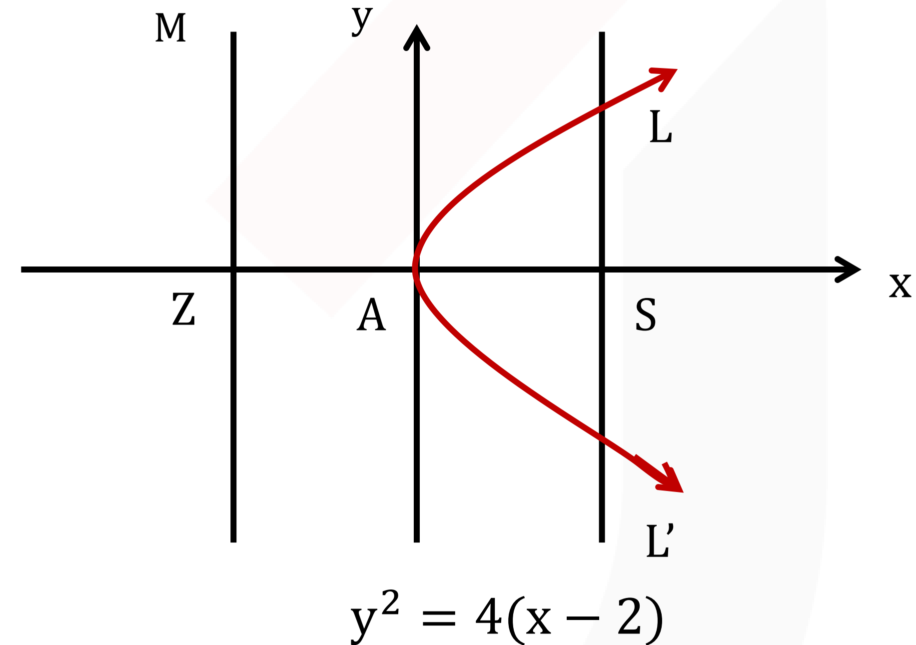
শীর্ষবিন্দু (A) নির্ণয়ঃ

$X = 0$ এবং $Y = 0$

$\Rightarrow x - 2 = 0$	$\Rightarrow y = 0$
$\therefore x = 2$	$\therefore y = 0$

$$\therefore A(2, 0)$$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্যঃ $LL' = 4a = 4.1 = 4$



Problems

12. $x^2 = 4(1-y)$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র ও নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

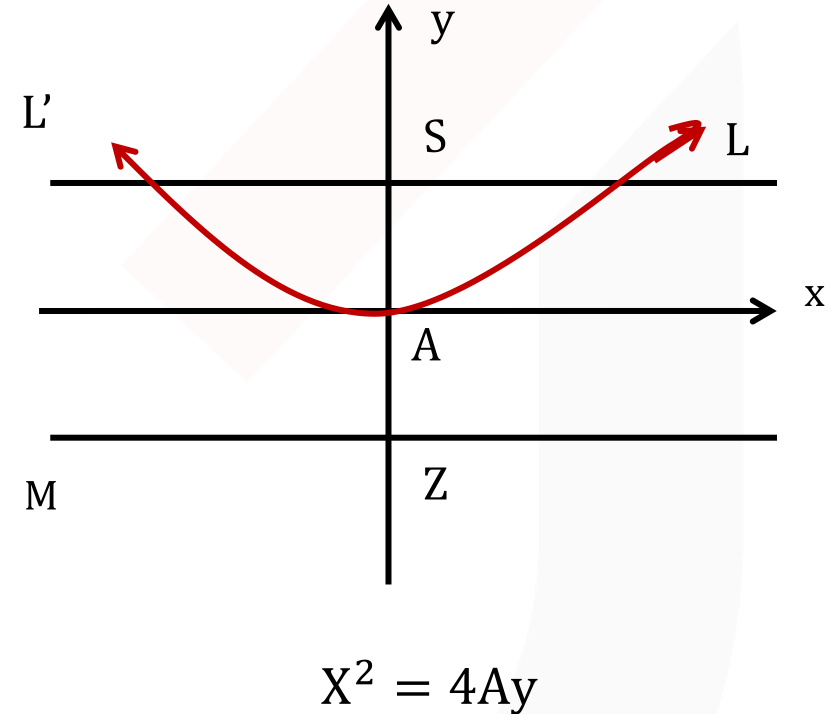
$$x^2 = 4(1-y)$$

$$\Rightarrow x^2 = 4.(-1)(y-1)$$

$$\Rightarrow X^2 = 4AY$$

যেখানে,

$X = 0$, $A = -1$, $Y = y - 1$



Problems

12. $x^2 = 4(1 - y)$ **পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র ও নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।**

সমাধানঃ

রাশিমালা নির্ণয়

শীর্ষবিন্দু (A) নির্ণয়ঃ

$X = 0$ এবং $Y = 0$

$\Rightarrow x = 0$ | $\Rightarrow y - 1 = 0$

$\therefore x = 0$ | $\therefore y = 1$

$\therefore A(0, 1)$

উপকেন্দ্র (S) নির্ণয়ঃ

$X = 0$ এবং $Y = A$

$\Rightarrow x = 0$ $\Rightarrow y - 1 = -1$

$\therefore x = 0$ $\therefore y = 0$

$\therefore S(0, 0)$

নিয়ামক রেখার সমীকরণঃ

$\mathrm{Y} = -A \Rightarrow y - 1 = -(-1) \therefore y - 2 = 0$

পরাবৃত্ত

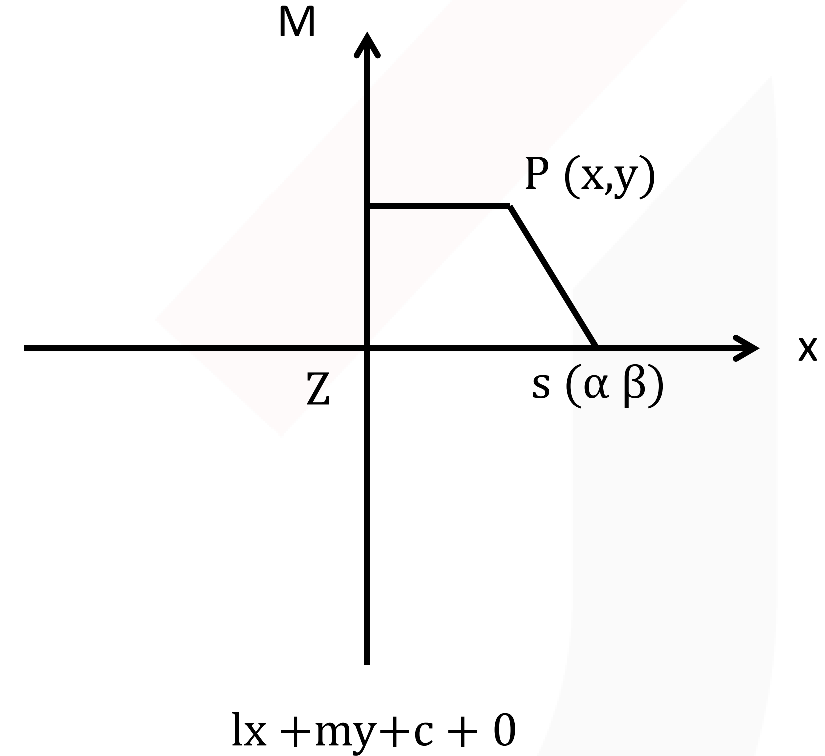
পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়ঃ

- উপকেন্দ্র
- নিয়ামক রেখা
- শীর্ষবিন্দু

সাধারণত এই তথ্যগুলোর মধ্যে দুটি/তিনটি তথ্য দেয়া থাকে।

পরাবৃত্তের ক্ষেত্রে , $\frac{SP}{PM} = e$

$e = 1$ হলে, $\frac{SP}{PM} = 1 \quad \therefore \boldsymbol{SP = PM}$



Problems

13. $MZ \Rightarrow x - 1 = 0$, উপকেন্দ্র $S(4, 1)$ এক্ষেত্রে পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

$$SP = PM$$

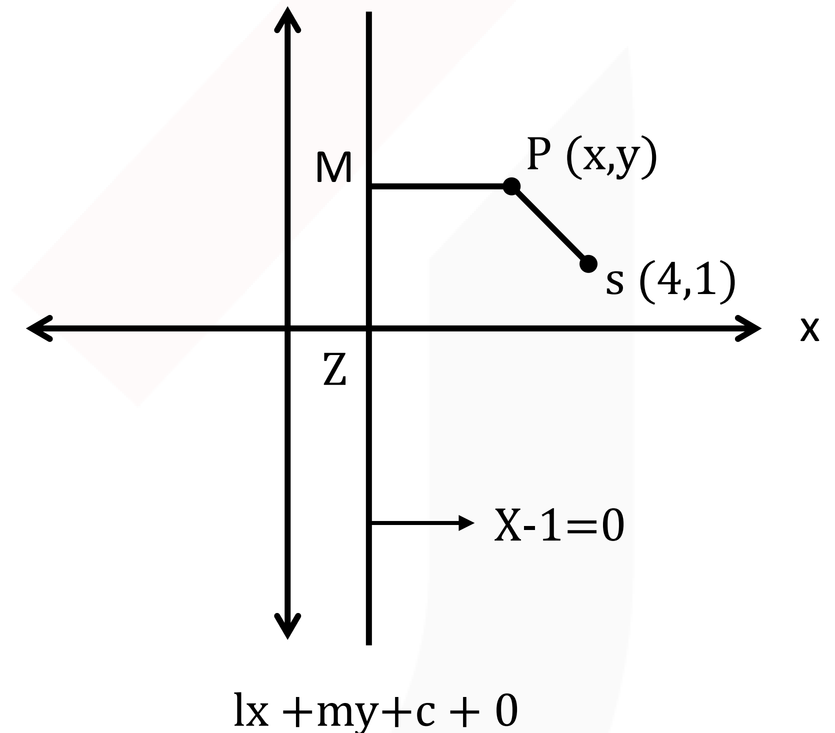
$$\Rightarrow \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2} = \frac{|x-1|}{\sqrt{1^2}}$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 + (y-1)^2 = (x-1)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y = x^2 - 2x + 1$$

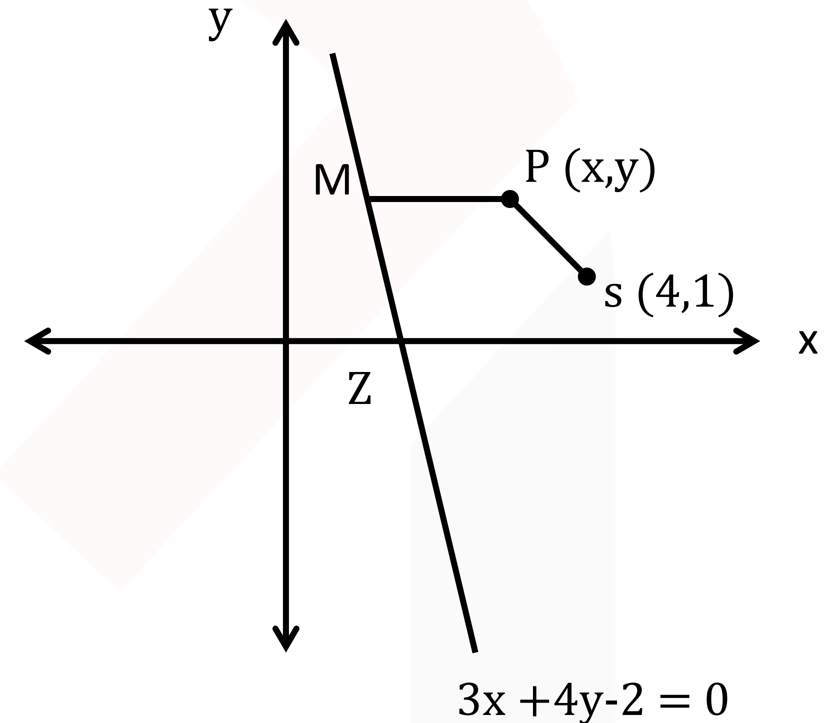
$$\Rightarrow y^2 - 2y = 6x - 16$$

$$\therefore y^2 - 2y - 6x + 16 = 0 \ \ (Ans:)$$



Problems

14. এক্ষেত্রে পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।



$$SP = PM$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2} = \frac{|3x+4y-21|}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

$$\Rightarrow (x-4)^2+(y-1)^2 = \frac{(3x+4y-21)^2}{25}$$

$$\Rightarrow (x-4)^2+(y-1)^2 = \frac{9x^2+16y^2+4+24xy-16y-12x}{25}$$

$$\Rightarrow 25(x^2-8x+16y^2-2y+1) = 9x^2+16y^2+4+24xy-16y-12x$$

$$\therefore 16x^2+9y^2-24xy-188x-34y+421=0\ (\boldsymbol{Ans:})$$

Problems

15. একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র $(2,5)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং $x = 4$ রেখাটি এর শীর্ষবিন্দু স্পর্শ করে

সমাধানঃ

দেওয়া আছে,

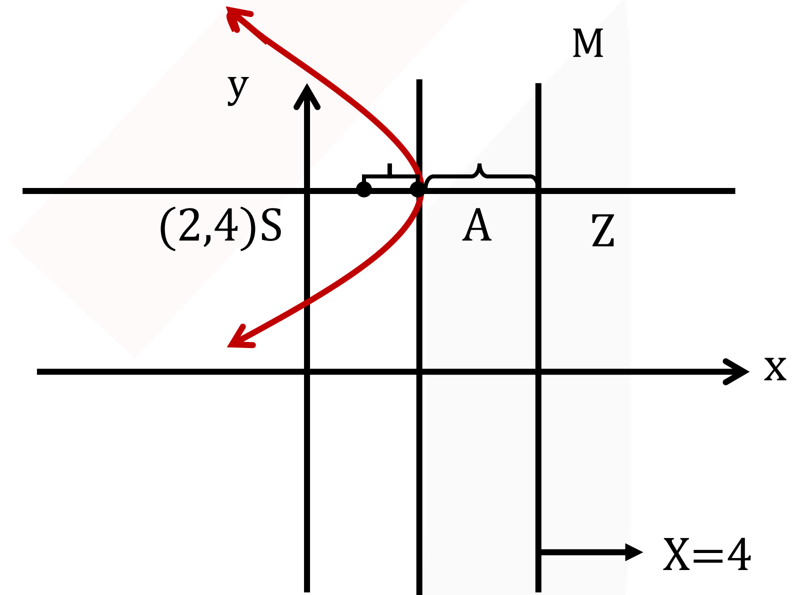
উপকেন্দ্র $S(2,5)$

শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শক ও নিয়ামকরেখা পরস্পর সমান্তরাল।

ধরি,

নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $x = k \Rightarrow x - k = 0$

উপকেন্দ্র $S(2,5)$ হতে নিয়ামক রেখার লম্ব দূরত্ব উপকেন্দ্র হতে প্রদত্ত স্পর্শকের ওপর লম্ব দূরত্বের দ্বিগুণ।



Problems

15. একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র $(2,5)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং $x = 4$ রেখাটি এর শীর্ষবিন্দু স্পর্শ করে

সমাধানঃ

$$\therefore \frac{|2-k|}{\sqrt{1^2}} = 2.\frac{|2-4|}{\sqrt{1^2}}$$

$$\Rightarrow |2-k| = 4 \quad \Rightarrow 2-k = \pm 4 \quad \Rightarrow k = 6\ [k \neq 2]$$

নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $x = 6$

পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$$\Rightarrow \sqrt{(x-y)^2 + (y-5)^2} = \frac{|x-6|}{\sqrt{1^2}}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 10y + 29 = x^2 - 12x + 36$$

$$\therefore y^2 - 10y + 8x - 7 = 0\ (\boldsymbol{Ans}:)$$

Problems

16. উপকেন্দ্র এবং শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে $(3,4),(0,0)$ । নিয়ামক রেখা ও পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

দেওয়া আছে,

উপকেন্দ্র $S(2,5)$ এবং শীর্ষবিন্দু $A(0,0)$

ধরি,

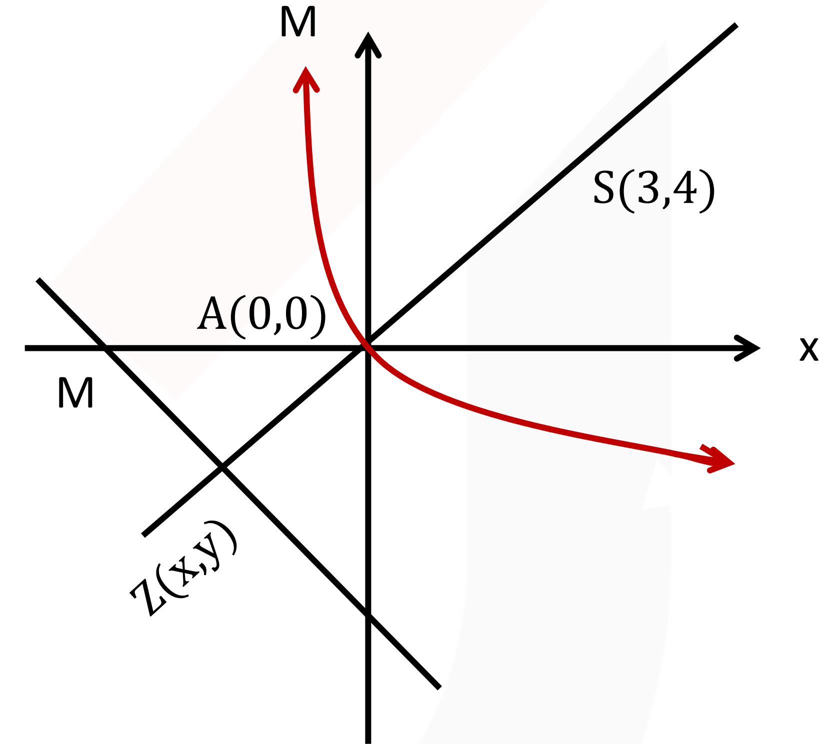
Z বিন্দুর স্থানাংক $Z(x_1,y_1)$

$\therefore \frac{x_1+3}{2}=0$ এবং $\frac{y_1+4}{2}=0$

$\Rightarrow x_1=-3 \quad \Rightarrow y_1=-4$

Zs রেখার সমীকরণ, $\frac{x-0}{0-3}=\frac{y-0}{0-4}$

$\Rightarrow \frac{x}{-3}=\frac{y}{-4} \quad \therefore 4x-3y=0$ —— (1)



Problems

16. উপকেন্দ্র এবং শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে $(3, 4), (0, 0)$ । নিয়ামক রেখা ও পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

অক্ষরেখা ও নিয়ামক রেখা পরস্পর লম্ব ।

ধরি,

নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $3x + 4y + k = 0$, যা $Z(-3, -4)$ বিন্দুগামী

$\therefore 3(-3) + 4(-4) + k = 0 \quad \Rightarrow k = 25$

নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $3x + 4y + 25 = 0$

আবার , পরাবৃত্তের উপর যেকোন বিন্দু $P(x, y)$

Problems

16. উপকেন্দ্র এবং শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে $(3,4),(0,0)$ । নিয়ামক রেখা ও পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$$SP \perp PM$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2} = \frac{|3x+4y+25|}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

$$\Rightarrow 25\{(x-3)^2+(y-4)^2\} = 9x^2+16y^2+625+24xy+150x+200$$

$$\Rightarrow 25x^2+25y^2-150x+200y+625 = 9x^2+16y^2 = 24xy+150x+200y+625$$

$$\therefore 16x^2+9y^2-300x-400y-24xy = 0 \ \ (\boldsymbol{Ans}:)$$

Problems

17. $(-8,-2)$ **উপকেন্দ্র এবং** $2x-y-9=0$ **নিয়ামক রেখা বিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।**

সমাধানঃ

$MZ \Rightarrow 2x-y-9=0,$ উপকেন্দ্র $S(-8,-2)$

ধরি , পরাবৃত্তের উপর যেকোন বিন্দু $P(x,y)$

পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$$SP = PM$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+8)^2+(y+2)^2} = \frac{|2x-y-9|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$$\Rightarrow (x+8)^2+(y+2)^2 = \frac{(2x-y-9)^2}{5}$$

$$\Rightarrow 5x^2+80x+5y^2+20y+340 = 4x^2-y^2-81-4xy-36x+18y$$

$$\therefore x^2+4y^2+116x+2y+4xy+421=0 \ \ (\boldsymbol{Ans:})$$

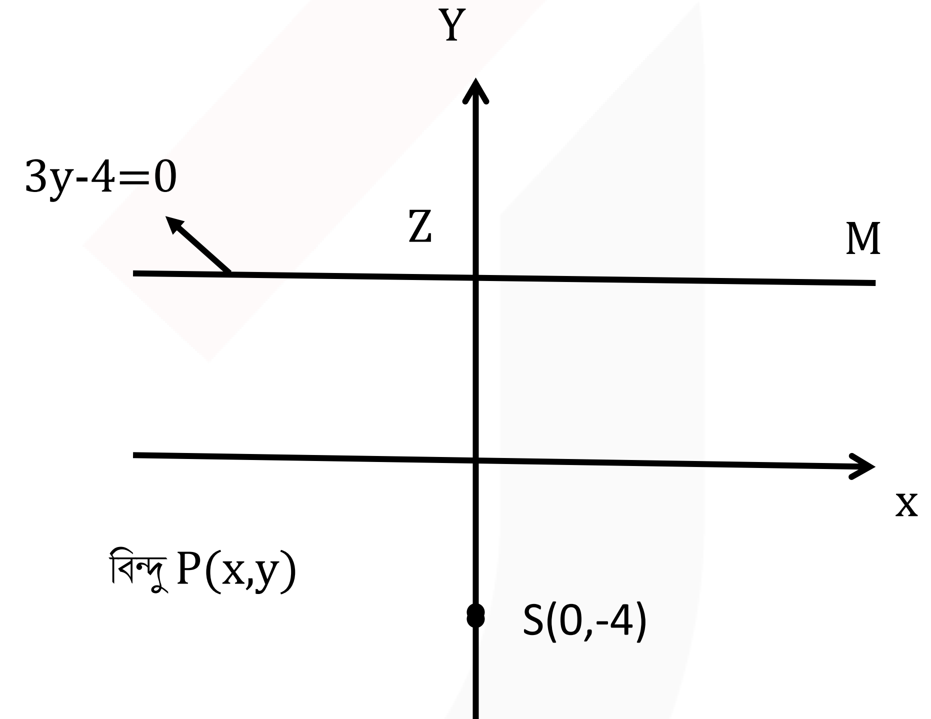
Problems

18. $(0,-4)$ উপকেন্দ্র এবং $3y-4=0$ নিয়ামক রেখা বিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

$MZ \Rightarrow 3y-4=0$, উপকেন্দ্র $S(0,-4)$

ধরি , পরাবৃত্তের উপর যেকোন বিন্দু $P(x,y)$



পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$$SP = PM$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+0)^2+(y+4)^2} = \frac{|3y-4|}{\sqrt{3^2}}$$

$$\Rightarrow (x+0)^2+(y+4)^2 = \frac{(3y-4)^2}{9}$$

$$\Rightarrow 9x^2+9y^2+72y+144 = 9y^2-24y+16$$

$$\therefore 9x^2+96y+128=0 \ \ (\boldsymbol{Ans:})$$

Problems

19. $(2,0)$ উপকেন্দ্র এবং $x+2=0$ নিয়ামক রেখা বিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

$$MZ \Rightarrow x+2=0,\ \text{উপকেন্দ্র}\ S(2,0)$$

ধরি , পরাবৃত্তের উপর যেকোন বিন্দু $P(x,y)$

পরাবৃত্তের সমীকরণ,

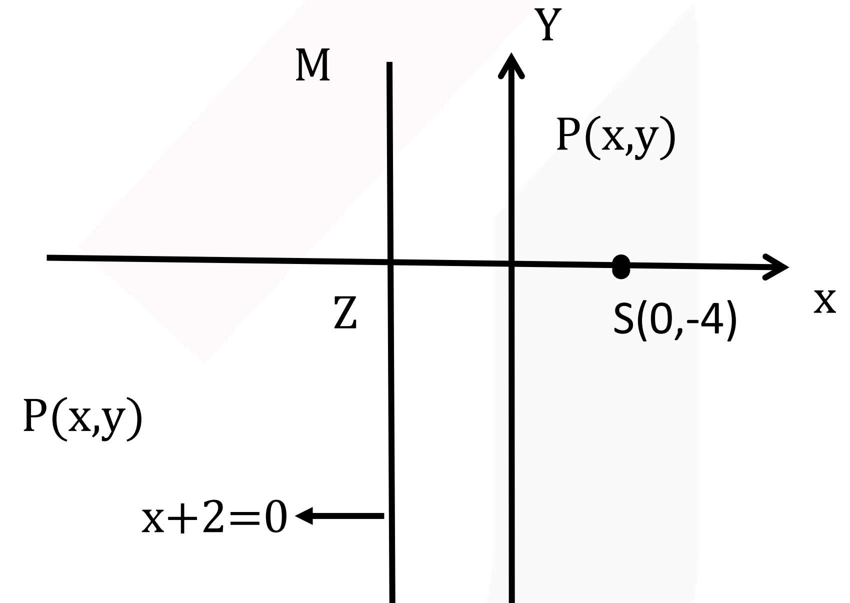
$$SP = PM$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2} = \frac{|x+2|}{\sqrt{1^2}}$$

$$\Rightarrow (x-2)^2+(y-0)^2 = \frac{(x+2)^2}{1}$$

$$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2 = x^2+4x+4$$

$$\therefore y^2-8x=0(\boldsymbol{Ans:})$$



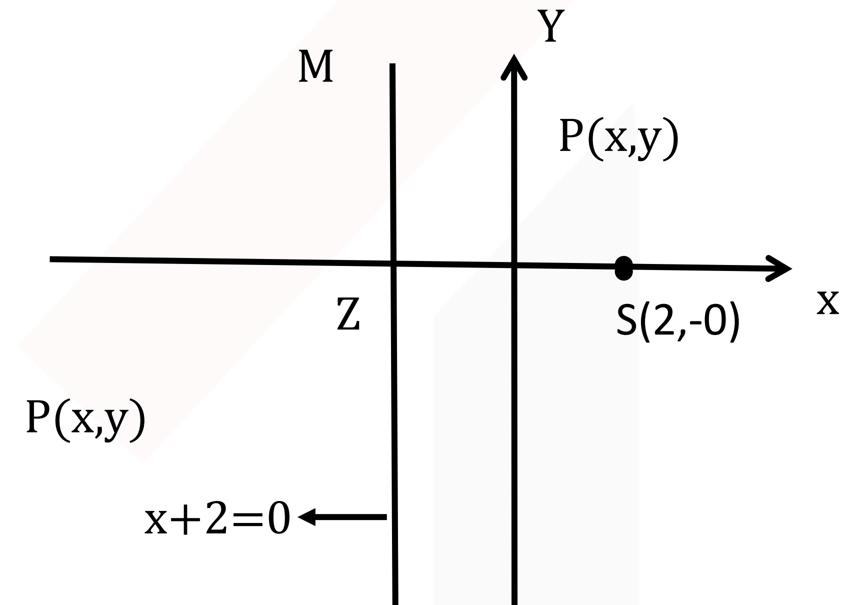
Problems

20. $(-1, 1)$ উপকেন্দ্র এবং $x + y + 1 = 0$ নিয়ামক রেখা বিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

$$MZ \Rightarrow x + y + 1 = 0, \text{ উপকেন্দ্র } S(-1, 1)$$

ধরি , পরাবৃত্তের উপর যেকোন বিন্দু $P(x, y)$



পরাবৃত্তের সমীকরণ,

$$SP = PM$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \frac{|x + y + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}}$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = \frac{x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y}{2}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4x - 4y + 4 = x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1$$

$$\therefore x^2 + y^2 + 2x - 6y + 3 = 0 (\boldsymbol{Ans:})$$

Problems

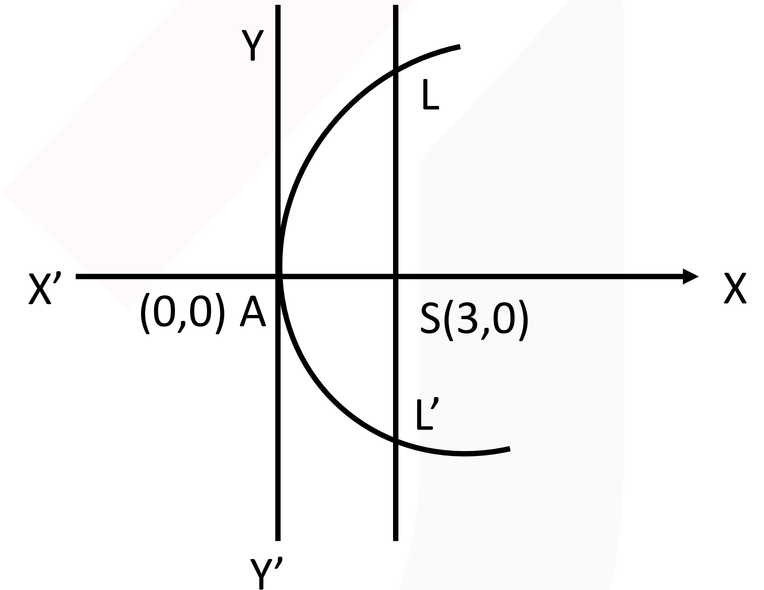
21. $y^2 = 12x$ **পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু ও উপকেন্দ্রিক লম্বের ধনাত্মক দিকের প্রান্তবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।**

সমাধানঃ

$\therefore y^2 = 12x \quad \Rightarrow y^2 = 4.3.x$

$\therefore A(0,0) \quad S(3,0) \quad L(3,6)$

AL রেখার সমীকরণ, $y = \frac{6}{3}x \quad \therefore y = 2x$ (**Ans:**)



Problems

22. $y^2 = 4px$ পরাবৃত্তটি $(3, -2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে এর উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং উপকেন্দ্রের স্থানাংক নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

$\therefore y^2 = 4px$ যা $(3, -2)$ বিন্দুগামী

$$\Rightarrow (-2)^2 = 4.p.3 \Rightarrow p = \frac{1}{3} \quad \therefore y^2 = \frac{4.1}{3}x$$

উপকেন্দ্র $S\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ $(\boldsymbol{Ans}:)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য= $4a = \frac{4.1}{3} = \frac{4}{3}$ $(\boldsymbol{Ans}:)$

Problems

23. $y^2 = 12x$ পরাবৃত্তের উপর P একটি বিন্দু। x –অক্ষ হতে P-বিন্দুর দুরত্ব y-অক্ষ হতে তার দূরত্বের দ্বিগুণ হলে P বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

$$\therefore y^2 = 12x$$

ধরি, P- বিন্দুর স্থানাংক (x, y)

প্রশ্নমতে,

$$\therefore y_1 = 2|x_1| = \pm 2x_1$$

P- বিন্দুর স্থানাংক $(x_1, \pm 2x_1)$

$$\Rightarrow (\pm 2x_1)^2 = 12x_1 \quad \Rightarrow 4x_1^2 = 12x_1 \quad \therefore x_1 = 3$$

$$\therefore y_1 = \pm 2.3 = \pm 6$$

$\therefore$নির্ণেয় স্থানাংক $(3, 6)$ অথবা $(3, -6)$ $(\boldsymbol{Ans}:)$

Problems

24. $y^2 = 9x$ **পরাবৃত্তের উপরিস্থিত P বিন্দুর কোটি 12, P-বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দুরত্ব নির্ণয় কর।**

সমাধানঃ

$$\therefore y^2 = 9x$$

ধরি, P- বিন্দুর স্থানাংক (x_1, y_1)

$$\Rightarrow (12)^2 = 9x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{144}{9} = 16 \quad \therefore p(16, 12)$$

$$\therefore y^2 = 9x \quad \Rightarrow y^2 = \frac{4.9}{4}.x \quad \therefore a = \frac{9}{4}$$

উপকেন্দ্রিক দূরত্ব $= a + x = \frac{9}{4} + 16 = \frac{73}{4}$ $(\boldsymbol{Ans:})$

Problems

25. $y^2 = 8x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত কোন বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দুরত্ব 8 , ঐ বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

$$\therefore y^2 = 8x = 4.2.x$$

ধরি, P- বিন্দুর স্থানাংক (x_1, y_1)

$$\therefore x_1 + 2 = 8 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 6$$

$$\therefore y^2 = 8.6 = 48 = \pm 4\sqrt{3}$$

∴নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাংক $(6, \pm 4\sqrt{3})$

Problems

26. $y^2 = 16x$ **পরাবৃত্তের উপরিস্থিত কোন বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দুরত্ব 6 , ঐ বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর।**

সমাধানঃ

$$\therefore y^2 = 16x = 4.4.x$$

ধরি, P- বিন্দুর স্থানাংক (x_1, y_1)

$$\therefore 4 + x_1 = 6 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2$$

$$\therefore y_1^2 = 16.2 = 32 = \pm 4\sqrt{2}$$

∴নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাংক $(2, \pm 4\sqrt{2})$

Problems

27. $(2,3)$ শীর্ষ এবং $y = 6$ নিয়ামক রেখা বিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

নিয়ামক রেখা , $MZ \Rightarrow y = 6 \Rightarrow y - 6 = 0$

অক্ষরেখা ZS হলে, $ZS \perp MZ$

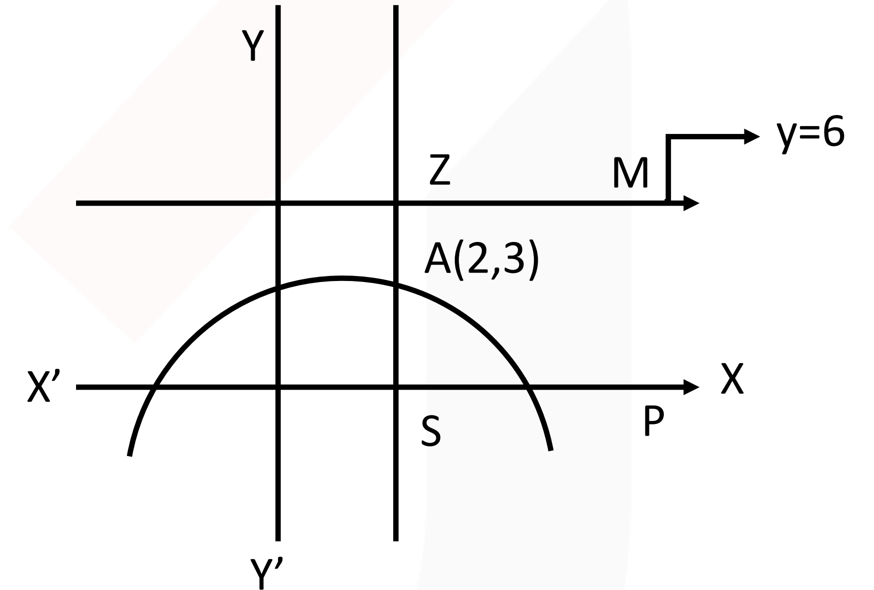
অক্ষরেখার সমীকরণ, $x + k = 0$ যা $(2,3)$ বিন্দুগামী

$\Rightarrow 2 + k = 0 \quad \therefore k = -2$

$\therefore ZS$ রেখার সমীকরণ, $x - 2 = 0 \quad \therefore x = 2$

আবার ZS এবং MZ রেখার ছেদবিন্দু , Z

যেখানে, $x = 2,\ y = 6 \quad \therefore Z(2,6)$



Problems

28. $(2,3)$ শীর্ষ এবং $y = 6$ নিয়ামক রেখা বিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

ধরি, পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রের স্থানাংক $S\,(x_1, y_1)$

$\frac{2+x_1}{2} = 2$ এবং $\frac{y_1+6}{2} = 3$

$\Rightarrow x_1 = 2$ $\Rightarrow y_1 = 0$

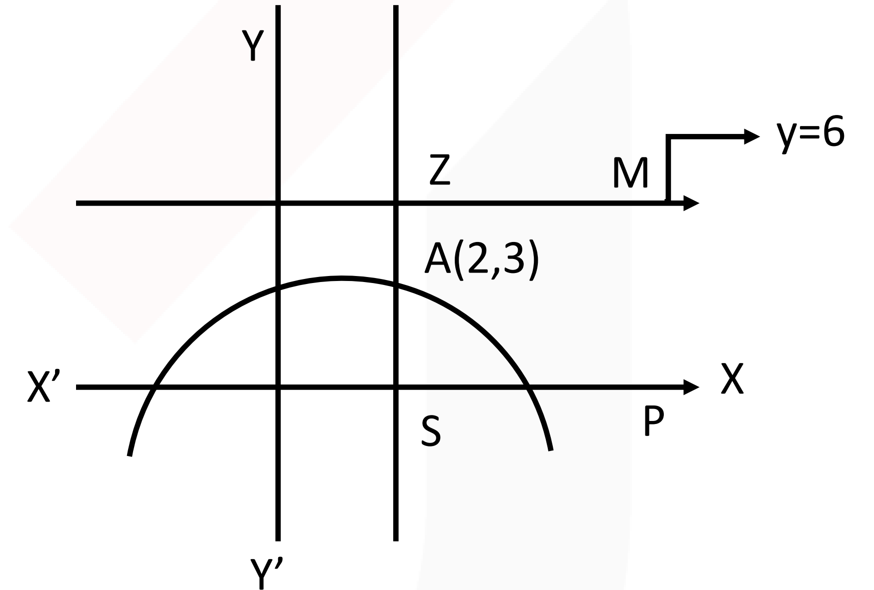
$\therefore$ নির্ণেয় উপকেন্দ্রের স্থানাংক $S\,(2,0)$

ধরি, পরাবৃত্তের উপরস্থ P- বিন্দুর স্থানাংক (x_1, y_1)

$$SP = PM$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} = \frac{|y-6|}{\sqrt{1^2}}$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = y^2 - 12y + 36 \quad \therefore x^2 - 4x + 12y - 32 = 0 \ (\mathbf{Ans:})$$



Problems

29. $(4,3)$ শীর্ষ এবং $y = 7$ নিয়ামক রেখা বিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

নিয়ামক রেখা , $MZ \Rightarrow y = 7 \Rightarrow y - 7 = 0$

অক্ষরেখা ZS হলে, $ZS \perp MZ$

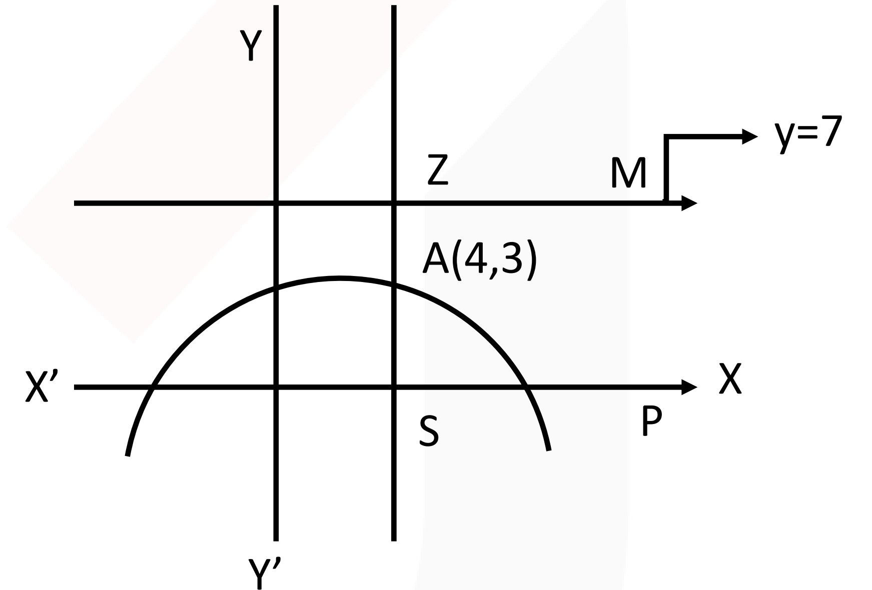
অক্ষরেখার সমীকরণ, $x + k = 0$ যা $(4,3)$ বিন্দুগামী

$\Rightarrow 4 + k = 0 \quad \therefore k = -4$

$\therefore ZS$ রেখার সমীকরণ, $x - 4 = 0 \quad \therefore x = 4$

আবার ZS এবং MZ রেখার ছেদবিন্দু , Z

যেখানে, $x = 4,\ y = 7 \quad \therefore Z(4,7)$



Problems

30. $(4,3)$ শীর্ষ এবং $y = 7$ নিয়ামক রেখা বিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

ধরি, পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রের স্থানাংক $S\,(x_1, y_1)$

$\frac{4+x_1}{2} = 4$ এবং $\frac{y_1+7}{2} = 3$

$\Rightarrow x_1 = 4$ $\quad\quad$ $\Rightarrow y_1 = -1$

$\therefore$ নির্ণেয় উপকেন্দ্রের স্থানাংক $S\,(4, -1)$

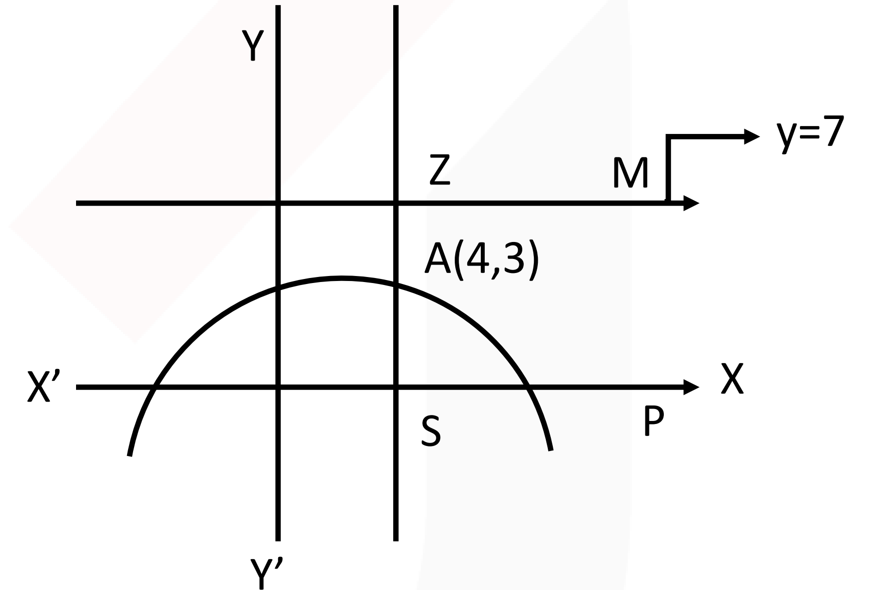
ধরি, পরাবৃত্তের উপরস্থ P- বিন্দুর স্থানাংক (x_1, y_1)

$$SP = PM$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-4)^2 + (y+1)^2} = \frac{|y-7|}{\sqrt{1^2}}$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 = y^2 - 14y + 49$$

$$\therefore (x-4)^2 = -16(y-3)\ (\boldsymbol{Ans:})$$



Problems

31. $(2,5)$ বিন্দুগামী পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার শীর্ষ $(0,2)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং অক্ষরেখা Y অক্ষের সমান্তরাল।

সমাধানঃ

ধরি,

পরাবৃত্তটির সমীকরণ, $(x-0)^2 = 4a(y-2) \ldots (i)$

$\Rightarrow x^2 = 4a(y-2)$ যা $(2,5)$ বিন্দুগামী

$\Rightarrow 2^2 = 4a(5-2)$

$\Rightarrow 4 = 4a.3 \quad \therefore a = \frac{1}{3}$

(i) নং সমীকরণে মান বসিয়ে পাই,

$\Rightarrow x^2 = \frac{4.1}{3}(y-2)$

$\therefore 3x^2 = 4(y-2) \quad (\boldsymbol{Ans:})$

Problems

32. একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার অক্ষরেখা x অক্ষের সমান্তরাল , শীর্ষবিন্দু y অক্ষের উপর অবস্থিত এবং যা $(0, 2)$, $(1, 0)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

সমাধানঃ

ধরি,

শীর্ষবিন্দু, $A(0, y)$

এবং পরাবৃত্তটির সমীকরণ, $(y - y_1)^2 = 4a(x - 0) \ldots (i)$

(i) নং সমীকরণ $(0, 2)$ বিন্দুগামী

$\Rightarrow (2 - y_1)^2 = 4.a.0$

$\Rightarrow 2 - y_1 = 0 \quad \therefore y_1 = 2$

শীর্ষবিন্দু, $(0, 2)$

আবার (i) নং সমীকরণ $(1, 0)$ বিন্দুগামী

$\Rightarrow (0 - y_1)^2 = 4.a.1$

$\Rightarrow (0 - 2)^2 = 4a \quad \therefore a = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ,

$(y - 2)^2 = 4.1.x$

$\therefore (y - 2)^2 = 4x$

উপবৃত্ত

❑ উপবৃত্ত (Ellipse)

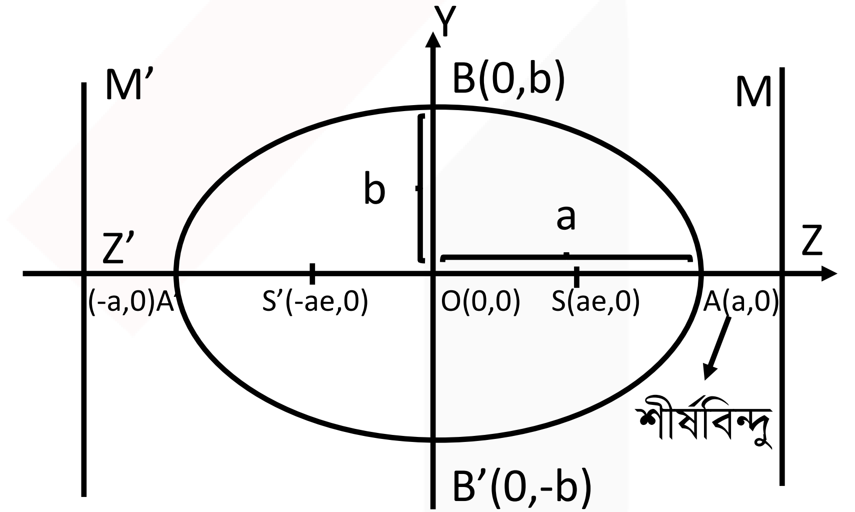
- রাশিমালা
- সমীকরণ ও
- বিবিধ নির্ণয়

❑ উপবৃত্তের রাশিমালা-

$$\frac{SP}{PM} = e \; ; \quad 0 < e < 1$$

সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad [a > b]$

$a =$ বৃহদাক্ষ, $b =$ ক্ষুদ্রাক্ষ



- মূলবিন্দু $O(0,0)$
- উপকেন্দ্র SS'

উপবৃত্ত

সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad [a>b]$

✓ a = বৃহদাক্ষ, b = ক্ষুদ্রাক্ষ

✓ x- অক্ষ বৃহদাক্ষ এবং y- অক্ষ ক্ষুদ্রাক্ষ

✓ বৃহদাক্ষের উপরে উপকেন্দ্র এবং শীর্ষবিন্দু থাকে।

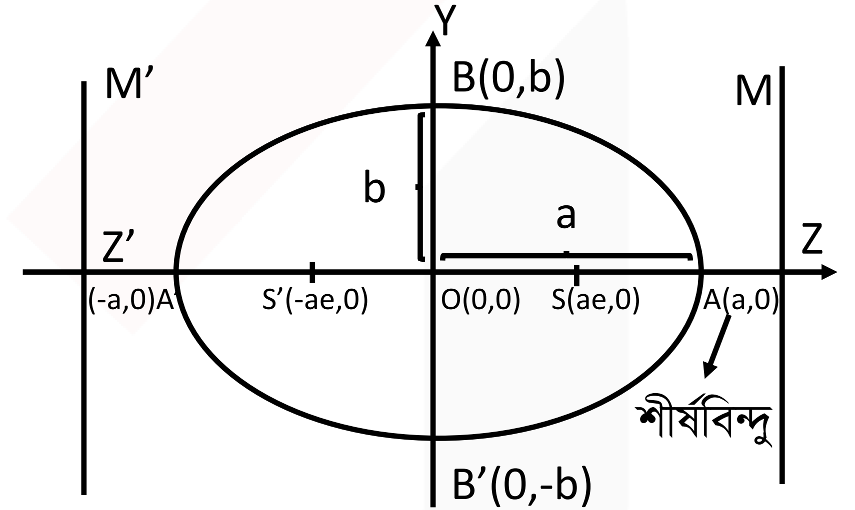
✓ মূল বিন্দু হতে উপকেন্দ্রের দূরত্ব শীর্ষবিন্দুর দূরত্ব অপেক্ষা কম

✓ কেন্দ্র $0(0,0)$, উপকেন্দ্র, $S(\pm ae, 0)$, শীর্ষবিন্দু $A(\pm a, 0)$

✓ নিয়ামক রেখার পাদবিন্দু, $Z\left(\pm\frac{a}{e}, 0\right)$

✓ নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $X=\pm\frac{a}{e}$

✓ উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $X=\pm ae$, উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$



উপবৃত্ত

- $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}$ উপবৃত্তের সকল রাশিমালা নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

প্রদত্ত সমীকরণে $a = 5, \quad b = 4$

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1-\frac{4^2}{5^2}} = \frac{3}{5}$

শীর্ষবিন্দু, $A\ (\pm a, 0) = (\pm 5, 0)$

উপকেন্দ্র, $S\ (\pm ae, 0) = \left(\pm\frac{5.3}{5}, 0\right) = (\pm 3, 0)$

নিয়ামক রেখার পাদবিন্দু, $Z\left(\pm\frac{a}{e}, 0\right) = \left(\pm\frac{5}{\frac{3}{5}}, 0\right) = \left(\pm\frac{25}{3}, 0\right)$

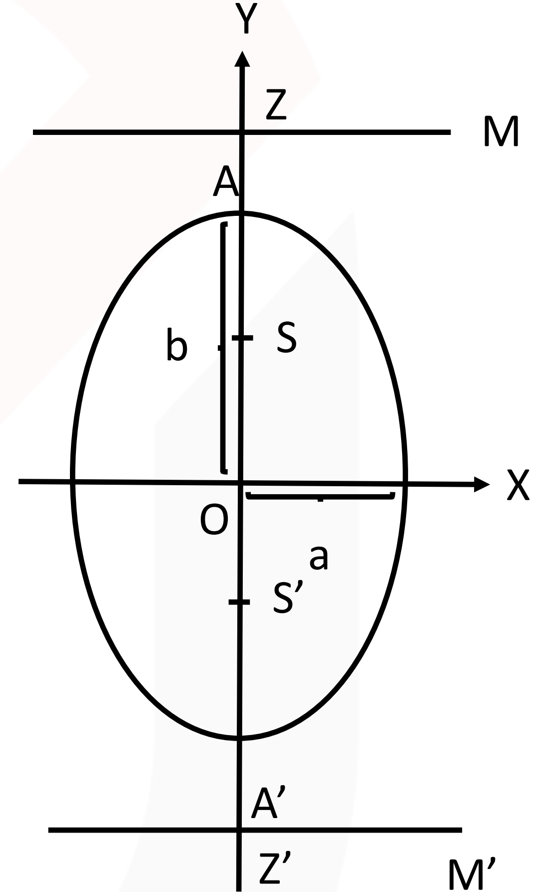
নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $\mathrm{x} = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{25}{3}$

শীর্ষে স্পর্শক রেখার সমীকরণ, $\mathrm{x} = \pm a = \pm 5$

উপবৃত্ত

সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad [a<b]$

- ✓ $a=$ ক্ষুদ্রাক্ষ, $b=$ বৃহদাক্ষ
- ✓ y- অক্ষ বৃহদাক্ষ এবং x- অক্ষ ক্ষুদ্রাক্ষ
- ✓ বৃহদাক্ষের উপরে উপকেন্দ্র এবং শীর্ষবিন্দু থাকে।
- ✓ মূল বিন্দু হতে উপকেন্দ্রের দূরত্ব শীর্ষবিন্দুর দূরত্ব অপেক্ষা কম
- ✓ কেন্দ্র $0(0,0)$, উপকেন্দ্র, $S(0,\pm be)$, শীর্ষবিন্দু $A(0,\pm b)$
- ✓ নিয়ামক রেখার পাদবিন্দু, $Z\left(0,\pm\frac{b}{e}\right)$
- ✓ নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $Y=\pm\frac{b}{e}$
- ✓ উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $Y=\pm be$, উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}$



উপবৃত্ত

- $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36}$ উপবৃত্তের সকল রাশিমালা নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

প্রদত্ত সমীকরণে $a = 4, \quad b = 6$

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1 - \frac{4^2}{6^2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

শীর্ষবিন্দু, $A\,(0, \pm b) = (0, \pm 6)$

উপকেন্দ্র, $S\,(0, \pm be) = \left(0, \pm 6.\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = (0, \pm 2\sqrt{5})$

নিয়ামক রেখার পাদবিন্দু, $Z\left(0, \pm\frac{b}{e}\right) = \left(0, \pm\frac{6.3}{\sqrt{5}}\right) = \left(0, \pm\frac{18}{\sqrt{5}}\right)$

নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $Y = \pm\frac{b}{e} = \pm\frac{18}{\sqrt{5}}$

শীর্ষে স্পর্শক রেখার সমীকরণ, $Y = \pm b = \pm 6$

Problems

1. $\mathbf{4x^2 + 5y^2 - 16xx + 10y + 1 = 0}$ **উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, শীর্ষবিন্দু , উপকেন্দ্র , এবং নিয়ামক রেখার পাদবিন্দু নির্ণয় কর।**

সমাধানঃ

$$4x^2 + 5y^2 - 16x + 10y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 4(x^2 - 4x) + 5(y^2 + 2y) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 4(x^2 - 2.x.2 + 4) + 5(y^2 + 2.y.1 + 1) + 1 - 16 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow 4(x-2)^2 + 5(y+1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{5} + \frac{(y+1)^2}{4} = 0$$

সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad [a > b]$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$$a = \sqrt{5}, \qquad b = 2 \quad [a > b]$$

Problems

1. $4x^2 + 5y^2 - 16xx + 10y + 1 = 0$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, শীর্ষবিন্দু , উপকেন্দ্র , এবং নিয়ামক রেখার পাদবিন্দু নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{2^2}{\sqrt{5}^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

শীর্ষবিন্দু, $X = \pm a$ $\quad Y = 0$

$\Rightarrow x - 2 = \pm\sqrt{5}$ $\quad \Rightarrow y + 1 = 0$

$\therefore x = 2 \pm \sqrt{5}$ $\quad \therefore y = -1$

$\therefore A(2 \pm \sqrt{5}\ , -1)$

উপকেন্দ্র, $X = \pm ae$ $\quad Y = 0$

$\Rightarrow x - 2 = \pm\sqrt{5}.\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \Rightarrow y + 1 = 0$

$\therefore x = 2 \pm 1$ $\quad \therefore y = -1$

$\therefore S(2 \pm 1\ , -1)$

নিয়ামক রেখার পাদবিন্দু, $X = \pm\frac{a}{e}$ $\quad Y = 0$

$\Rightarrow x - 2 = \pm 5$ $\quad \Rightarrow y + 1 = 0$

$\therefore x = 2 \pm 5$ $\quad \therefore y = -1$

$\therefore Z(2 \pm 5\ , -1)$

Problems

2. $9x^2 + 25y^2 = 225$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র , উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ,উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ এবং নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

$$9x^2 + 25y^2 = 225$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

সমীকরণে $a = 5, \quad b = 3 \quad [a > b]$

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{3^2}{5^2}} = \frac{4}{5}$

উপকেন্দ্র, $S(\pm ae, 0) = \left(\pm \frac{5.4}{5}, 0\right) = (\pm 4, 0)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2.3^2}{5} = \frac{18}{5}$

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $X = \pm ae = \pm \frac{5.4}{5} = \pm 4$

নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $X = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{5}{\frac{4}{5}} = \pm \frac{25}{4}$

Problems

3. $5x^2 + 9y^2 - 20x = 25$ উপবৃত্তের কেন্দ্র এবং উপকেন্দ্র নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

$$5x^2 + 9y^2 - 20x = 25$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 20x + 9y^2 = 25$$

$$\Rightarrow 5(x^2 - 4x) + 9y^2 = 25$$

$$\Rightarrow 5(x^2 - 2.x.2 + 4) + 9y^2 = 25 + 20$$

$$\Rightarrow 5(x-2)^2 + 9y^2 = 45$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad [a > b]$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$$a = 3, \qquad b = \sqrt{5} \quad [a > b]$$

কেন্দ্র $A(0,0)$

$X = 0 \qquad Y = 0$

$\Rightarrow x - 2 = 0 \qquad \Rightarrow y = 0$

$\therefore x = 2 \qquad \therefore y = 0$

$\therefore A(2,0)$

Problems

3. $5x^2 + 9y^2 - 20x = 25$ উপবৃত্তের কেন্দ্র এবং উপকেন্দ্র নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{(\sqrt{5}\,)^2}{3^2}} = \frac{2}{3}$

উপকেন্দ্র, $X = \pm ae$ $\quad\quad Y = 0$

$\Rightarrow x - 2 = \pm \frac{3.2}{3}$ $\quad\quad \Rightarrow y = 0$

$\therefore x = 4, 0$ $\quad\quad \therefore y = 0$

$\therefore S(4,0), (0,0)$ $(\boldsymbol{Ans}:)$

Problems

4. $\mathbf{4x^2 + 5y^2 - 16x + 10y + 1 = 0}$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্র , উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য , উৎকেন্দ্রিকতা এবং নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

$$4x^2 + 5y^2 - 16x + 10y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 4(x^2 - 4x) + 5(y^2 + 2y) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 4(x^2 - 2.x.2 + 4) + 5(y^2 + 2.y.1 + 1) + 1 - 16 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow 4(x-2)^2 + 5(y+1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{5} + \frac{(y+1)^2}{4} = 0$$

সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad [a > b]$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$$a = \sqrt{5}, \qquad b = 2 \quad [a > b]$$

Problems

4. $\mathbf{4x^2 + 5y^2 - 16x + 10y + 1 = 0}$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্র , উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য , উৎকেন্দ্রিকতা এবং নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{2^2}{\sqrt{5}^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

উপকেন্দ্র, $X = \pm ae$ $\qquad Y = 0$

$\Rightarrow x - 2 = \pm\sqrt{5}.\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\qquad \Rightarrow y + 1 = 0$

$\therefore x = 2 \pm 1$ $\qquad \therefore y = -1$

$\therefore S(2 \pm 1\ , -1)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2.2^2}{\sqrt{5}} = \frac{8}{5}$

নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $X = \pm\frac{a}{e} = \pm 5$

Problems

5. P এর মান কত হলে $px^2 + 4y^2 = 1$ উপবৃত্তটি $(\pm 1, 0)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে এবং অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

$px^2 + 4y^2 = 1 \ldots\ldots (i)$

(i) নং উপবৃত্তটি $(\pm 1, 0)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে

$\Rightarrow p(\pm 1)^2 + 4.0 = 1 \qquad \therefore p = 1$ (*Ans:*)

(i) নং এ p এর মান বসিয়ে পাই,

$\Rightarrow 1.x^2 + 4y^2 = 1$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$$

$\therefore a = 1, \qquad b = \frac{1}{2}$

বৃহদাক্ষের দৈর্ঘ্য, $2a = 2.1 = 2$

ক্ষুদ্রাক্ষের দৈর্ঘ্য, $2b = \frac{2.1}{2} = 1$

(Ans:)

Problems

6. P **এর মান কত হলে** $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{5^2}=1$ **উপবৃত্তটি** $(6,4)$ **বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে এবং অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।**

সমাধানঃ

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{5^2}=1 \ldots..(i)$$

(i) নং উপবৃত্তটি $(6,4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে

$$\Rightarrow \frac{6^2}{p}+\frac{4^2}{5^2}=1 \qquad \therefore p=100\ (\boldsymbol{Ans:})$$

(i) নং এ p এর মান বসিয়ে পাই,

$$\Rightarrow \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{5^2}=1$$

Problems

6. P এর মান কত হলে $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{5^2}=1$ উপবৃত্তটি $(6,4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে এবং অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

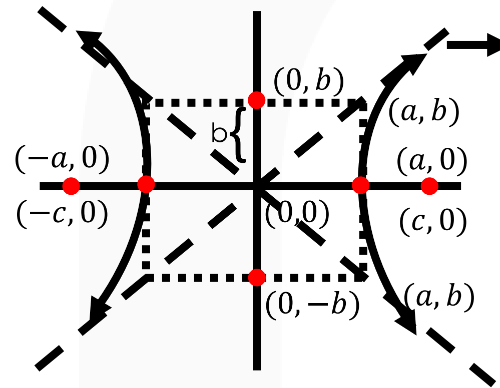
$$\Rightarrow \frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$$

$$\therefore a=10, \qquad b=5 \quad [a>b]$$

উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{5^2}{10^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\boldsymbol{Ans:})$

উপকেন্দ্রের অবস্থান, $S(\pm ae,0)=\left(\pm 10.\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)=(\pm 5\sqrt{3},0)(\boldsymbol{Ans:})$

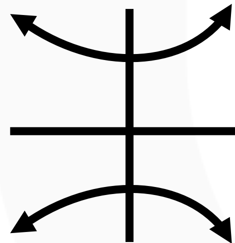
অধিবৃত্তের রাশিমালা নির্ণয়



অসীমতটের সমীকরণ,

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

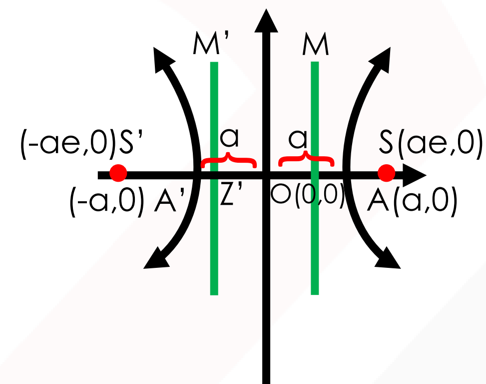
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ যেখানে, $a > b$



$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ যেখানে, $b > a$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \; ; \; a > b$$

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 1$



Problems

1. $9x^2 - 16y^2 = 144$ অধিবৃত্তের কেন্দ্রে, শীর্ষবিন্দু, উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র এবং অক্ষ ও উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। অধিবৃত্তটির অসীমতটের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

$$\Longrightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\Longrightarrow \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$$

Solution

যেখানে, $a = 4\,; b = 3$ এবং $a > b$

কেন্দ্রঃ $o(0,0)$

উৎকেন্দ্রিকতাঃ

$$e = \sqrt{1 + \frac{9}{16}}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{16}}$$

$$= \frac{5}{4}$$

উপকেন্দ্রঃ

$$s(\pm ae, 0)$$

বা, $(\pm 4 \times \frac{5}{4}, 0)$

বা, $(\pm 5, 0)$

Solution

দ্বিকাক্ষ রেখার পাদবিন্দু , $\left(\pm\frac{4}{\frac{5}{4}}, 0\right)$

বা, $\left(\pm\frac{16}{5}, 0\right)$

∴ নিয়ামক রেখার সমীকরণঃ

$$x = \pm\frac{16}{5}$$

$$\Longrightarrow 5x = \pm 16$$

অসীমতটের সমীকরণঃ

$$\mathrm{y} = \pm\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}x$$

$$\Longrightarrow y = \pm\frac{3}{4}x$$ **Ans.**

Solution

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{2b^2}{a}$

$= \frac{2\times9}{4}$

$= \frac{9}{2}$

শীর্ষবিন্দু $(\pm a, 0)$

বা, $(\pm 4, 0)$

অক্ষ দুইটিঃ $2a = 2 \times 4 = 8$

এবং $2b = 2 \times 3 = 6$

Problems

2. $9x^2 - 16y^2 + 72x - 32y - 16 = 0$ বক্ররেখাটির প্রকৃতি, তার কেন্দ্র, উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, নিয়ামক রেখার সমীকরণ ও নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

$$9x^2 - 16y^2 + 72x - 32y - 16 = 0$$

$$\Longrightarrow 9(x^2+8x) - 16(y^2 - 2y) - 16 = 0$$

$$\Longrightarrow 9(x^2+2.x.4 + 16) - 16(y^2 - 2.y.1 + 1) = 16 + 144 - 16$$

$$\Longrightarrow 9(x + 4)^2 - 16(y + 1)^2 = 144$$

$$\Longrightarrow \frac{(x+4)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

$$\Longrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

যেখানে, $x = x + 4$; $y = y + 1$

$\mathrm{a} = 4$; এবং $b = 3$

Solution

বক্ররেখাটির প্রকৃতিঃ অধিবৃত্ত

কেন্দ্রঃ $x = 0$ $\qquad y = 0$

$\Rightarrow x + 4 = 0 \qquad \Rightarrow y + 1 = 0$

$\Rightarrow x = -4 \qquad \Rightarrow y = -1$

উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক : $s(ae\,, 0)$

$$\Rightarrow \left(\pm 4 \times \sqrt{1 + \frac{9}{16}}, 0\right)$$

$$\Rightarrow \left(\pm 4 \times \frac{5}{4}\,,\ 0\right)$$

$$\Rightarrow (\pm 5\,, 0)$$

Ans.

Solution

নিয়ামক রেখার সমীকরণঃ

$$x = \pm\frac{a}{e}$$

$$\Rightarrow x + 4 = \pm\frac{4}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}}$$

$$\Rightarrow x + 4 = \pm\frac{4}{\frac{5}{4}}$$

$$\Rightarrow x + 4 = \pm\frac{16}{5} \qquad \Rightarrow 5x + 4 = 0$$

বা, $5x + 36 = 0$ **Ans.**

নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a}$

$$= \frac{2\times 9}{4}$$

$$= \frac{9}{2}$$ **Ans.**

Solution



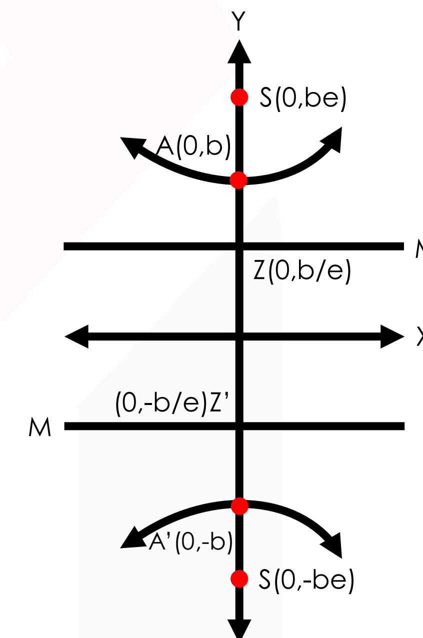
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1\,;b > a$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}$$

$$\Rightarrow e^2 = 1 + \frac{a^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow e^2 - 1 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2(e^2 - 1)$$



Problems

3. $25x^2 - 16y^2 = 400$ অধিবৃত্তের কেন্দ্র, উপকেন্দ্র ও উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

$$25x^2 - 16y^2 = 400$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{5^2} = 1$$

যেখানে, $a = 4, b = 5$

কেন্দ্র $o(0,0)$ **Ans.**

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$

$$= \sqrt{1 + \frac{25}{16}}$$

Solution

$$= \frac{\sqrt{41}}{4}$$ **Ans.**

উপকেন্দ্রঃ

$s\ (\pm ae, 0)$

বা, $(\pm 4 \times \frac{\sqrt{41}}{4}, 0)$

বা, $(\pm \sqrt{41}, 0)$ **Ans.**

Problems

4. $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{12^2} - \frac{y^2}{5^2} = 1$$

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 + \frac{25}{144}}$

$= \frac{13}{12}$ **Ans.**

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্কঃ $s(\pm 12 \times \frac{13}{12}, 0)$

$= (\pm 13, 0)$ **Ans.**

Problems

5. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্কঃ $s\ (\pm 3 \times \sqrt{1 + \frac{16}{9}}\ , 0)$

$$= (\pm 3 \times \frac{5}{3}, 0)$$

$$= (\pm 5\ , 0)$$ **Ans.**

Solution

নিয়ামক রেখার সমীকরণঃ

$$x = \pm\frac{3}{\frac{5}{3}}$$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{9}{5}$$

$$\Rightarrow 5x = \pm 9$$ **Ans.**

Q. $9x^2 - 4y^2 + 36 = 0$ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্র, লম্ব ও নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

$$\Rightarrow 9x^2 - 4y^2 + 36 = 0$$

$$\Rightarrow 9x^2 - 4y^2 = -36$$

$$\Rightarrow 4y^2 - 9x^2 = 36$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$$

শির্ষবিন্দু $o\ (0\ ,0)$ **Ans.**

Solution

উপকেন্দ্র: $s\left(0, \pm 3 \times \sqrt{1+\frac{4}{9}}\right)$

$$\Rightarrow \left(0, \pm 3 \times \frac{\sqrt{13}}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \left(0, \pm\sqrt{13}\right) \quad \text{Ans.}$$

উপকেন্দ্রিক লম্বঃ $\frac{2\times 2^2}{3} = \frac{8}{3}$ **Ans.**

নিয়ামক রেখার সমীকরণঃ

$$y = \pm\frac{3}{\frac{\sqrt{13}}{3}}$$

$$\Rightarrow y = \pm\frac{9}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{13}y = \pm 9$$ **Ans.**

10 MINUTE SCHOOL

Problems

6. উপবৃত্তের অক্ষ দুটিকে x ও y অক্ষ ধরে $(2,2)$ ও $(3,1)$ বিন্দুগামী উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। এর উৎকেন্দ্রিকতাও নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণঃ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,;a>b\ \ldots\ldots\ldots(i)$$

(i) নং উপবৃত্তটি $(2,2)$ বিন্দুগামী,

$$\frac{4}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1\ \Rightarrow a^2=\frac{4b^2}{b^2-4}$$

আবার,(i) নং উপবৃত্তটি $(3,1)$ বিন্দুগামী,

$$\frac{9}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$$

10 MINUTE SCHOOL

Solution

$$\Rightarrow \frac{9}{\frac{4b^2}{b^2-4}} + \frac{1}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{9b^2-36+4}{4b^2} = 1$$

$$\Rightarrow 9b^2 - 32 = 4b^2$$

$$\Rightarrow 5b^2 = 32$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{32}{5}$$

$$\therefore a^2 = \frac{4\times\frac{32}{5}}{\frac{32}{5}-4}$$

$$= \frac{32}{5}$$

$\therefore (i)$ নং উপবৃত্তে a^2 ও b^2 এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{a^2}{\frac{32}{3}} + \frac{b^2}{\frac{32}{5}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{3a^2}{32} + \frac{5b^2}{32} = 1$$

Ans.

10 MINUTE SCHOOL

Problems

7. একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র $(-2,3)$, নিয়ামক রেখা $x-y+7=0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{3}}$

সমাধানঃ

$$sp = e.PM$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} . \frac{|x-y+7|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$$

$$\Rightarrow (x+2)^2+(y-3)^2 = \frac{1}{3} . \frac{(x-y+7)^2}{2} \qquad [\,]$$

$$\Rightarrow x^2+4x+4+y^2-6y+9 = \frac{1}{6} . (x^2+y^2+49-2xy-14y+14x)$$

$$\Rightarrow 6x^2+24x+24+6y^2-36y+54-x^2-y^2-49+2xy+14y-14x = 0$$

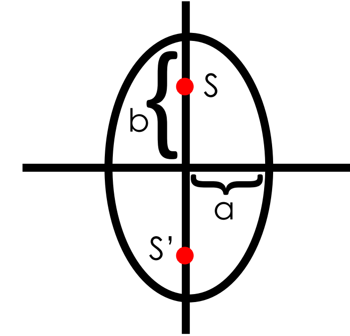
$$\Rightarrow 5x^2+5y^2+10x-22y+2xy+29 = 0$$

Ans.

Problems

8. একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক $(0,1),(0,-1)$ এবং ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য একের সমান।

সমাধানঃ



প্রশ্নানুসারে, $2a = 1$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণঃ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,; a < b \quad \dots\dots\dots (i)$$

এখানে,

$$ss' = \sqrt{(0-0)^2 + (1+1)^2}$$

$$\Rightarrow 2be = 2$$

$$\Rightarrow be = 1$$

$$\Rightarrow e = \frac{1}{b}$$

10 MINUTE SCHOOL

Solution

আবার, $e^2 = 1 - \frac{a^2}{b^2}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{b}\right)^2 = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{\frac{1}{4}}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{4} = b^2$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{5}{4}$$

$\therefore (i)$ নং এ a^2 ও b^2 এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{5}{4}} = 1$$

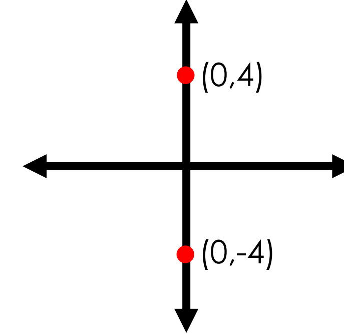
$$\Rightarrow 4x^2 + \frac{4y^2}{5} = 1$$ **Ans.**

10 MINUTE SCHOOL

Problems

9. উপবৃত্তের প্রধান অক্ষ দুইটিকে x ও y অক্ষ বিবেচনা করে একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, \pm 4)$, উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{4}{5}$.

সমাধানঃ



ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণঃ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \,; a < b \quad \dots\dots\dots (i)$$

আবার, $2be = 8$

$\Rightarrow be = 4$

$\Rightarrow b.\frac{4}{5} = 4$

$\therefore b = 5$

এখানে, $e^2 = 1 - \frac{a^2}{b^2}$

$\Rightarrow \frac{16}{25} = 1 - \frac{a^2}{25}$

Solution

$$\Longrightarrow a^2 = 9$$

$\therefore$ (i) নং সমীকরণে a^2 ও b^2 এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$ **Ans.**

10 MINUTE SCHOOL

Problems

10. বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষকে যথাক্রমে x ও y অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{4}{5}$ এবং যা $\left(\frac{10}{3}, \sqrt{5}\right)$

সমাধানঃ

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণঃ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

(i) নং উপবৃত্তটি $\left(\frac{10}{3}, \sqrt{5}\right)$ বিন্দুগামী,

$$\frac{\left(\frac{10}{3}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\sqrt{5}\right)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{100}{9a^2} + \frac{5}{b^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

10 MINUTE SCHOOL

Solution

আবার, $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$

$$\Rightarrow \frac{16}{25} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{9a^2}{25}$$

(ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{100}{9a^2} + \frac{5}{\frac{9a^2}{25}} = 1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

$$\Rightarrow a^2 = 25$$

$$\therefore b^2 = \frac{9\times25}{25} = 9$$

$\therefore$ (i) নং উপবৃত্তে a^2 ও b^2 এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$ **Ans.**

Problems

11. বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্রাক্ষকে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরে একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ক্ষুদ্র অক্ষের অর্ধেক এবং যা $(0, 1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে

সমাধানঃ

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণঃ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,;a>b\ \ldots\ldots\ldots\ldots(i)$

(i) নং উপবৃত্তটি $(0,1)$ বিন্দুগামী,

$$\frac{0}{a^2}+\frac{1^2}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow\frac{1}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow b^2=1$$

(i) নং এ পাই,

$$\Rightarrow a^2=4b^2$$

$$\Rightarrow a^2=4$$

Solution

∴ (i) নং সমীকরণে a^2 ও b^2 এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$$ **Ans.**

Problems

12. বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষকে যথাক্রমে x-অক্ষকে ও y-অক্ষ ধরে একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব 8 এবং নিয়ামক রেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব 18.

সমাধানঃ

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণঃ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 ; \quad a > b$$

এখানে, $2ae = 8$

$$\Longrightarrow ae = 4 \quad \dots \dots \dots (i)$$

Solution

এবং $2.\frac{a}{e} = 18$

$$\Rightarrow \frac{a}{e} = 9 \quad \dots\dots\dots (ii)$$

$(i) \div (ii) \Rightarrow$

$$e^2 = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow e = \frac{2}{3}$$

(i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$a.\frac{2}{3} = 4$$

$$\Rightarrow a = 6$$

আবার, $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$

$$\Rightarrow \frac{4}{9} = 1 - \frac{b^2}{36}$$

Solution

$$\Longrightarrow b^2 = 20$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণঃ $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{20} = 1$ **Ans.**

10 MINUTE SCHOOL

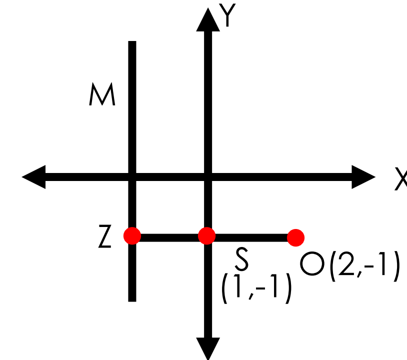
Problems

13.একটি উপবৃত্তের সমীকরণের নির্ণয় কর যার বৃহৎ অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল, একটি উপকেন্দ্র $(1,-1)$ এবং কেন্দ্র $(2,-1)$ হতে উপবৃত্তটির অনুরূপ নিয়ামক রেখার দূরত্ব 5 একক।

সমাধানঃ $oz = 5 \quad \Rightarrow \frac{a}{e} = 5 \ \ldots\ldots\ldots(i)$

$$os = \sqrt{(2-1)^2 + (-1+1)^2}$$

$$\Rightarrow ae = 1 \ \ldots\ldots\ldots(ii)$$



$(i) \div (ii) \Rightarrow$

$$e^2 = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow e = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

(ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$$a \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 1$$

10 MINUTE SCHOOL

Solution

$$\Rightarrow a = \sqrt{5}$$

আবার, $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} = 1 - \frac{b^2}{5}$$

$$\Rightarrow b^2 = 4$$

বৃহদ অক্ষ x অক্ষের সমান্তরাল ও $(2, -1)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট নির্ণেয় উপবৃত্তের সমিকরণঃ

$$\frac{(x-2)^2}{5} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$ **Ans.**

10 MINUTE SCHOOL

Problems

14. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{P}=1$ **উপবৃত্তটি $(4,6)$ বিন্দু দিয়ে যায় অতিক্রম করলে P এর মান নির্ণয় কর। ইহার উৎকেন্দ্রিকতা ও উপকেন্দ্র নির্ণয় কর।**

সমাধানঃ

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{P}=1$ যা $(4,6)$ বিন্দুগামী,

$\therefore \frac{4^2}{25}+\frac{36}{P}=1$

$\Rightarrow \frac{36}{P}=\frac{9}{25}$

$\Rightarrow P=\frac{25\times 36}{9}$

$\therefore P=100$ **Ans.**

10 MINUTE SCHOOL

Solution

অর্থাৎ সমীকরণটি $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{100}=1$

$$\Longrightarrow \frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{10^2}=1$$

যেখানে, $a<b$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}$

$$=\sqrt{1-\frac{25}{100}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}$$ **Ans.**

উপকেন্দ্রঃ $s\ (0, \pm\, be)$

$$=\left(0, \pm 10\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=(0, \pm 5\sqrt{3})$$ **Ans.**

10 MINUTE SCHOOL

Problems

15. উপবৃত্তের অক্ষ দুইটিকে x ও y অক্ষ ধরে $(1, \sqrt{6})$ ও $(3, 0)$ বিন্দুগামী উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণঃ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ \ldots\ldots\ldots (i)$$

(i) নং সমীকরণটি $(1, \sqrt{6})$ বিন্দুগামী,

$$\frac{(1)^2}{a^2} + \frac{\left(\sqrt{6}\right)^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{6}{b^2} = 1 - \frac{1}{a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{b^2} = \frac{a^2 - 1}{a^2}$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{6a^2}{a^2 - 1}$$

10 MINUTE SCHOOL

Solution

আবার, (i) নং সমীকরণটি $(3,0)$ বিন্দুগামী,

$$\frac{3^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1$$
$$\Rightarrow a^2 = 9$$

$$\therefore b^2 = \frac{6\times9}{9-1} = \frac{27}{4}$$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণঃ

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{\frac{27}{4}} = 1$$
$$\Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{4y^2}{27} = 1$$
$$\Rightarrow 3x^2 + 4y^2 = 27$$

Ans.

10 MINUTE SCHOOL

Problems

16. উপবৃত্তের অক্ষ দুটিকে x ও y-অক্ষ ধরে $(2, 4)$ ও $(5. \sqrt{2})$ বিন্দুগামী উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণঃ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \;\; \dots \dots \dots (i)$$

(i) নং সমীকরণটি $(2,4)$ বিন্দুগামী,

$$\frac{2^2}{a^2} + \frac{4^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{4}{a^2} = 1 - \frac{16}{b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{a^2} = \frac{b^2-16}{b^2} \qquad \Rightarrow a^2 = \frac{4b^2}{b^2-16}$$

10 MINUTE SCHOOL

Solution

(i) নং সমীকরণটি $(5, \sqrt{2})$ বিন্দুগামী,

$$\frac{(5)^2}{a^2} + \frac{(\sqrt{2})^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{25}{\frac{4b^2}{b^2-16}} + \frac{2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{25b^2-400+8}{4b^2} = 1$$

$$\Rightarrow 25b^2 - 392 = 4$$

$$\Rightarrow 21b^2 = 392$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{56}{3} \qquad \therefore a^2 = \frac{4\times\frac{56}{3}}{\frac{56}{3}-16} = 28$$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণঃ $\frac{x^2}{28} + \frac{y^2}{\frac{56}{3}} = 1$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3y^2 = 56$$ **Ans.**

Problems

17. একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র $(-1,1)$ দ্বিকাক্ষ $x-y+3=0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{2}$

সমাধানঃ

$(-1,1)$ উপকেন্দ্র, $x-y+3=0$ দ্বিকাক্ষ এবং $\frac{1}{2}$ উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণেরঃ

$$(x+1)^2+(y-1)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{|x-y+3|}{1^2+(-1)^2}$$

$$\Rightarrow x^2+2x+1+y^2-2y+1=\frac{1}{8}(x-y+3)^2$$

$$\Rightarrow 8x^2+16x+8+8y^2-16y+8=x^2+y^2+9-2xy-6y+6x$$

$$\Rightarrow 7x^2+7y^2+2xy+10x-10y+7=0$$ **Ans.**

10 MINUTE SCHOOL

Problems

18. একটি উপকেন্দ্রের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র $(0,2)$ দ্বিকাক্ষ $y+4=0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{2}$

সমাধানঃ

$(0,2)$ উপকেন্দ্র, $y+4=0$ দ্বিকাক্ষ এবং $\frac{1}{2}$ উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণেরঃ

$$(x-0)^2+(y-2)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2.\frac{|y+4|}{1^2}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-4y+4=\frac{1}{4}(y+4)^2$$

$$\Rightarrow 4x^2+4y^2-16y+16=y^2+8y+16$$

$$\Rightarrow 4x^2+3y^2-24y=0$$ **Ans.**

Problems

19. অক্ষ দুটিকে x ও y-অক্ষ ধরে একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{3}$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 8 একক।

সমাধানঃ

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণঃ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad ; \quad a>b \quad \dots\dots\dots(i)$$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, $\frac{2b^2}{a}=8$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{a}=4$$

$$\Rightarrow b^2=4a$$

এবং $e=\frac{1}{3}$

$$e^2=1-\frac{b^2}{a^2}$$

Solution

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4a}{a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{a} = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow a = \frac{9}{2}$$

$$\therefore b^2 = 4 \times \frac{9}{2} = 18$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণঃ $\dfrac{x^2}{\frac{81}{4}} + \dfrac{y^2}{18} = 1$

$$\frac{4x^2}{81} + \frac{y^2}{18} = 1$$ **Ans.**

10 MINUTE SCHOOL

Problems

20. অক্ষ দুটিকে x ও y-অক্ষ ধরে একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{3}$ এবং বৃহদ অক্ষের দৈর্ঘ্য 12 একক।

সমাধানঃ

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণঃ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad a > b \quad \dots\dots\dots (i)$$

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{1}{3}$

এবং $2a = 12$

$$\Rightarrow a = 6$$

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9} = 1 - \frac{b^2}{36}$$

10 MINUTE SCHOOL

Solution

$$\Rightarrow \frac{b^2}{36} = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow b^2 = 32$$

∴ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{b^2}{32} = 1$$ **Ans.**

10 MINUTE SCHOOL

Problems

অধিবৃত্তের রাশিমালা নির্ণয়

21. শর্ত সাপেক্ষে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

শীর্ষ $(0, \pm 8)$,অসীমতট $y = \pm\frac{4}{3}x$

সমাধানঃ

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

প্রশ্নমতে, $b = 8$

এবং অসীমতটের সমীকরণ $y = \pm\frac{b}{a}x$

আবার প্রশ্নানুসারে,

$$\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{a} = \frac{4}{3} \Rightarrow a = 6$$

$$\therefore \frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$$ **Ans.**

10 MINUTE SCHOOL

Problems

22. শর্ত সাপেক্ষে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর :

শীর্ষ $(\pm 1, 0)$,অসীমতট $y = \pm 2x$

সমাধানঃ

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots\dots\dots (i)$$

প্রশ্নমতে, $\pm a = \pm 1$

$\Rightarrow a = 1$

আবার, অসীমতটের সমীকরণ, $y = \pm \frac{b}{a} x$

অর্থাৎ $\frac{b}{a} = 2$

$\Rightarrow \frac{b}{1} = 2 \quad \Rightarrow b = 2$

$\therefore \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$ **Ans.**

10 MINUTE SCHOOL

Problems

23. উপকেন্দ্র $(\pm 3, 0)$,অসীমতট $y = \pm 2x$ শর্তের সাপেক্ষে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots \ldots \ldots (i)$$

অধিবৃত্তটির উপকেন্দ্র $(\pm ae, 0)$ এবং অসীমতট $y = \pm \frac{b}{a}x$

প্রশ্নমতে, $\pm\, ae = \pm 3$

$$\Rightarrow ae = 3$$

$$\Rightarrow e = \frac{3}{a}$$

এবং $\frac{b}{a} = 2$

$$\Rightarrow b = 2a$$

10 MINUTE SCHOOL

Problems

23. উপকেন্দ্র $(\pm 3, 0)$,অসীমতট $y = \pm 2x$ শর্তের সাপেক্ষে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

এখানে, $e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$

$$\Rightarrow \frac{9}{a^2} = 1 + \frac{4a^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{9}{5}$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore b = 2 \times \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণঃ $\frac{x^2}{\frac{9}{5}} - \frac{y^2}{\frac{36}{5}} = 1$

$$\Rightarrow \frac{5x^2}{9} - \frac{5y^2}{36} = 1$$ **Ans.**

10 MINUTE SCHOOL

Problems

24. $(5, 9)$ বিন্দুগামী, অসীমতট $y = \pm x$

সমাধানঃ

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণ:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \dots\dots\dots (i)$$

(i) নং সমীকরণটি $(5,9)$ বিন্দুগামী,

$$\frac{9^2}{b^2} - \frac{5^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{81}{b^2} - \frac{25}{a^2} = 1 \quad \dots\dots\dots (ii)$$

এবং অসীমতট, $y = \pm \frac{b}{a} x$

প্রশ্নমতে, $\frac{b}{a} = 1$

$$\Rightarrow b = a$$

Problems

24. $(5, 9)$ বিন্দুগামী, অসীমতট $y = \pm x$

সমাধানঃ

(ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{81}{a^2} - \frac{25}{a^2} = 1$$

$$\Rightarrow a^2 = 56$$

$$\therefore b^2 = 56$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণঃ $\frac{y^2}{56} - \frac{x^2}{56} = 1$

$$\Rightarrow y^2 - x^2 = 56$$ **Ans.**

10 MINUTE SCHOOL

Problems

25. অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য 8, অসীমতট $y = \pm\frac{3}{2}x$ অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণ:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \dots\dots\dots (i)$$

প্রশ্নমতে, $2a = 8$

$\Rightarrow a = 4$

এবং $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \frac{b}{4} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow b = 6$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণঃ $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{16} = 1$ **Ans.**

10 MINUTE SCHOOL

Problems

26. একটি অধিবৃত্তের $(6,4)$ ও $(-3,1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। এর কেন্দ্র মূল বিন্দুতে এবং আড় অক্ষ x-অক্ষ বরাবর হলে, অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots\dots\dots (i)$$

(i) নং সমীকরণটি $(6,4)$ বিন্দুগামী,

$$\frac{36}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{36}{a^2} = \frac{b^2+16}{b^2}$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{36b^2}{b^2+16}$$

10 MINUTE SCHOOL

Problems

26. একটি অধিবৃত্তের $(6,4)$ ও $(-3,1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। এর কেন্দ্র মূল বিন্দুতে এবং আড় অক্ষ x-অক্ষ বরাবর হলে, অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

আবার, সমীকরণটি $(-3,1)$ বিন্দুগামী, $\frac{9}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1$

$$\Rightarrow \frac{9}{a^2}=\frac{b^2+1}{b^2} \Rightarrow a^2=\frac{9b^2}{b^2+1}$$

অর্থাৎ $\frac{36b^2}{b^2+16}=\frac{9b^2}{b^2+1}$

$$\Rightarrow \frac{4}{b^2+16}=\frac{1}{b^2+1}$$

$$\Rightarrow 4b^2+4=b^2+16 \Rightarrow 3b^2=12 \Rightarrow b^2=4$$

$$\Rightarrow a^2=\frac{9\times 4}{4+1}=\frac{36}{5}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণঃ $\frac{y^2}{\frac{36}{5}}-\frac{b^2}{4}=1 \quad \Rightarrow \frac{5x^2}{36}-\frac{b^2}{4}=1$ **Ans.**

10 MINUTE SCHOOL

Problems

27. একটি অধিবৃত্ত $(-2,1)$ ও $(-3,-2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। এর কেন্দ্র মূলবিন্দুতে এবং আড় অক্ষ x-অক্ষ বরাবর হলে, অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণ: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \dots\dots\dots(i)$

(i) নং সমীকরণটি $(-2,1)$ বিন্দুগামী,

$$\frac{4}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow \frac{4}{a^2}=\frac{b^2+1}{b^2} \Rightarrow a^2=\frac{4b^2}{b^2+1}$$

আবার, সমীকরণটি $(-3,-2)$ বিন্দুগামী,

$$\frac{9}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow \frac{9}{a^2}=\frac{b^2+4}{b^2} \Rightarrow a^2=\frac{9b^2}{b^2+4}$$

10 MINUTE SCHOOL

Problems

27. একটি অধিবৃত্ত $(-2,1)$ ও $(-3,-2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। এর কেন্দ্র মূলবিন্দুতে এবং আড় অক্ষ x-অক্ষ বরাবর হলে, অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

অর্থাৎ $\frac{4b^2}{b^2+1} = \frac{9b^2}{b^2+4}$

$\Rightarrow \frac{4}{b^2+1} = \frac{9}{b^2+4}$

$\Rightarrow 9b^2 + 9 = 4b^2 + 16 \Rightarrow 5b^2 = 7$

$\therefore b^2 = \frac{7}{5}$

$\therefore a^2 = \frac{4\times\frac{7}{5}}{\frac{7}{5}+1} = \frac{7}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণঃ $\frac{x^2}{\frac{7}{3}} - \frac{y^2}{\frac{7}{5}} = 1$

$\Rightarrow \frac{3x^2}{7} - \frac{5y^2}{7} = 1$ **Ans.**

Problems

28. অক্ষ দুইটিকে স্থানাঙ্কের অক্ষ ধরে একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার আড় অক্ষ এবং অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 এবং 8 একক।

সমাধানঃ

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots\dots\dots (i)$$

প্রশ্নমতে, $2a = 6$ এবং $2b = 8$

$\Rightarrow a = 3$ $\Rightarrow b = 4$

$\therefore (i)$ নং এ a, b বসিয়ে পাই,

$$\Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$ **Ans.**

10 MINUTE SCHOOL

Problems

29. অক্ষ দুইটিকে স্থানাঙ্কের অক্ষ ধরে একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার আড় অক্ষ এবং অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য 24 একক এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, \pm 13)$

সমাধানঃ

ধরি, উপবৃত্তের সমীকরণ:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \;\ldots\ldots\ldots (i)$$

এবং উপকেন্দ্র $(0, \pm b)$

প্রশ্নমতে, $\text{be} = 13 \Rightarrow e = \frac{13}{b}$

এবং $2a = 24 \Rightarrow a = 12$

এখানে, $e^2 = 1 + \frac{a^2}{b^2}$

$$\Rightarrow \frac{169}{b^2} = 1 + \frac{144}{b^2} \Rightarrow b^2 = 25$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণঃ $\frac{y^2}{25} - \frac{a^2}{144} = 1$ **Ans.**

10 MINUTE SCHOOL

Problems

- $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের-

i. (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y.y_1 = 4a.\frac{x+x_1}{2}$

ii. স্পর্শক $y = mx + c$ হলে $c = \frac{a}{m}$

iii. স্পর্শক $y = mx + c$ হলে স্পর্শক বিন্দু $(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m})$

10 MINUTE SCHOOL

Problems

- $y^2 = 20x; (5, 10)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ, $y.10 = 20.\frac{x+5}{2}$

  $\Rightarrow y = x + 5$

➢ পরাবৃত্তের প্রয়োজনীয় সমীকরণ:

পরাবৃত্তের আকার	$y^2 = 4ax$	$x^2 = 4ay$	$(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$	$(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta)^2$
শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক	$A(0, 0)$	$A(0, 0)$	$A(\alpha, \beta)$	$A(\alpha, \beta)$
উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক	$S(a, 0)$	$S(0, a)$	$S(\alpha + a, \beta)$	$S(\alpha, \beta + a)$
দ্বিকাক্ষের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক	$Z(-a, 0)$	$Z(0, -a)$	$Z(\alpha - a, \beta)$	$Z(\alpha, \beta - a)$
অক্ষরেখার সমীকরণ	$y = 0$	$x = 0$	$y - \beta = 0$	$x - \alpha = 0$

10 MINUTE SCHOOL

➢ পরাবৃত্তের প্রয়োজনীয় সমীকরণ:

দ্বিকাক্ষ রেখার সমীকরণ	$x + a = 0$	$y + a = 0$	$x - \alpha + a = 0$	$y - \beta + a = 0$
উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ	$x = a$	$y = a$	$x - \alpha = a$	$y - \beta = a$
শীর্ষ স্পর্শকের সমীকরণ	$x = a$	$y = 0$	$x - \alpha = 0$	$y - \beta = 0$
উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য	$4\|a\|$	$4\|a\|$	$4\|a\|$	$4\|a\|$
উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক	$(a, \pm 2a)$	$(\pm 2a, a)$	$(a + \alpha, \pm 2a + \beta)$	$(\pm 2a + \alpha, a + \beta)$
(x, y) বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব	$x + a$	$y + a$	$x - \alpha + a$	$y - \beta + a$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

01) $25x^2 + 16y^2 = 400$ এর উপকেন্দ্রিকতা হবে-


A. $\frac{3}{5}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{4}{5}$

D. $\frac{2}{3}$

শর্টকাট:

$$e = \sqrt{1 - \frac{25}{16}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

02) $y^2 + 4x + 2y - 8 = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু হবে-

A. $\left(\frac{9}{4}, -1\right)$ ✓

B. $\left(-\frac{9}{4}, 1\right)$

C. $(0, 2)$

D. $(2,0)$

শর্টকাট:

$y^2 + 4x + 2y - 8 = 0$

$\Rightarrow 2y + 2 = 0 \Rightarrow y = -1$ [ঘাত সম্বলিত রাশির অন্তরীকরণ]

$\therefore (-1)^2 + 4x + 2.(-1) - 8 = 0$

$\Rightarrow 4x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{4}$

$\therefore$ শীর্ষবিন্দু $(\frac{9}{4}, -1)$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

03) $4x^2 + y^2 = 2$ উপবৃত্তটির বৃহৎ ও ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে-

A. 4 and 2

B. 2 and 4

C. $\sqrt{2}$ and $2\sqrt{2}$

D. $2\sqrt{2}$ and $\sqrt{2}$ ✔

Sol^n: $4x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow \frac{\frac{x^2}{1}}{2} + \frac{y^2}{2} = 1 \therefore a = \frac{1}{\sqrt{2}}, b = \sqrt{2}\ ; b > a$

বৃহদাক্ষ $= 2b = 2\sqrt{2}$ ক্ষুদ্রাক্ষ $= 2a = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

04) সরলরেখা $y = kx - 1$ বক্ররেখা $y = x^2 + 3$ এর স্পর্শক হবে যদি k এর একটি মান-

A. 1

B. $2\sqrt{2}$

C. 3

D. 4 ✔

Sol^n: $kx - 1 = x^2 + 3$

$\Rightarrow x^2 - kx + 4 = 0$

নিশ্চায়ক, $(-k)^2 - 4.1.4 = 0 \Rightarrow k^2 = 16 \Rightarrow k = \pm 4$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

05) $x^2 - 4x + 12y - 40 = 0$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য-

A. 12 ✔

C. 6

B. 8

D. 4

Sol^n: $x^2 - 4x + 12y - 40 = 0$

$\Rightarrow (x-2)^2 = -12y + 44$

$\Rightarrow (x-2)^2 = 4.-3.(y - \frac{11}{3})$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্ব $= 4|a| = 4|-3| = 12$

MCQ

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় (শর্টকাট)

$x^2 - 4 + 12y - 40 = 0$

একঘাত বিশিষ্ট চলকের সহগ $=$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 12$

06) $x^2 + 4x + 2y = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু-

A. $(-2, 2)$ ✓

C. $(-2,0)$

B. $(2, -2)$

D. $(-3, 2)$

Sol^n:

$$x^2 + 4x + 2y = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 = -2.(y-2)$$

$\therefore$ শীর্ষবিন্দু $(-2, 2)$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

07) $3x^2 + 5y^2 = 15$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিকতা হবে-

A. $\sqrt{3/5}$

C. $\sqrt{2/5}$ ✔

B. $\sqrt{5/3}$

D. $\sqrt{5/2}$

Sol^n: $e = \sqrt{1 - \frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

08) $x^2 - x + 4y = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক-

A. $(-4, 2)$

B. $(4, -2)$

C. $(4,5)$

D. $(5,4)$

Sol^n: $x^2 - x + 4y - 4 = 0$ পরাবৃত্তের সমীকরণ $(4, -2)$ বিন্দু দ্বারা সিদ্ধ হয়। তাই $(4, -2)$ কে সঠিক উত্তর হিসেবে নেওয়া যায়। But correct answer is $(\frac{1}{2}, \frac{17}{16})$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

09) $\frac{(x-4)^2}{100}+\frac{(y+2)^2}{64}=1$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা-

A. 1

B. $\frac{3}{5}$

C. $\frac{5}{3}$

D. $\frac{4}{5}$

Sol^n: $$e=\sqrt{1-\frac{64}{100}}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

10) $y^2 = 4x + 8y$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক-

A. $(4, 4)$

B. $(-4, 4)$

C. $(4, -4)$

D. $(-4,4)$ ✓

Sol^{n}:

$y^2 = 4x + 8y$

$2y = 8$ [y এর আন্তরীকরণ করে]

$y = 4$

$16 = 4x + 4 \times 8 \Rightarrow x = -4$

$\alpha\ (-4, 4)$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

11) যে পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(4,0)$ এবং নিয়ামক $x+2=0$, তার সমীকরণ-

A. $y^2 = 4(x-1)$

C. $y^2 = 6(x-2)$

B. $y^2 = 10(x-3)$

D. $y^2 = 12(x-1)$ ✔

Sol^n: ধরি, পরাবৃত্তের উপরস্থ বিন্দু $P(x,y)$ এবং উপকেন্দ্র $S(4,0)$

$\therefore SP = PM$

$\Rightarrow \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = |x+2|$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 = x^2 + 4x + 4$

$\Rightarrow y^2 - 12x + 12 = 0$

$y^2 = 12(x-1)$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

12) $2x - y^2 + 8y + 22$ পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক-

A. $(3, -4)$ ✓

C. $(-3, -4)$

B. $(-3, 4)$

D. $(3,4)$

Sol^n:

$$2x = y^2 + 8y + 22$$

$$\Rightarrow 0 = 2y + 8 \Rightarrow y = -4$$

$$\therefore 2x = 16.32 + 22 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

$\therefore$ শীর্বিন্দু $(3, -4)$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

13) $3x^2 + 4y^2 = 12$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা-

A. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{2}$ ✔

B. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

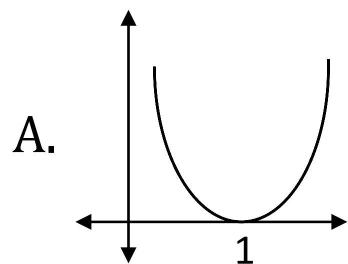
Sol^{n}: $e = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$

10 MINUTE SCHOOL

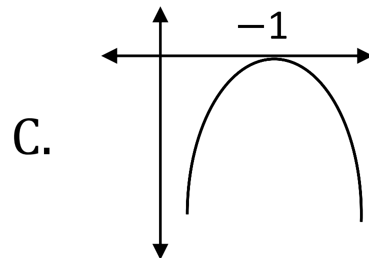
MCQ

14) নিচের কোনটি $y = -(x-1)^2$ এর লেখচিত্র?

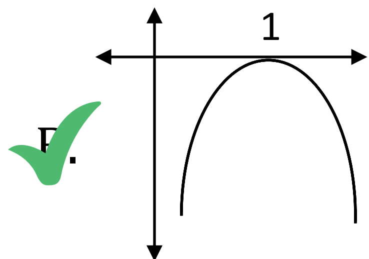
A.



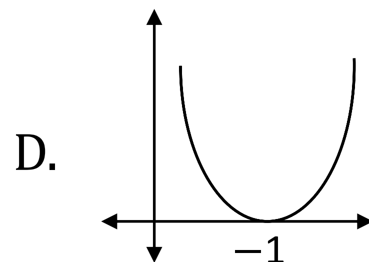
C.



B.



D.



10 MINUTE SCHOOL

MCQ

15) $y^2 - 4y - 4x + 16 = 0$ একটি পরাবৃত্ত নির্দেশ করে; এর উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কত?

A. $(4, 2)$ ✓

C. $(2,4)$

B. $(-2, -4)$

D. $(-4, -2)$

Sol^n:

$4a = -4 \Rightarrow a = -1$

$2y - 4 = 0 \Rightarrow y = 2$

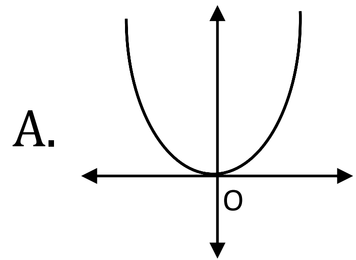
$4 - 8 - 4x + 16 = 0 \Rightarrow -4x = -12 \Rightarrow x = 3$

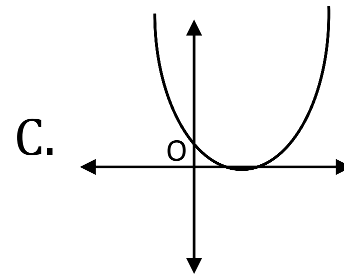
শীর্ষবিন্দু $A(3, 2)$

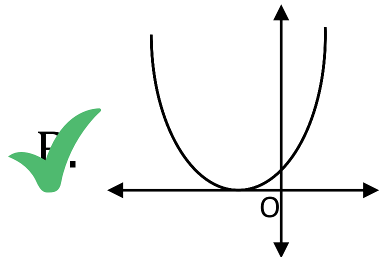
$\therefore$ উপকেন্দ্র $S(4, 2)$

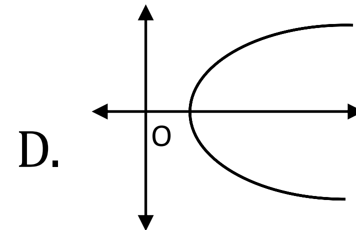
MCQ

16) $y = (x+1)^2$ লেখ কোনটি?

A.


C.


B.


D.


10 MINUTE SCHOOL

MCQ

বোর্ড পরীক্ষার প্রশ্নাবলী (এমসিকিউ)

1) $y^2 - 2x^2 = 2$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা কত?

A. $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ✔

B. 2

C. $\sqrt{5}$

D. $\frac{\sqrt{13}}{2}$

ব্যাখ্যা: $e = \sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

2) $5x^2 - 12xy + 5y^2 + 22x - 16y + 29 = 0$ সমীকরণ সূচিত বক্ররেখাপটি কি নির্দেশ করে?

A. পরাবৃত্ত

B. উপবৃত্ত ✔

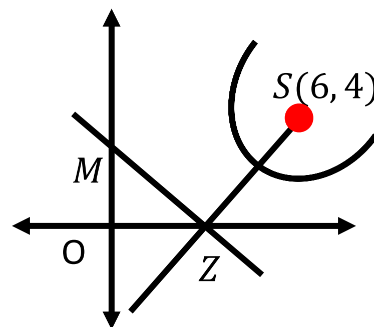
C. অধিবৃত্ত

D. বৃত্ত

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

3) উদ্দীপকের পরাবৃত্তের দ্বিকাক্ষের সমীকরণ $x + y - 2 = 0$ হলে শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত?



A. $(2, 0)$

B. $(4, 2)$ ✓

C. $(2,4)$

D. $(0, 2)$

MCQ

3) উদ্দীপকের পরাবৃত্তের দ্বিকাক্ষের সমীকরণ $x + y - 2 = 0$ হলে শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত?

ব্যাখ্যা:

$x + y - 2 = 0 \ldots\ldots (i)$

$ZS: x - y + k = 0$ যা $S(6, 4)$ বিন্দুগামী,

$\Rightarrow 6 - 4 + k = 0 \quad \Rightarrow k = -2$

$\therefore zs$ রেখার সমীকরণ: $x - y - 2 = 0 \ldots\ldots (ii)$

$(i) + (ii) \Rightarrow 2x - 4 = 0 \quad \Rightarrow x = 2$

(i) নং বসিয়ে পাই,

$2 + y - 2 = 0 \Rightarrow y = 0$

$\therefore Z(2, 0)$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

3) উদ্দীপকের পরাবৃত্তের দ্বিকাক্ষের সমীকরণ $x + y - 2 = 0$ হলে শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত?

ব্যাখ্যা: $\therefore A(x, y)$ হলে,

$$x = \frac{6+2}{2}$$
$$\Rightarrow x = 4$$

এবং $y = \frac{4+0}{2}$

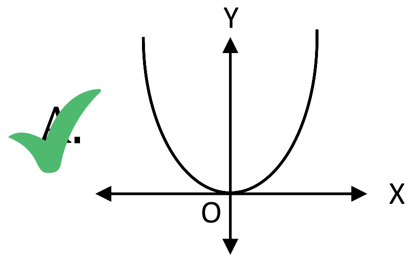
$$\Rightarrow y = 2$$

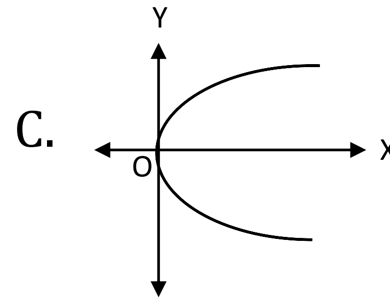
$$\therefore A = (4, 2)$$

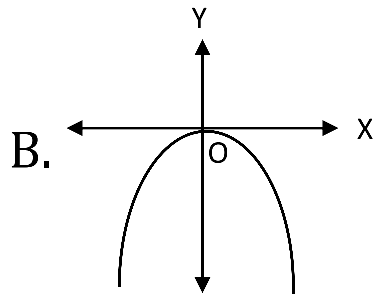
10 MINUTE SCHOOL

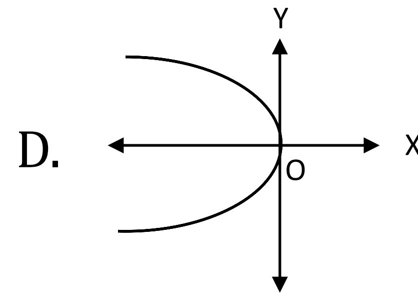
MCQ

4) $x^2 = 3y$ কণিকের লেখচিত্র কোনটি?









MINUTE SCHOOL

MCQ

5) $x^2 - y^2 = 2$ অধিবৃত্তের ফোকাসদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কোনটি?

A. 2

C. 4

B. $2\sqrt{2}$

D. $4\sqrt{2}$

ব্যাখ্যা: মধ্যবর্তী দূরত্ব $= 2ae = 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{1+1} = 4$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

6) $4x^2 + y^2 = 1$ কণিকের উৎকেন্দ্রিকতা কোনটি?

A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ✔

B. $\frac{2}{\sqrt{3}}$

D. $\frac{\sqrt{5}}{11}$

ব্যাখ্যা: $e = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

7) $y = 4x + c$ সসলরেখাটি $y^2 = 32x$ বক্ররেখাকে স্পর্শ করলে C এর মান কত?

A. -128


C. 2

B. $\frac{1}{2}$

D. 128

ব্যাখ্যা: $c = \frac{3}{4} = 2 = \frac{a}{m}$

অথবা, $y = 4x + c, y^2 = 32x$

$\Rightarrow (4x + c)^2 = 32x \Rightarrow 16x^2 + 8xc + c^2 - 32x = 0$

$\Rightarrow 16x^2 + (8x - 32)x + c^2 = 0$

$D = 0 \Rightarrow (8c - 32)^2 - 4 \times 16 \times c^2 = 0$

$\Rightarrow 64c^2 - 512c + 1024 - 64c^2 = 0$

$\Rightarrow 512c = 1024 \quad \therefore c = 2$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

8) অধিবৃত্তের ক্ষেত্রে নিচের কোনটি সঠিক?

A. $e = 0$

C. $0 < e < 1$

B. $e = 1$

D. $e > 1$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

9) $2y^2 = 5x$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কত?

A. $\left(0, \frac{5}{8}\right)$

C. $\left(0, \frac{5}{2}\right)$

B. $\left(\frac{5}{8}, 0\right)$ ✔

D. $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

ব্যাখ্যা:

$$2y^2 = 5x$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{5}{2}.x \Rightarrow y^2 = 4.\frac{5}{8}.x$$

$$\therefore \left(\frac{5}{8}, 0\right)$$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

10) $x^2 - 4y = 0$ কণিকের নিয়ামকের সমীকরণ কোনটি?

A. $y + 1 = 0$

C. $x + 1 = 0$

B. $y - 1 = 0$

D. $x - 1 = 0$

ব্যাখ্যা:

$$x^2 - 4y = 0$$
$$\Rightarrow x^2 = 4y \;\Rightarrow x^2 = 4.1.y$$
$$\therefore x + a = 0$$
$$\Rightarrow x + 1 = 0$$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

11) $x^2 + 12x + 3y = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু-

A. $(-6, -12)$

C. $(-6, 12)$ ✔

B. $(6, 12)$

D. $(6, -12)$

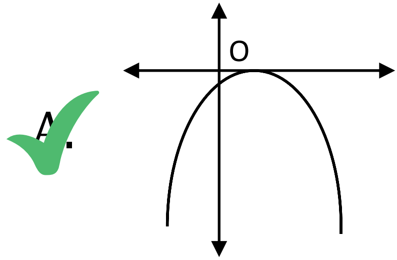
ব্যাখ্যা:

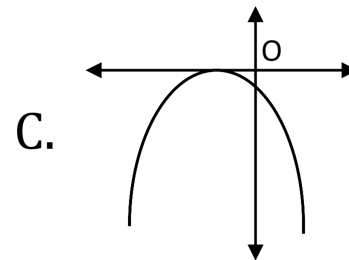
$$2x + 12 = 0$$
$$\Rightarrow x = -6$$
$$(-6)^2 + 12x(-6) + 3y = 0$$
$$\Rightarrow 36 - 72 + 3y = 0$$
$$\Rightarrow 3y = 36$$
$$\Rightarrow y = 12$$
$$\therefore A(-6, 12)$$

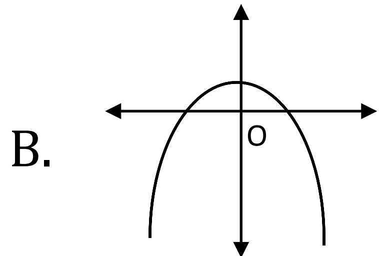
10 MINUTE SCHOOL

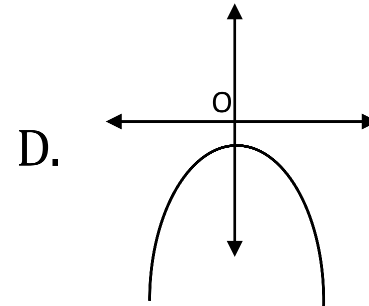
MCQ

12) $(x-1)^2 = -4y$ কণিকটির জন্য কোনটি সত্য?











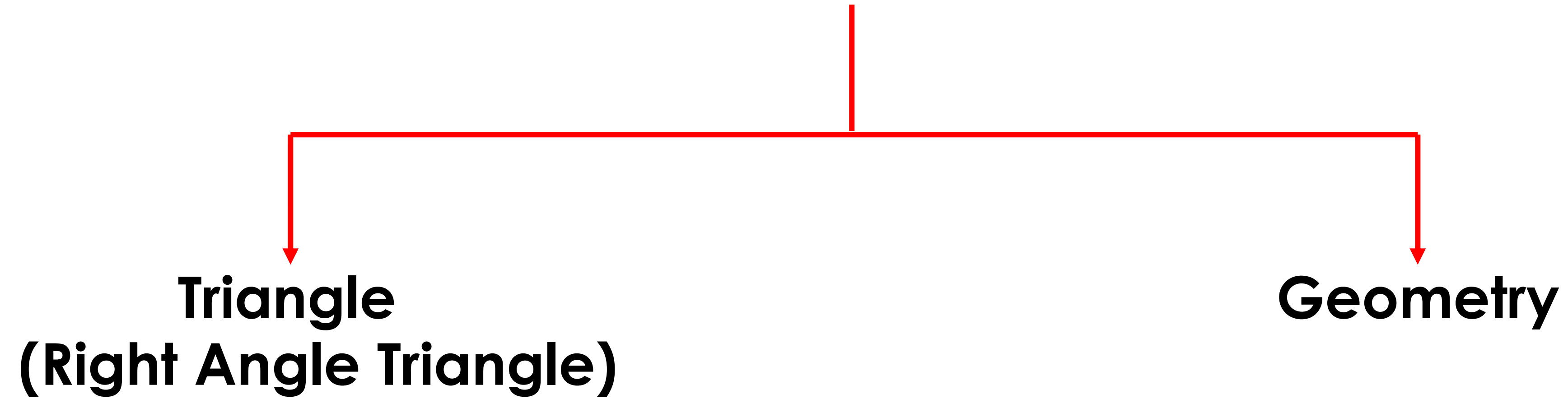
বিপরীত ত্রিকোণমিতি





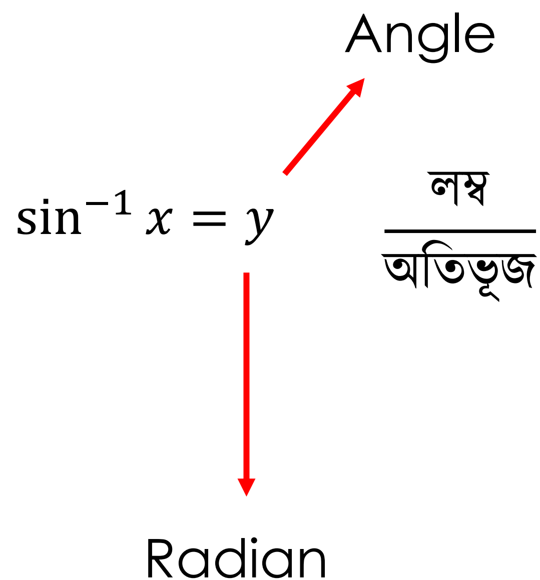
10 MINUTE SCHOOL

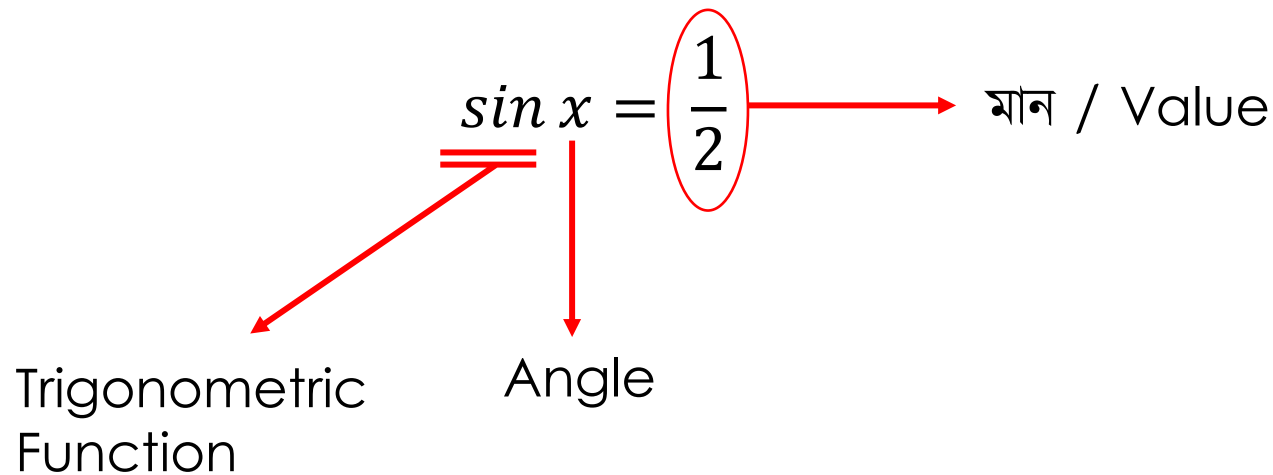
স্মৃতিচারণ

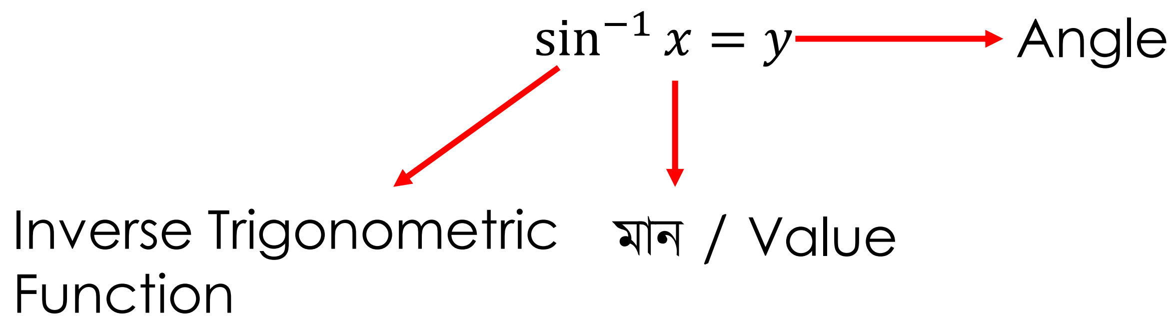


10 MINUTE SCHOOL

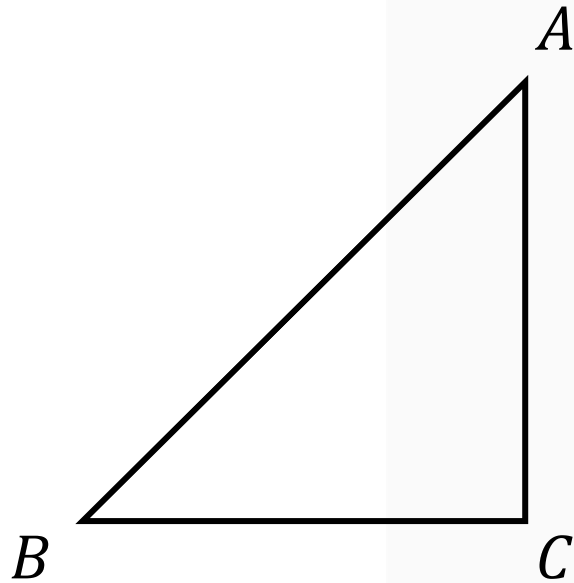
স্মৃতিচারণ







স্মৃতিচারণ



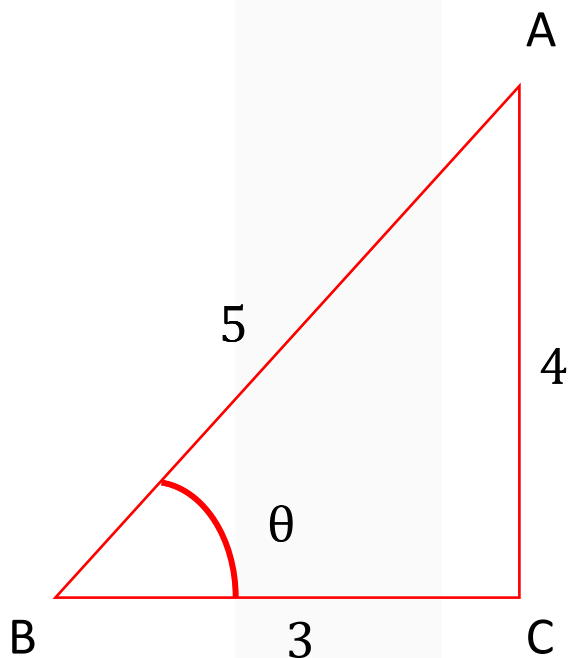
$$\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভূজ}} \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভূজ}}\right)$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভূজ}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভূজ}}\right)$$

$$\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}\right)$$

স্মৃতিচারণ

$$\sin^{-1}\left(\frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভূজ}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\text{ভুমি}}{\text{অতিভূজ}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভুমি}}\right)$$



$$\sin\theta = \frac{4}{5}$$

$$\cos\theta = \frac{3}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{4}{3}$$

স্মৃতিচারণ

আমরা জানি,

$-1 \leq \sin\theta, \cos\theta \leq +1$

$-1 \geq sec\,\theta, \text{cosec}\,\theta \geq +1$

$-\infty \leq \tan\theta, \cot\theta \leq \infty$

$\text{cosec}\,\theta$ এর মান কখনও ১ অপেক্ষা ছোট হতে পারে না ।

সূত্র

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\sec^{-1} x + \operatorname{cosec}^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

প্রমাণ

$$\sin^{-1} x = \operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Let, $\sin^{-1} x = \theta$

$\Rightarrow \sin\theta = x$

আমরা জানি,

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{x}$$

$$\therefore \theta = \operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\therefore \sin^{-1} x = \operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Proved

প্রমাণ

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

Let, $\sin\theta = x$

$\Rightarrow \theta = \sin^{-1} x$

আবার, $\sin\theta = x$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = x$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - \theta = \cos^{-1} x$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x = \cos^{-1} x$

$\therefore \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

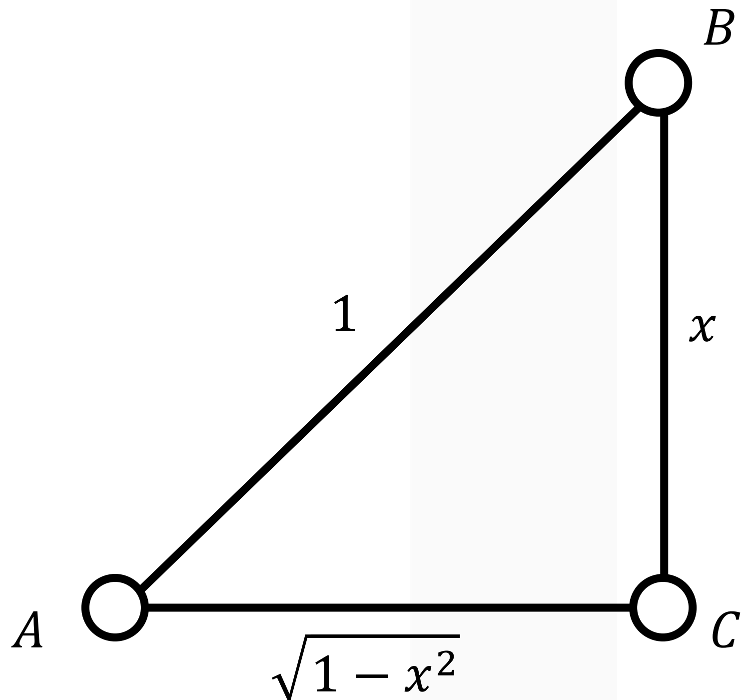
মৌলিক সম্পর্ক

$$sin^{-1}x = cosec^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow cosec^{-1}x = sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$tan^{-1}x = cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow cot^{-1}x = tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$cos^{-1}x = sec^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow sec^{-1}x = cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

বিপরীত ত্রিকোণমিতি



$$\sin^{-1} x = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2} = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \text{cosec}^{-1}\frac{1}{x} = \sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

সূত্র

$$\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\sin^{-1}x - \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \cos^{-1}\left(xy - \sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-y^2}\right)$$

$$\cos^{-1}x - \cos^{-1}y = \cos^{-1}\left(xy + \sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-y^2}\right)$$

$$\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$$

$$\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$$

প্রমাণ

$$\boldsymbol{sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)}$$

Let, $\sin^{-1} x = \alpha$ | $\sin^{-1} y = \beta$

$\Rightarrow x = \sin\alpha$ | $\Rightarrow y = \sin\beta$

$\therefore \cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$ | $\therefore \cos\beta = \sqrt{1-y^2}$

$$\Rightarrow \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha+\beta) = x\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}.y$$

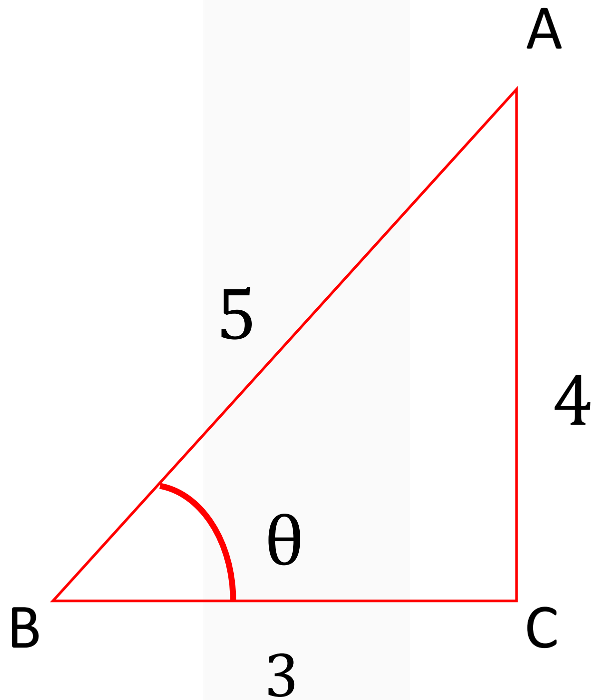
$$\Rightarrow (\alpha+\beta) = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{sin^{-1} x + sin^{-1} y = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)}$$

Proved

বিপরীত ত্রিকোণমিতি

$\sin^{-1}\theta = \left(\frac{4}{5}\right)$ হলে, $\cos^{-1}\theta = ?$ $\tan^{-1}\theta = ?$

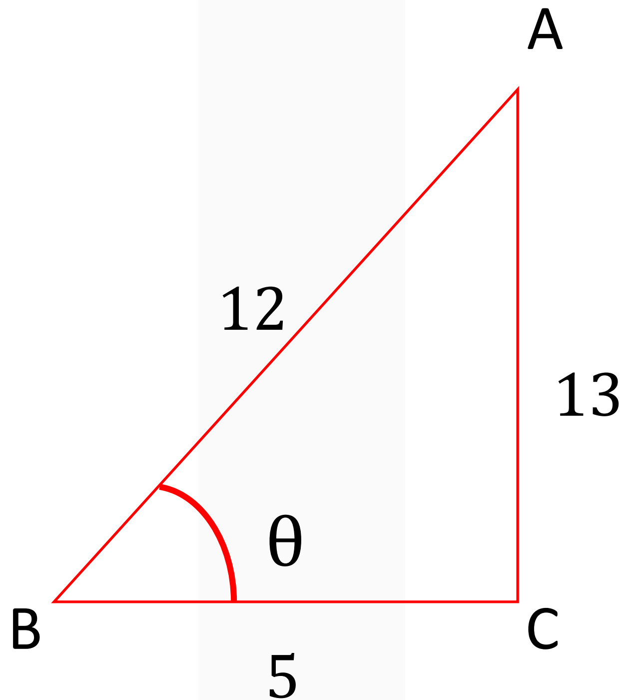


$$\cos^{-1}\theta = \left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\tan^{-1}\theta = \left(\frac{4}{3}\right)$$

বিপরীত ত্রিকোণমিতি

$\sin^{-1}\theta = \left(\frac{12}{13}\right)$ হলে, $\cos^{-1}\theta = ?$ $\tan^{-1}\theta = ?$



$$\cos^{-1}\theta = \left(\frac{5}{13}\right)$$

$$\tan^{-1}\theta = \left(\frac{12}{5}\right)$$

প্রমাণ

$$2\tan^{-1}x = \sin\frac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2} = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$$

Let, $\tan^{-1}x = \theta$

$\Rightarrow x = \tan\theta$

আমরা জানি, $\therefore \sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{2x}{1+x^2}$

$\Rightarrow 2\theta = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$

$\Rightarrow 2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$

Proved

বিপরীত ত্রিকোণমিতি

ধরে নেই,

$$x = \sin\theta$$

$$\sin^{-1} x = \theta \ldots\ldots (i)$$

$$\therefore \sin^{-1}(\sin\theta) = \theta$$

$$\therefore \cos^{-1}(\cos\theta) = \theta$$

$$\therefore \tan^{-1}(\tan\theta) = \theta$$

অর্থাৎ একই জাতীয় যদি ত্রিকোণমিতিক ফাংশন থাকে, একটি সাধারণ আরেকটি বিপরীত, তাহলে কাটাকাটি

$$\therefore f^{-1}(f(x)) = x$$

প্রমাণ

$$\cos^{-1} x + \cos^{-1} y = \cos^{-1}\left\{xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right\}; \ [x + y \geq 1]$$

মনে করি,

$$\cos^{-1} x = A \quad \Rightarrow x = \cos A$$

$$\cos^{-1} y = B \quad \Rightarrow y = \cos B$$

$$\therefore \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\Rightarrow \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sqrt{1-\cos^2 A}\sqrt{1-\cos^2 B}$$

$$\Rightarrow \cos(A+B) = xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{A} + \mathrm{B} = \cos^{-1}\{xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$$

$$\Rightarrow \cos^{-1} x + \cos^{-1} y = \cos^{-1}\{xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$$

Proved

Problems

1. $2\sin^{-1} x = \sin^{-1}(2x\sqrt{1 - x^2})$

মনেকরি,

$$\sin^{-1} x = A \;\Rightarrow x = \sin A$$

$$\therefore \cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - x^2}$$

আমরা জানি,

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\Rightarrow \sin 2A = 2x\sqrt{1 - x^2}$$

$$\Rightarrow 2A = \sin^{-1}(2x\sqrt{1 - x^2})$$

$$\Rightarrow \mathbf{2 \sin^{-1} x = \sin^{-1}(2x\sqrt{1 - x^2})}$$

Problems

2. $3\tan^{-1}x = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$

মনে করি,

$$\tan^{-1}x = A \Rightarrow x = \tan A$$

আমরা জানি,

$$\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

$$\Rightarrow \tan 3A = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$$

$$\Rightarrow 3A = \tan^{-1}\left(\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}\right)$$

$$\Rightarrow 3\tan^{-1}x = \tan^{-1}\left(\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}\right)$$

Problems

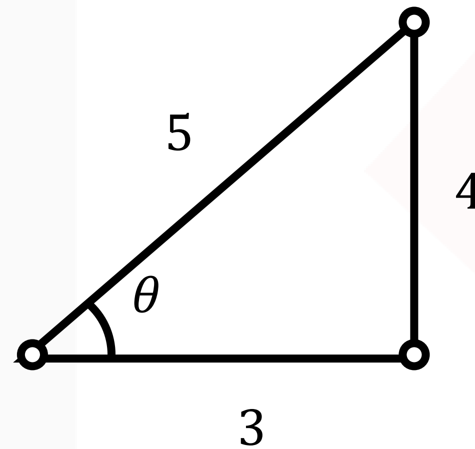
3. প্রমাণ কর যে $\sin^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}} = \tan^{-1}\frac{11}{2}$

$$\text{L.H.S} = \tan^{-1}\frac{4}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{2}$$

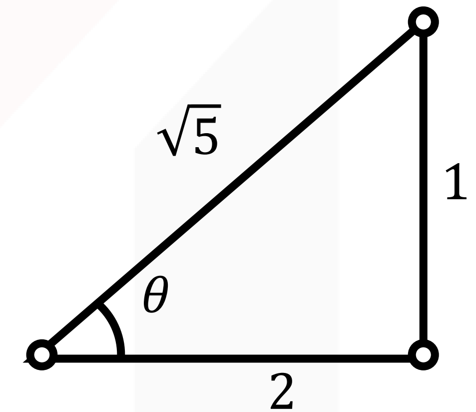
$$= \tan^{-1}\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{11}{2}$$

$$= \text{R.H.S}$$



$$\sin^{-1}\frac{4}{5} = \tan^{-1}\frac{4}{3}$$



$$\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}} = \tan^{-1}\frac{1}{2}$$

Problems

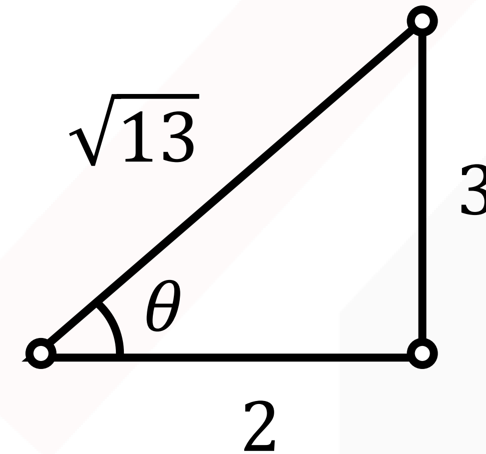
4. প্রমাণ কর যে, $\tan^{-1}\frac{2}{3} = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1}\frac{\sqrt{13}}{2}$

$$\tan^{-1}\frac{2}{3} + \sec^{-1}\frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$= \tan^{-1}\frac{2}{3} + \cot^{-1}\frac{2}{3}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \tan^{-1}\frac{2}{3} = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1}\frac{\sqrt{13}}{2}$$



$$\sec^{-1}\frac{\sqrt{13}}{2} = \cot^{-1}\frac{2}{3}$$

Problems

5. প্রমাণ কর, $4\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} + \cot^{-1} 3\right) = \pi$

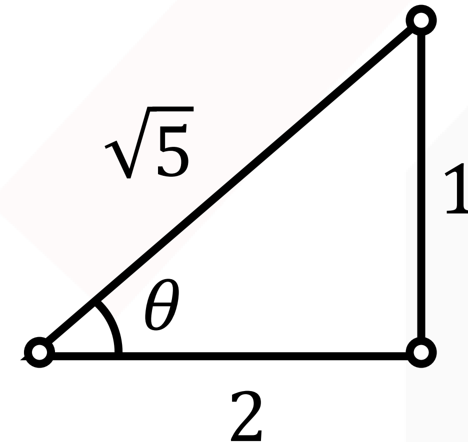
বামপক্ষ $= 4\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} + \cot^{-1} 3\right)$

$= 4\left(\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}\right)$

$= 4\tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}$

$= 4\tan^{-1}\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}$

$= 4\frac{\pi}{4} \quad = \pi \quad =$ ডানপক্ষ



Problems

5. প্রমাণ কর, $\tan^{-1}\{(\sqrt{2}+1)\tan\alpha\} - \tan^{-1}\{(\sqrt{2}-1)\tan\alpha\} = \tan^{-1}(\sin 2\alpha)$

বামপক্ষ $= \tan^{-1}\{(\sqrt{2}+1)\tan\alpha\} - \tan^{-1}\{(\sqrt{2}-1)\tan\alpha\}$

$$= \tan^{-1}\frac{(\sqrt{2}+1)\tan\alpha - (\sqrt{2}-1)\tan\alpha}{1+(\sqrt{2}+1)\tan\alpha\,.(\sqrt{2}-1)\tan\alpha}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\sqrt{2}\tan\alpha + \tan\alpha - \sqrt{2}\tan\alpha + \tan\alpha}{1+\left\{(\sqrt{2})^2 - (1)^2\right\}\tan^2\alpha}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\right)$$

$$= \tan^{-1}(\sin 2\alpha)$$

$= \text{R.H.S}$

Problems

6. প্রমাণ কর, $\tan(2\tan^{-1}x) = 2\tan(\tan^{-1}x + \tan^{-1}x^3)$

$$\text{R.H.S} = 2\tan(\tan^{-1}x + \tan^{-1}x^3)$$

$$= 2\tan\left(\tan^{-1}\frac{x+x^3}{1-x.x^3}\right)$$

$$= 2 \times \frac{x+x^3}{1-(x^2)^2}$$

$$= 2 \times \frac{x(1+x^2)}{(1+x^2)(1-x^2)}$$

$$= \frac{2x}{(1-x^2)}$$

$$\text{L.H.S} = \tan(2\tan^{-1}x)$$

$$= \tan\left(\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

$$= \frac{2x}{1-x^2}$$

$$= \text{R.H.S}$$

$\therefore$ **L.H.S = R.H.S**

Problems

7. প্রমাণ কর, $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13}-\cot^{-1}2=\tan^{-1}\frac{28}{29}$

ধরি, $\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13}=\theta$

$\Rightarrow \cos^{-1}\frac{5}{13}=2\theta$

$\Rightarrow \cos 2\theta=\frac{5}{13}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2.\sin\theta\,.\sin\theta}{2.\sin\theta\,.\cos\theta}$ [হর ও লবকে $2\,sin\,\theta$ দিয়ে গুণ করে।]

$=\frac{2\sin^2\theta}{\sin 2\theta}=\frac{1-\cos 2\theta}{\sqrt{1-\cos^2 2\theta}}$ [$sin^2\,\theta+cos^2\,\theta=1$
$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$]

$\tan\theta=\frac{1-\frac{5}{13}}{\sqrt{1-\frac{25}{109}}}=\frac{2}{3}$ $\quad\therefore \tan\theta=\frac{2}{3}$ $\quad\therefore \theta=\tan^{-1}\frac{2}{3}$

$\therefore \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13}=\tan^{-1}\frac{2}{3}$

Problems

7. প্রমাণ কর, $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13}-\cot^{-1}2=\tan^{-1}\frac{28}{29}$

$$\text{L.H.S}=\tan^{-1}\frac{3}{4}+\tan^{-1}\frac{2}{3}-\tan^{-1}\frac{1}{2}$$

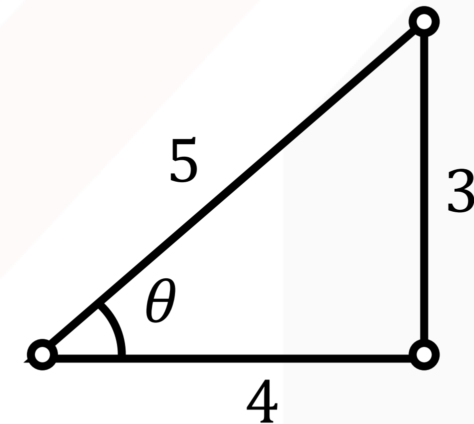
$$=\tan^{-1}\frac{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}}-\tan\frac{1}{2}$$

$$=\tan^{-1}\frac{17}{6}-\tan\frac{1}{2}$$

$$=\tan^{-1}\frac{\frac{17}{6}-\frac{1}{2}}{1+\frac{17}{6}\times\frac{1}{2}}$$

$$=\tan^{-1}\frac{28}{29}$$

$$=\text{R.H.S}$$



$\therefore$ **L.H.S = R.H.S**

Alternative Solution

7. প্রমাণ কর, $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13}-\cot^{-1}2=\tan^{-1}\frac{28}{29}$

ধরি, $\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13}=\theta$ ……… (i)

$$\Rightarrow \cos^{-1}\frac{5}{13}=2\theta$$

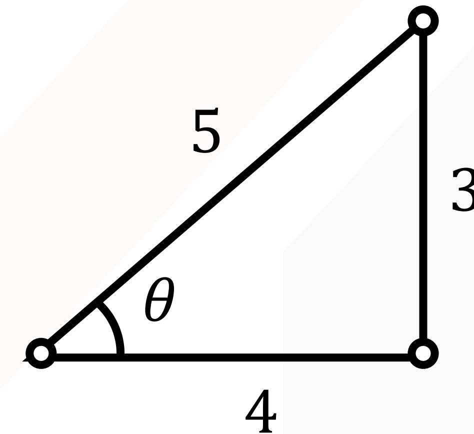
$$\Rightarrow \cos 2\theta=\frac{5}{13}$$

$$\Rightarrow \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{5}{13}$$

$$\Rightarrow 5+5\tan^2\theta=13-13\tan^2\theta$$

$$\Rightarrow 18\tan^2\theta=8 \quad \Rightarrow \tan^2\theta=\frac{8}{18} \quad \Rightarrow \tan^2\theta=\frac{4}{9} \quad \Rightarrow \tan\theta=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \theta=\tan^{-1}\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13}=\tan^{-1}\frac{2}{3}$$ [(i) নং হতে]



Alternative Solution

7. প্রমাণ কর, $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13}-\cot^{-1}2=\tan^{-1}\frac{28}{29}$

বামপক্ষ $=\sin^{-1}\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{5}{13}-\cot^{-1}2$

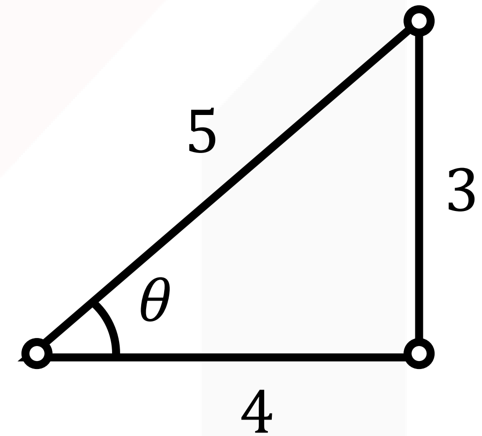
$=\left(\tan^{-1}\frac{3}{4}+\tan^{-1}\frac{2}{3}\right)-\tan^{-1}\frac{1}{2}$

$=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}}\right)-\tan^{-1}\frac{1}{2}$

$=\tan^{-1}\frac{17}{6}-\tan^{-1}\frac{1}{2}$

$=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{17}{6}-\frac{1}{2}}{1+\frac{17}{6}\cdot\frac{1}{2}}\right)$

$=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{7}{3}}{\frac{29}{12}}\right)=\tan^{-1}\frac{28}{29}=$ ডানপক্ষ



Problems

8. প্রমাণ কর, $4\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{17}} - \tan^{-1}\frac{79}{401} = \frac{\pi}{4}$

$$4\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$= 4\tan^{-1}\frac{1}{4}$$

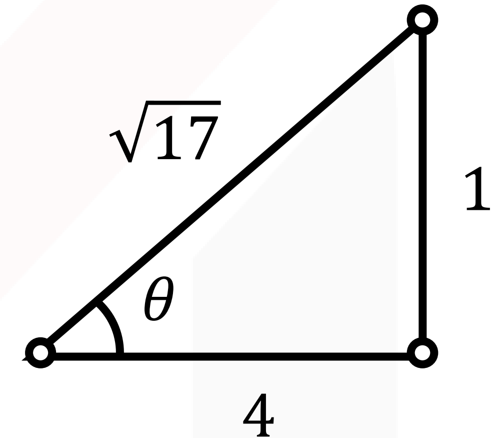
$$= 2.2\tan^{-1}\frac{1}{4}$$

$$= 2\times\tan^{-1}\frac{2\times\frac{1}{4}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$= 2\tan^{-1}\frac{8}{15}$$

$$= \tan^{-1}\frac{2\times\left(\frac{8}{15}\right)}{1-\left(\frac{8}{15}\right)^2}$$

$$= \tan^{-1}\frac{240}{161}$$



$$2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$$

Problems

8. প্রমাণ কর, $4\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{17}} - \tan^{-1}\frac{79}{401} = \frac{\pi}{4}$

$$\text{L.H.S} = \tan^{-1}\frac{240}{161} - \tan^{-1}\frac{79}{401}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{240}{161}-\frac{79}{401}}{1+\frac{240}{161}\times\frac{79}{401}}$$

$$= \tan^{-1}1$$

$$= 45°$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \text{R.H.S}$$

$\therefore$ **L.H.S = R.H.S**

Problems

$$2\tan^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

9. প্রমাণ কর যে, $\cos\left(2\tan^{-1}\frac{1}{7}\right) = \sin\left(4\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$

$$\text{L.H.S} = \cos\left(2\tan^{-1}\frac{1}{7}\right)$$

$$= \cos\left\{\cos^{-1}\frac{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{7}\right)^2}\right\}$$

$$= \frac{1-\frac{1}{49}}{1+\frac{1}{49}}$$

$$= \frac{24}{25}$$

$$\text{R.H.S} = \sin\left(4\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$$

$$= \sin\left(2.2\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\sin\left(2\tan^{-1}\frac{1}{2}\right).\cos\left(2\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$$

$[\sin 2A = 2\sin A\cos A]$

$$= 2\sin\left(\sin^{-1}\frac{2.\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right).\cos\left(\cos^{-1}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{8}{5}\times\frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$

$\therefore$ **L.H.S = R.H.S**

Problems

10. প্রমাণ কর যে, $2\tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{\theta}{2}\right\} = \cos^{-1}\frac{b+a\cos\theta}{a+b\cos\theta}$

$$= \cos^{-1}\frac{a\cos^2\frac{\theta}{2}+b\cos^2\frac{\theta}{2}-a\sin^2\frac{\theta}{2}+b\sin^2\frac{\theta}{2}}{a\cos^2\frac{\theta}{2}+b\cos^2\frac{\theta}{2}+a\sin^2\frac{\theta}{2}-b\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$2\tan^{-1}x = \tan^{-1}x\frac{2x}{1-x^2}$$

$$= \cos^{-1}\frac{b\left(\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+a\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{a\left(\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+b\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \cos^{-1}\frac{b\times 1+a\cos\theta}{a\times 1+b\cos\theta}$$ $[\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta]$

$$= \cos^{-1}\frac{b+a\cos\theta}{a+b\cos\theta}$$

= R.H.S $\quad\therefore$ **L.H.S = R.H.S**

Problems

11. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5} = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

Let, $\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5} = \theta$

$\therefore \cos^{-1}\frac{3}{5} = 2\theta$

$\therefore \cos 2\theta = \frac{3}{5}$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2.\sin\theta\,.\sin\theta}{2.\sin\theta\,.\cos\theta}$$

$$= \frac{2\sin^2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{1-\cos 2\theta}{\sqrt{1-\cos^2 2\theta}}$$

$[\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
$\therefore \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}]$

Problems

11. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5} = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

$$\tan\theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\frac{1}{2} \qquad \therefore \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{1}{2}$$

$$\text{L.H.S} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{2}$$

$$= \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$$

$$= \tan^{-1}(1)$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$= \text{R.H.S}$$

$\therefore$ **L.H.S = R.H.S**

Problems

12. প্রমাণ কর যে, $\sin cot^{-1} \tan \cos^{-1} x = x$

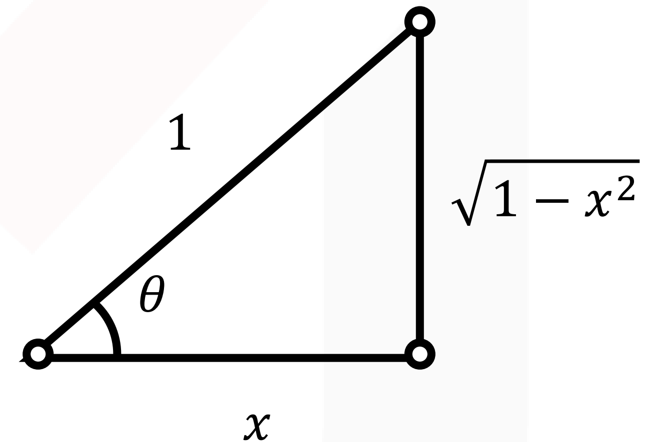
$$\text{L.H.S} = \sin\cot^{-1}\tan\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$= \sin\cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$= \sin\sin^{-1}\frac{x}{1}$$

$$= x$$

$$= \text{R.H.S}$$



$\therefore$ L.H.S = R.H.S

DOWNLOAD THE APP

Shortcut

10 MINUTE SCHOOL

i) যদি $\tan^{-1}$ এবং cot অথবা $\cot^{-1}$ এবং tan থাকে তাহলে Auto কাটাকাটি যাবে

ii) যদি $\sin^{-1}$ এবং cos অথবা $\cos^{-1}$ এবং sin থাকে তাহলে Auto কাটাকাটি যাবে

iii) যদি sec এবং $cosec^{-1}$ অথবা $cosec$ এবং $\sec^{-1}$ থাকে তাহলে Auto কাটাকাটি যাবে

$$cot\ \cos^{-1} sin\ tan^{-1}\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$cos\ tan^{-1}\ cot\ sin^{-1} x = x$$

Problems

13. প্রমাণ কর যে, $\sin\cos^{-1}\tan\sec^{-1}\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{2y^2-x^2}}{y}$

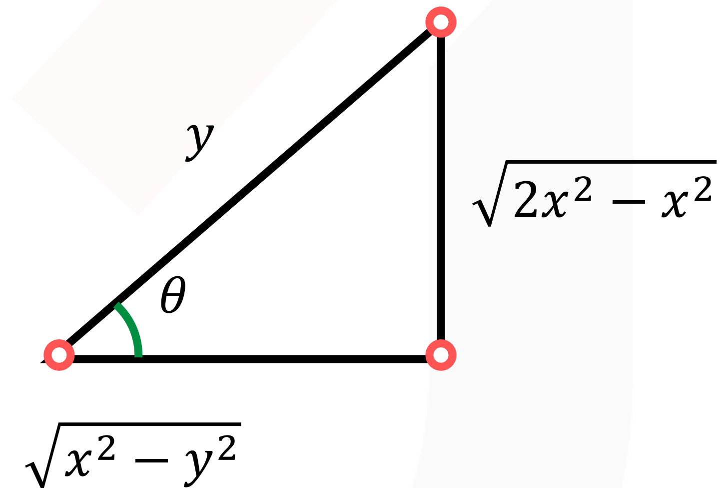
$$\text{L.H.S} = \sin\cos^{-1}\tan\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{y}$$

$$= \sin\cos^{-1}\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{y}$$

$$= \sin\sin^{-1}\frac{\sqrt{2y^2-x^2}}{y}$$

$$= \frac{\sqrt{2y^2-x^2}}{y}$$

= R.H.S



Problems

14. প্রমাণ কর, $\sec^2(\tan^{-1} 2) + \text{cosec}^2(\cot^{-1} 3) = 15$

L.H.S. $= \sec^2(\tan^{-1} 2) + \text{cosec}^2(\cot^{-1} 3)$

$= 1+\tan^2(\tan^{-1} 2) + 1 + \cot^2(\cot^{-1} 3)$

$= 1+\{\tan(\tan^{-1} 2)\}^2+1 + \{\cot(\cot^{-1} 3)\}^2$

$= 1+4+1+9$

$= 15$

= R.H.S.

$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$

$\text{cosec}^2 x - \cot^2 x = 1$

Problems

15. $\cos^{-1}\frac{x}{a}+\cos^{-1}\frac{y}{b}=\theta$ হলে দেখাও যে, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy\cos\theta}{ab}+\frac{y^2}{b^2}=\sin^2\theta$

$$\cos^{-1}\frac{x}{a}+\cos^{-1}\frac{y}{b}=\theta$$

$$\Rightarrow \cos^{-1}\left(\frac{x}{a}.\frac{y}{b}-\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\right)=\theta$$

$$\Rightarrow \frac{xy}{ab}-\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)}=\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{xy}{ab}-\cos\theta=\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2y^2}{a^2b^2}-2.\frac{xy}{ab}.\cos\theta+\cos^2\theta=1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2y^2}{a^2b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy\cos\theta}{ab}+\frac{y^2}{b^2}=1-\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy\cos\theta}{ab}+\frac{y^2}{b^2}=\sin^2\theta$$

সূত্রঃ $\cos^{-1}a+\cos^{-1}b=\cos^{-1}\left(ab\sqrt{1-a^2}.\sqrt{1-b^2}\right)$

Problems

16. যদি, $\boldsymbol{sin(\pi\cos\theta) = cos(\pi\sin\theta)}$ হয় তবে দেখাও যে, $\boldsymbol{\theta = \pm\frac{1}{2}sin^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)}$

$$\sin(\pi\cos\theta) = \cos(\pi\sin\theta)$$

$$\Longrightarrow \sin(\pi\cos\theta) = \sin\left\{\frac{\pi}{2} \pm \pi\sin\theta\right\}$$

$$\Longrightarrow \pi\cos\theta = \frac{\pi}{2} \pm \pi\sin\theta$$

$$\Longrightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \pm \sin\theta$$

$$\Longrightarrow \cos\theta \pm \sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow (\cos\theta \pm \sin\theta)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{[বর্গ করে]}$$

$$\Longrightarrow \cos^2\theta \pm 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta = \frac{1}{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \cos\theta$$

Problems

16. যদি, $sin(\pi \cos\theta) = cos(\pi \sin\theta)$ হয় তবে দেখাও যে, $\theta = \pm\frac{1}{2}sin^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

$$\Rightarrow 1 \pm \sin 2\theta = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \pm \sin 2\theta = -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \sin 2\theta = \pm\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 2\theta = \sin^{-1}\left(\pm\frac{3}{4}\right)$$

$$\therefore \theta = \pm\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

Problems

17. যদি, $sin(\pi\cos\theta) = cos(\pi\sin\theta)$ হয় তবে দেখাও যে, $\theta = \pm\frac{\pi}{4} + cos^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$$\sin(\pi\cos\theta) = \cos(\pi\sin\theta)$$

$$\Rightarrow \sin(\pi\cos\theta) = \sin\left\{\frac{\pi}{2} \pm \pi\sin\theta\right\}$$

$$\Rightarrow \pi\cos\theta = \frac{\pi}{2} \pm \pi\sin\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \pm \sin\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta \pm \sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{4}\cos\theta \pm \sin\frac{\pi}{4}\sin\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\theta \pm \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \theta \pm \frac{\pi}{4} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$\therefore \theta = \pm\frac{\pi}{4} + \cos^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

Problems

18. **যদি $A + B + C = \pi$; $tan^{-1}2 = A$ এবং $tan^{-1}3 = B$ হয় তবে প্রমান কর যে, $C = \frac{\pi}{4}$ ।**

দেওয়া আছে, $\tan^{-1}2 = A$ এবং $\tan^{-1}3 = B$

$\therefore \tan A = 2$ এবং $\tan B = 3$

এখন, $A + B = \pi - C$

$$\Rightarrow \tan(A + B) = \tan(\pi - C)$$

$$\Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$$

$$\Rightarrow \frac{2 + 3}{1 - 2.3} = -\tan C$$

$$\Rightarrow \tan C = \tan\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore C = \frac{\pi}{4}$$

Problems

19. $\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2}\tan^{-1}x$

$$\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2}\tan^{-1}x$$

$$\Rightarrow 2\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x} = \tan^{-1}x$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{2\times\frac{1-x}{1+x}}{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} = \tan^{-1}x$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{2-2x}{1+x}}{1-\frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}} = x$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{2-2x}{1+x}}{\frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{(1+x)^2}} = x$$

$$\Rightarrow \frac{2-2x}{1+x}\times\frac{(1+x)^2}{(1+x)^2-(1-x)^2} = x$$

$[(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab]$

$$\Rightarrow \frac{(2-2x)(1+x)}{4.1.x} = x$$

Problems

$$\Longrightarrow 2 + 2x - 2x - 2x^2 = 4x^2$$

$$\Longrightarrow 2 = 4x^2 + 2x^2$$

$$\Longrightarrow 2 = 6x^2$$

$$\Longrightarrow x^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Longrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

x এর ধনাত্মক ও ঋণাত্মক উভয় মান প্রদত্ত সমীকরণে বসিয়ে শুদ্ধি পরিক্ষা করতে হবে

Problems

20. সমাধান করঃ $\tan(\cos^{-1} x) = \sin(\tan^{-1} 2)$

$$\tan(\cos^{-1} x) = \sin(\tan^{-1} 2)$$

$$\Rightarrow \tan\left(\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = \sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2$$

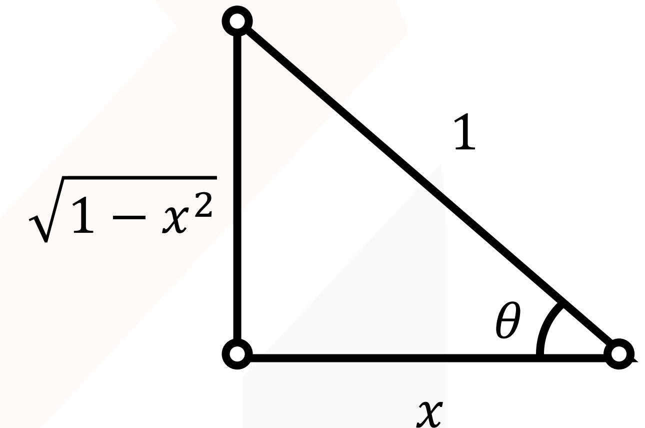
$$\Rightarrow \frac{1-x^2}{x^2} = \frac{4}{5}$$

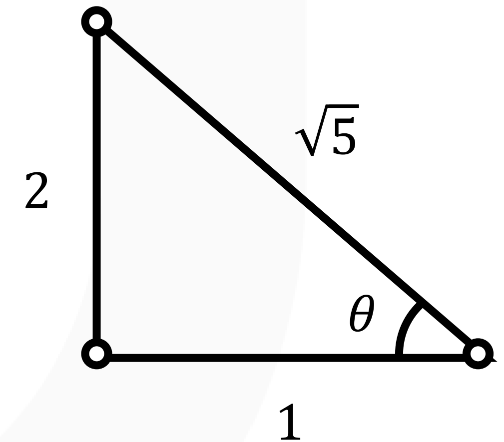
$$\Rightarrow 5 - 5x^2 = 4x^2$$

$$\Rightarrow 5 = 9x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$





বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন

$\sin\theta = 0$

$\theta = 0°/180°/360°/540°/720°\ldots$ কতগুলো মান পাওয়া সম্ভব?

$\theta = 0 = 0 \times \pi$

$\theta = 180 = 1 \times \pi$

$\theta = 360 = 2 \times \pi$

$\theta = 540 = 3 \times \pi$

.

.

.

$\boldsymbol{\theta = n\pi, n \in \mathbb{Z}}$

বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন

$\therefore \sin\theta = 0$

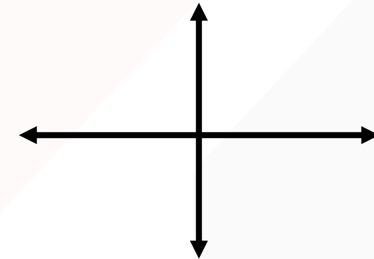
$\theta = 0 \times x$

$\theta = n\pi, n \in \mathbb{Z}$

$tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta} \Rightarrow sin\theta = 0$ হলে, $tan\theta = 0$

$tan\theta = 0$ হলে,

$\boldsymbol{\theta = n\pi, n \in \mathbb{Z}}$



বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন

$cos\theta = 0$ হলে,

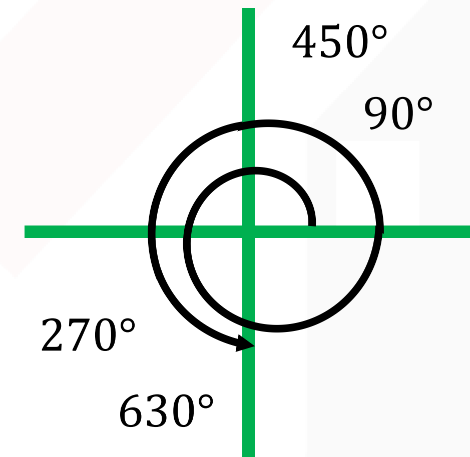
$\theta = 90° = (2 \times 0 + 1) \times 90°$

$\theta = 270° = (2 \times 1 + 1) \times 90°$

$\theta = 450° = (2 \times 2 + 1) \times 90°$

$\theta = 630° = (2 \times 3 + 1) \times 90°$

$\therefore \theta = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$



বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন

$\sin\theta = 0$

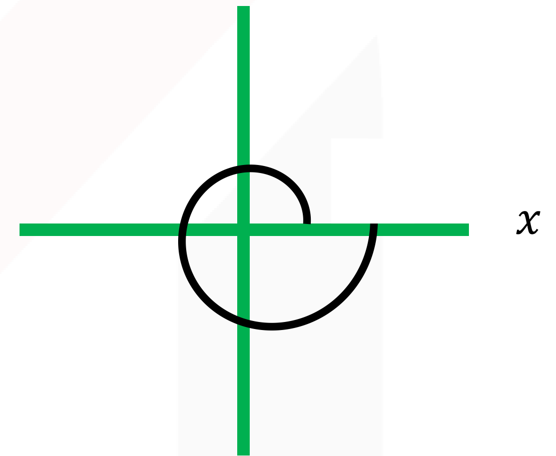
$\sin 0^\circ = 0 \Longrightarrow \sin(0 \times \pi) = 0$

$\sin 180^\circ = 0 \Longrightarrow \sin(1 \times \pi) = 0$

$\sin 360^\circ = 0 \Longrightarrow \sin(2 \times \pi) = 0$

$\sin 540^\circ = 0 \Longrightarrow \sin(3 \times \pi) = 0$

$\therefore \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{n\pi}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}$



x অক্ষে sin এর মান হচ্ছে 0

বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন

$\cos\theta = 0$

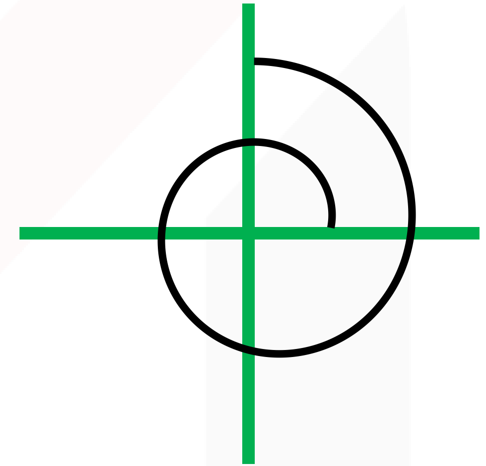
$\cos 90° = 0 \Longrightarrow \cos(2\times 0+1)\times\frac{\pi}{2} = 0$

$\cos 270° = 0 \Longrightarrow \cos(2\times 1+1)\times\frac{\pi}{2} = 0$

$\cos 450° = 0 \Longrightarrow \cos(2\times 2+1)\times\frac{\pi}{2} = 0$

$\cos 630° = 0 \Longrightarrow \cos(2\times 3+1)\times\frac{\pi}{2} = 0$

$\therefore \cos\theta = 0 \Longrightarrow \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad ; n\in\mathbb{Z}$



y অক্ষে cos এর মান হচ্ছে 0

বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন

$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 30° = 0 \times 180 + 30° = 0 \times 180 + (-1)^0 30°$$

$$\theta = 150° = 1 \times 180 + 30° = 1 \times 180 + (-1)^1 30°$$

$$\theta = 390° = 2 \times 180 + 30° = 2 \times 180 + (-1)^2 30°$$

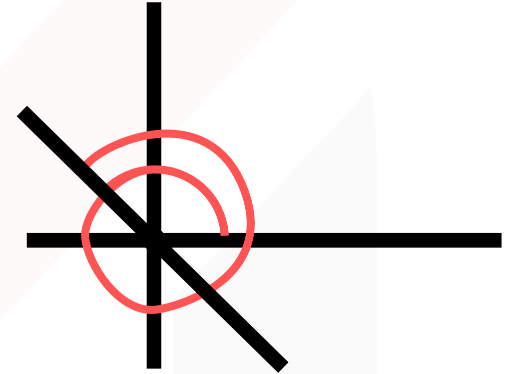
$$\theta = 510° = 3 \times 180 + 30° = 3 \times 180 + (-1)^3 30°$$

$$\sin\theta = \sin 30°$$

$$\boldsymbol{\theta = n\pi + (-1)^n \times 30°; n \in \mathbb{Z}}$$

অথবা, $\sin\theta = \sin\alpha$

$$\boldsymbol{\theta = n\pi + (-1)^n \times \alpha; n \in \mathbb{Z}}$$



$$sin\theta = \frac{1}{2} = sin30° = sin\alpha$$

$$sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = sin30° = sin\alpha$$

$$sin\theta = -\frac{1}{2} = sin30° = sin\alpha$$

বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন

$\sin\theta = 1$

$\theta = 90° = (4 \times 0 + 1)\dfrac{\pi}{2}$

$\theta = 450° = (4 \times 1 + 1)\dfrac{\pi}{2}$

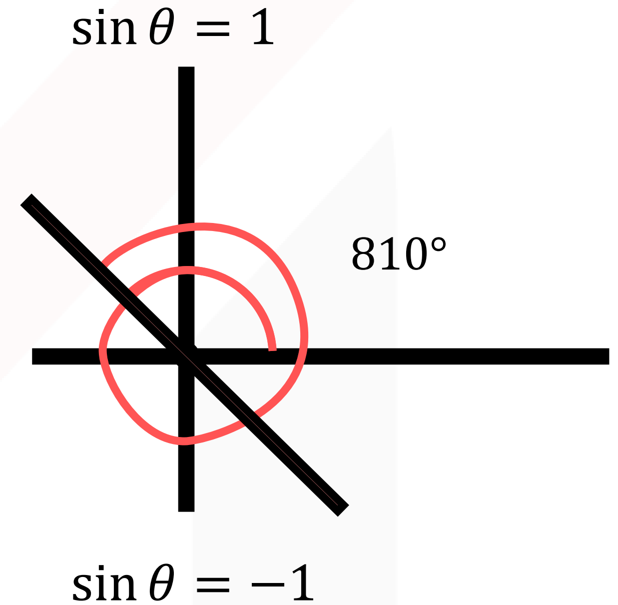
$\theta = 810° = (4 \times 2 + 1)\dfrac{\pi}{2}$

.

.

.

$\theta = (4 \times n + 1)\dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$



বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন

সূত্রাবলী

$\therefore \cos\theta = 0 \Longrightarrow \boxed{\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}} \quad ; n \in \mathbb{Z}$

$\therefore \tan\theta = 0 \Longrightarrow \boxed{\theta = n\pi} \quad ; n \in \mathbb{Z}$

$\therefore \tan\theta = \tan\alpha \Longrightarrow \boxed{\theta = n\pi + \alpha} \quad ; n \in \mathbb{Z}$

$\therefore \cos\theta = 1 \Longrightarrow \boxed{\theta = 2n\pi} \quad ; n \in \mathbb{Z}$

$\therefore \sin\theta = 1 \Longrightarrow \boxed{\theta = (4n+1)\frac{\pi}{2}} \quad ; n \in \mathbb{Z}$

$\therefore \cot\theta = 0 \Longrightarrow \boxed{\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}} \quad ; n \in \mathbb{Z}$

$\therefore \cos\theta = \cos\alpha \Longrightarrow \boxed{\theta = 2n\pi \pm \alpha} \quad ; n \in \mathbb{Z}$

গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলি

(i) $\sin\theta = 0$ হলে, $\theta = n\pi$; $[n \in \mathbb{Z}]$

$\cos\theta = 0$ হলে, $\theta = (2n+1)\dfrac{\pi}{2} = n\pi + \dfrac{\pi}{2}$

$\tan\theta = 0$ হলে, $\theta = n\pi$

$\cot\theta = 0$ হলে, $\theta = (2n+1)\dfrac{\pi}{2} = n\pi + \dfrac{\pi}{2}$

(ii) $\sin\theta = 1$ হলে, $\theta = (4n+1)\dfrac{\pi}{2}$

$\sin\theta = -1$ হলে, $\theta = (4n-1)\dfrac{\pi}{2}$

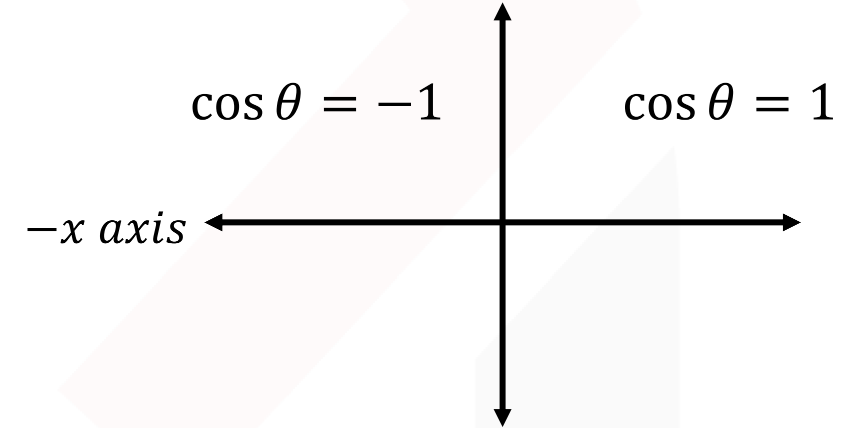
(iii) $\cos\theta = 1$ হলে, $\theta = 2n\pi$

$\cos\theta = -1$ হলে, $\theta = (2n+1)\pi = 2n\pi + \pi$

(iv) $\sin\theta = \sin\alpha$ হলে, $\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$

$\cos\theta = \cos\alpha$ হলে, $\theta = 2n\pi \pm \alpha$

$\tan\theta = \tan\alpha$ হলে, $\theta = n\pi + \alpha$



$$cot\theta = \frac{cos\theta}{sin\theta}$$

$$\tan\theta = \tan\frac{\pi}{3}$$

$$\tan\theta = \tan\frac{\pi}{4}$$

অপ্রাসঙ্গিক মূল

উদাহরণঃ $\cos\theta - \sin\theta = 1$

$\Longrightarrow \cos\theta = 1 + \sin\theta$

$\Longrightarrow \cos^2\theta = 1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta$

$\Longrightarrow 1 - \sin^2\theta = 1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta$

$\Longrightarrow 2\sin^2\theta + 2\sin\theta = 0$

$\Longrightarrow \sin\theta(\sin\theta + 1) = 0$

$\therefore \sin\theta = 0$

$\Longrightarrow \theta = n\pi \quad ; [n \in \mathbb{Z}]$

অথবা,

$\therefore \sin\theta + 1 = 0$

$\Longrightarrow \sin\theta = -1$

$\Longrightarrow \theta = (4n-1)\frac{\pi}{2} \quad ; [n \in \mathbb{Z}]$

কিন্তু $x = \pm\pi, \pm3\pi, \pm5\pi, \dots\dots\dots$ এসব মূলের জন্য উপরোক্ত সমীকরণ সিদ্ধ হয় না।

তাই এগুলো অবান্তর মূল।

অপ্রাসঙ্গিক মূল

এ জাতীয় $(a\sin x + b\cos x = c)$ সমীকরণে অবান্তর মূলের প্রবেশ রোধ করার জন্য একটি নতুন পদ্ধতি ব্যবহার করি $\longrightarrow$

$$\cos x - \sin x = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \left[\text{উভয়ই পক্ষকে } \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \text{ দ্বারা ভাগ করে}\right]$$

$$\Rightarrow \cos x \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}; \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = 2n\pi \quad \text{অথবা} \quad \Rightarrow x = (4n-1)\frac{\pi}{2}$$

Type-1

$a \sin x \pm b \cos x = c$ (a, b ও c ধ্রুবক)

$a \cos x \pm b \sin x = c$ যদি থাকে [একঘাতি হতে হবে]

তাহলে $\sqrt{a^2 + b^2}$ দিয়ে উভয়পক্ষকে ভাগ করতে হবে।

Problems

1. $\boldsymbol{\sin x + \cos x = \sqrt{2}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{[-2\pi \leq x \leq 2\pi]}$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = 1$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{4}\sin x + \cos\frac{\pi}{4}\cos x = 1$$

$$\Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \qquad [\cos A\,.\cos B + \sin A\,.\sin B = \cos(A - B)]$$

$$\Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = 2n\pi \qquad [\cos\theta = 1, \theta = 2n\pi \text{ হয়}]$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x = 2n\pi + \frac{\pi}{4}} \qquad ; \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}$$

Problems

1. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ $[-2\pi \leq x \leq 2\pi]$

$$x = 2n\pi + \frac{\pi}{4} \quad ; n \in \mathbb{Z}$$

এখন, $-2\pi \leq 2n\pi + \frac{\pi}{4} \leq 2\pi$

$$= -2\pi - \frac{\pi}{4} \leq 2n\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \leq 2\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{-9\pi}{4} \leq 2n\pi \leq \frac{7\pi}{4}$$

$$= \frac{-9}{8} \leq n \leq \frac{7}{8}$$

$$= -1.125 \leq n \leq 0.875$$

কিন্তু এখানে n পূর্ণসংখ্যা $\therefore n = -1, 0$

Problems

2. $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$ $\quad [-2\pi < x < 2\pi]$

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2} \qquad \left[\sqrt{3^2 + 1^2} = 2\right]$$

$$\Rightarrow \cos x \cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x - \frac{\pi}{6} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

Problems

2. $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1 \qquad [-2\pi < x < 2\pi]$

(+) নিয়ে, $x = 2n\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

$= 2n\pi + \frac{\pi}{2}$

(−) নিয়ে, $x = 2n\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

$= 2n\pi - \frac{\pi}{6}$

$n = 1, x = \frac{5\pi}{2}, -\frac{11\pi}{6}$

$n = -1, x = -\frac{3\pi}{2}, -\frac{13\pi}{6}$

$n = 0, x = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}$

$\therefore x$ এর গ্রহণযোগ্য মান $= -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

Type-2

ত্রিকোণমিতিক সমীকরণটিকে একটু **Modify** করলেই **Type-1 এর মতো** হয়ে যাবে।

Problems

1. $\operatorname{cosec} x + \cot x = \sqrt{3}$

$$\operatorname{cosec} x + \cot x = \sqrt{3}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \sqrt{3}$$

$$\Longrightarrow \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \sqrt{3}$$

$$\Longrightarrow \frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\Longrightarrow \cot\frac{x}{2} = \sqrt{3}$$

$$\Longrightarrow \tan\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6} \quad \therefore \frac{x}{2} = n\pi + \frac{\pi}{6} \quad ; n \in \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow x = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$; যেখানে $n \in \mathbb{Z}$

Type-3

sin ও cos এর মধ্যে **একটি দ্বিঘাত ও অপরটি একঘাত**

(tan, sec, cosec, cot উভয়ই ক্ষেত্রে প্রযোজ্য)।

Problems

1. $4\left(\sin^2\theta + \cos\theta\right) = 5 \qquad [-2\pi < \theta < 2\pi]$

$$4(\sin^2\theta + \cos\theta) = 5$$
$$\Longrightarrow 4(1 - \cos^2\theta + \cos\theta) = 5$$
$$\Longrightarrow 4 - 4\cos^2\theta + 4\cos\theta = 5$$
$$\Longrightarrow 4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0$$
$$\Longrightarrow (2\cos\theta)^2 - 2.2\cos\theta + 1^2 = 0$$
$$\Longrightarrow (2\cos\theta - 1)^2 = 0$$
$$\Longrightarrow 2\cos\theta - 1 = 0$$
$$\Longrightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow \cos\theta = \cos\frac{\pi}{3}$$
$$\Longrightarrow \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \qquad ; n \in \mathbb{Z}$$

Short note:-

$2n\pi$ থাকলে $n = -1, 0, 1$ হয় আর অন্য সময়ে $n = -2, -1, 0, 1, 2$ ধরেও করতে হয়

Problems

1. $\mathbf{4(\sin^2\theta + \cos\theta) = 5}$ $\quad$ $\mathbf{[-2\pi < \theta < 2\pi]}$

(+) নিয়ে, $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$ $\quad ; n \in \mathbb{Z}$

(−) নিয়ে, $\theta = 2n\pi - \frac{\pi}{3}$ $\quad ; n \in \mathbb{Z}$

$n = -1$ হলে $\theta = -\frac{5\pi}{3}, -\frac{7\pi}{3}$

$n = 0$ হলে $\theta = \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$

$n = 1$ হলে $\theta = \frac{7\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

$\therefore x$ এর গ্রহণযোগ্য মান $= -\frac{5\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

$= \pm\frac{5\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{3}$

Problems

2. $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta=2$ $\quad [-2\pi<\theta<2\pi]$

$$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta=2$$

$$\Longrightarrow \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=2$$

$$\Longrightarrow \frac{\cos^2\theta+\sin\theta\,(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)\cos\theta}=2$$

$$\Longrightarrow \cos^2\theta+\sin\theta+\sin^2\theta=2\cos\theta\,(1+\sin\theta)$$

$$\Longrightarrow 1+\sin\theta=2\cos\theta\,(1+\sin\theta)$$

$$\Longrightarrow (1+\sin\theta)-2\cos\theta\,(1+\sin\theta)=0$$

$$\Longrightarrow (1+\sin\theta)(1-2\cos\theta)=0$$

Problems

2. $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta=2$ $\qquad [-2\pi<\theta<2\pi]$

$\implies (1+\sin\theta)(1-2\cos\theta)=0$

$\implies 1+\sin\theta=0$

কিন্তু $1+\sin\theta=0$ হলে প্রদত্ত সমীকরণ অসংজ্ঞায়িত হবে।

$\therefore 1+\sin\theta\neq 0$

$\implies 1-2\cos\theta=0$

$\implies 1=2\cos\theta$

$\implies \cos\theta=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3} \quad ; n\in\mathbb{Z}$

Problems

3. $\cos\theta - \cos 7\theta = \sin 4\theta$

$$\cos\theta - \cos 7\theta = \sin 4\theta$$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{\theta + 7\theta}{2}.\sin\frac{7\theta - \theta}{2} = \sin 4\theta$$

$[\cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}.\sin\frac{D-C}{2}]$

$$\Rightarrow 2\sin 4\theta.\sin 3\theta = \sin 4\theta$$

$$\Rightarrow 2\sin 4\theta.\sin 3\theta - \sin 4\theta = 0$$

$$\Rightarrow \sin 4\theta\,(2\sin 3\theta - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \sin 4\theta = 0$$

$$\Rightarrow 4\theta = n\pi\,;n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{n\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 2\sin 3\theta - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2\sin 3\theta = 1$$

$$\Rightarrow \sin 3\theta = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow 3\theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6} \quad ;n \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \theta = \frac{n\pi}{3} + (-1)^n\frac{\pi}{18} \quad ;n \in \mathbb{Z}$$

Problems

4. $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2 \qquad [-2x < x < 2x]$

$$2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$$
$$\Longrightarrow 1 - \cos 2x + 1 - \cos^2 2x = 2$$
$$\Longrightarrow 2 - \cos 2x - \cos^2 2x = 2$$
$$\Longrightarrow 2 + \cos^2 2x + \cos 2x - 2 = 0$$
$$\Longrightarrow \cos 2x\,(\cos 2x + 1) = 0$$

$$\Longrightarrow \cos 2x = 0$$
$$\Longrightarrow 2x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$
$$\Longrightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{4}; n \in \mathbb{Z}$$

$$\Longrightarrow \cos 2x + 1 = 0$$
$$\Longrightarrow \cos 2x = -1$$
$$\Longrightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$$

Problems

4. $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$ $\quad [-2x < x < 2x]$

$\Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{4}; n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$

লিমিট দেয়া আছে, $-2\pi < x < 2\pi$

$= -2\pi < (2n+1)\frac{\pi}{2} < 2\pi$

$= -2\pi < n\pi + \frac{\pi}{2} < 2\pi$

$= -2\pi - \frac{\pi}{2} < n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} < 2\pi - \frac{\pi}{2}$

$= -\frac{5\pi}{2} < n\pi < \frac{3\pi}{2}$

$= -\frac{5}{2} < n < \frac{3}{2}$

$n = -2, -1, 0, 1$

আবার, $-2\pi < x < 2\pi$

$= -2\pi < (2n+1)\frac{\pi}{4} < 2\pi$

$= -2 < (2n+1)\frac{1}{4} < 2$

$= -2 < \frac{n}{2} + \frac{1}{4} < 2$

DOWNLOAD THE APP

Problems

10 MINUTE SCHOOL

4. $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$ $\quad [-2x < x < 2x]$

আবার, $-2\pi < x < 2\pi$

$$= -2\pi < (2n+1)\frac{\pi}{4} < 2\pi$$

$$= -2 < (2n+1)\frac{1}{4} < 2$$

$$= -2 < \frac{n}{2} + \frac{1}{4} < 2$$

$$= -2 - \frac{1}{4} < \frac{n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} < 2 - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{-9}{4} < \frac{n}{2} < \frac{7}{4}$$

$$= \frac{-9}{2} < n < \frac{7}{2} \quad = -4.5 < n < 3.5 \quad n = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

Problems

5. $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta$

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta$$

$$\Longrightarrow 2\sin 2\theta\,.\cos\theta + 2\sin\theta\cos\theta = 2\cos^2\theta + \cos\theta$$

$$\Longrightarrow \cos\theta\,(2\sin 2\theta + 2\sin\theta) = \cos\theta\,(2\cos\theta + 1)$$

$$\Longrightarrow \cos\theta\,(2.2\sin\theta\cos\theta + 2\sin\theta) - \cos\theta\,(2\cos\theta + 1) = 0$$

$$\Longrightarrow \cos\theta\,(4\sin\theta\cos\theta + 2\sin\theta - 2\cos\theta - 1) = 0$$

$$\Longrightarrow \cos\theta\,\{2\sin\theta\,(2\cos\theta + 1) - 1(2\cos\theta + 1)\} = 0$$

$$\Longrightarrow \cos\theta\,(2\cos\theta + 1)(2\sin\theta - 1) = 0$$

DOWNLOAD THE APP

Problems

10 MINUTE SCHOOL

5. $\boldsymbol{\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta}$

$$\Longrightarrow \cos\theta\,(2\cos\theta + 1)(2\sin\theta - 1) = 0$$

$$\Longrightarrow \cos\theta = 0$$

$$\therefore \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2};\, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Longrightarrow 2\cos\theta + 1 = 0$$

$$\Longrightarrow 2\cos\theta = -1$$

$$\Longrightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \cos\theta = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3};\, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Longrightarrow 2\sin\theta - 1 = 0$$

$$\Longrightarrow 2\sin\theta = 1$$

$$\Longrightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6};\, n \in \mathbb{Z}$$

Problems

6. $\mathbf{4\cos x \,.\, \cos 2x \,.\, \cos 3x = 1} \qquad \mathbf{[0 < x < \pi]}$

$$4\cos x \,.\, \cos 2x \,.\, \cos 3x = 1$$

$$\Longrightarrow 2.(2\cos 3x \,.\, \cos x)\cos 2x = 1$$

$$\Longrightarrow 2\cos 2x\,(\cos 4x + \cos 2x) = 1$$

$$\Longrightarrow 2\cos 4x \cos 2x + 2\cos^2 2x = 1$$

$$\Longrightarrow 2\cos 4x \cos 2x + 2\cos^2 2x - 1 = 0 \qquad \mathbf{[2\cos^2 x - 1 = \cos 2x]}$$

$$\Longrightarrow 2\cos 4x \cos 2x + \cos 4x = 0$$

$$\Longrightarrow \cos 4x\,(2\cos 2x + 1) = 0$$

Problems

6. $\mathbf{4\cos x \,.\, \cos 2x \,.\, \cos 3x = 1} \qquad \mathbf{[0 < x < \pi]}$

$\Longrightarrow \cos 4x\,(2\cos 2x + 1) = 0$

$\Longrightarrow \cos 4x = 0$

$\Longrightarrow 4x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$

$\therefore x = (2n+1)\dfrac{\pi}{8}; n \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow 2\cos 2x + 1 = 0$

$\Longrightarrow 2\cos 2x = -1$

$\Longrightarrow \cos 2x = -\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3}$

$\Longrightarrow 2x = 2n\pi \pm \dfrac{2\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$

$\therefore x = n\pi \pm \dfrac{\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$

Problems

7. $\tan\theta + \tan 2\theta + \sqrt{3}\tan\theta\tan 2\theta = \sqrt{3}$

$\therefore x = (2n+1)\frac{\pi}{8}; n \in \mathbb{Z}$

$\therefore x = n\pi \pm \frac{\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$

$n = 0$ হলে, $x = \frac{\pi}{8}, \pm\frac{\pi}{3}$

$n = 1$ হলে, $x = \frac{3\pi}{8}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

$n = 2$ হলে, $x = \frac{5\pi}{8}, 2\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$n = 3$ হলে, $x = \frac{7\pi}{8}, 3\pi \pm \frac{\pi}{3}$

x এর গ্রহণযোগ্য মান $= \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{8}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$

Problems

7. $\boldsymbol{\tan\theta + \tan 2\theta + \sqrt{3}\tan\theta\tan 2\theta = \sqrt{3}}$

$$\tan\theta + \tan 2\theta + \sqrt{3}\tan\theta\tan 2\theta = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan\theta + \tan 2\theta = \sqrt{3}(1 - \tan\theta\tan 2\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{\tan\theta + \tan 2\theta}{1 - \tan\theta\tan 2\theta} = \sqrt{3}$$

$$\left[\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}\right]$$

$$\Rightarrow \tan(\theta + 2\theta) = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan(\theta + 2\theta) = \tan\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \tan 3\theta = \tan\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 3\theta = n\pi + \frac{\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$$

[$\tan\theta = \tan\alpha$ হলে, $\theta = n\pi + \alpha$]

$$\Rightarrow \theta = \frac{1}{3}n\pi + \frac{\pi}{9}; n \in \mathbb{Z}$$

CQ

বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন

[ঢাকা বোর্ড '১৯]

$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, g(y) = \frac{1-y^2}{1+y^2}$ এর $h(x) = sinx$

(ক) $cos^{-1}m = \frac{\pi}{2}$ হলে, প্রমাণ করো যে $m^2 + n^2 = 1$

(খ) $cosec^{-1}\frac{1}{f(a)} - sec^{-1}\frac{1}{g(b)} = 2tan^{-1}x$ হলে, দেখাও যে $x = \frac{a-b}{1+ab}$।

(গ) $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ব্যবধিতে $2h(\theta).h(3\theta) = 1$ সমীকরণটির সমাধান করো।

CQ

(ক) $cos^{-1}m = \frac{\pi}{2}$ হলে, প্রমাণ করো যে $m^2 + n^2 = 1$

$$cos^{-1}m + cos^{-1}n = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow cos^{-1}\, m = \frac{\pi}{2} - cos^{-1}n$$

$$\Rightarrow m = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \underbrace{cos^{-1}n}_{\theta}\right)$$

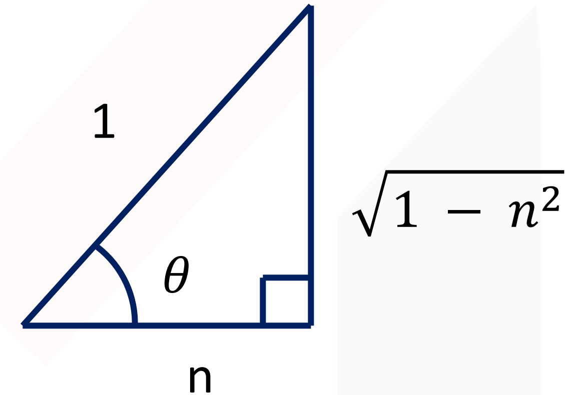
θ

$$\Rightarrow m = \sin\left(sin^{-1}\frac{\sqrt{1-n^2}}{1}\right)$$

$$\Rightarrow m = \sqrt{1-n^2}$$

$$\Rightarrow m^2 = 1 - n^2$$

$$\therefore \boldsymbol{m^2 + n^2 = 1} \qquad (Ans)$$



CQ

$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, g(y) = \frac{1-y^2}{1+y^2}$ এর $h(x) = sinx$

(খ) $cosec^{-1}\frac{1}{f(a)} - sec^{-1}\frac{1}{g(b)} = 2tan^{-1}x$ হলে, দেখাও যে $x = \frac{a-b}{1+ab}$ ।

$$cosec^{-1}\frac{1}{f(a)} - sec^{-1}\frac{1}{g(b)} = 2tan^{-1}x$$

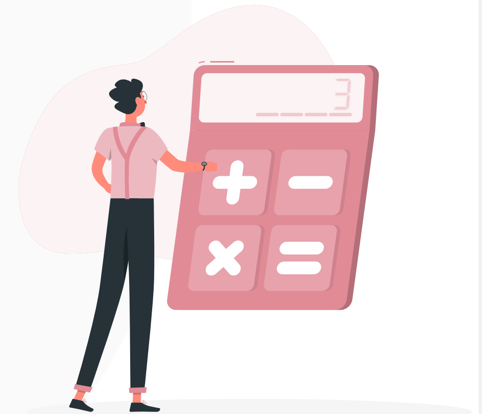
$$\Rightarrow cosec^{-1}\frac{1}{\frac{2a}{1+a^2}} - sec^{-1}\frac{1}{\frac{1-b^2}{1+b^2}} = 2tan^{-1}x$$

[∵ $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, এবং $g(y) = \frac{1-y^2}{1+y^2}$]

$$\Rightarrow cosec^{-1}\frac{1+a^2}{2a} - sec^{-1}\frac{1+b^2}{1-b^2} = 2tan^{-1}x$$

$$\Rightarrow sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2} - cos^{-1}\frac{1-b^2}{1+b^2} = 2tan^{-1}x$$

$$\Rightarrow 2tan^{-1}a - 2tan^{-1}b = 2tan^{-1}x$$



CQ

$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, g(y) = \frac{1-y^2}{1+y^2}$ এর $h(x) = sinx$

(খ) $cosec^{-1}\frac{1}{f(a)} - sec^{-1}\frac{1}{g(b)} = 2tan^{-1}x$ হলে, দেখাও যে $x = \frac{a-b}{1+ab}$।

$$\Rightarrow tan^{-1}x = tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}$$

$\therefore x = \frac{a-b}{1+ab}$। [দেখানো হলো]



CQ

$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, g(y) = \frac{1-y^2}{1+y^2}$ এর $h(x) = sinx$

(গ) $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ব্যবধিতে $2h(\theta).h(3\theta) = 1$ সমীকরণটির সমাধান করো।

দেওয়া আছে, $h(x) = sinx$

প্রদত্ত সমীকরণটি, $2h(\theta).h(3\theta) = 1$

$\Longrightarrow 2sin\theta.sin3\theta = 1$ যখন, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$2sin\theta\ sin3\theta = 1$

বা, $cos2\theta - cos4\theta - 1 = 0$ $\quad$ $[\boldsymbol{2sinAsinB = cos(A-B) - cos(A+B)}]$

বা, $cos2\theta - (1 + cos4\theta) = 0$

বা, $cos2\theta - 2cos^2 2\theta = 0$

বা, $cos2\theta(1 - 2cos2\theta) = 0$

CQ

$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, g(y) = \frac{1-y^2}{1+y^2}$ এর $h(x) = sinx$

(গ) $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ব্যবধিতে $2h(\theta).h(3\theta) = 1$ সমীকরণটির সমাধান করো।

হয়, $cos2\theta = 0$

$\therefore 2\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta = (2n+1)\frac{\pi}{4}$

হয়, $1 - 2cos2\theta = 0$

বা, $cos2\theta = \frac{1}{2} = cos\frac{\pi}{3}$

বা, $2\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

যখন, n এর মান শূন্য বা যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

$n = 0$ হলে, $\theta = \pm\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$

$n = 1$ হলে, $\theta = \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}$

$n = 2$ হলে, $\theta = \frac{11\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}$

CQ

$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, g(y) = \frac{1-y^2}{1+y^2}$ এর $h(x) = sinx$

(গ) $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ব্যবধিতে $2h(\theta).h(3\theta) = 1$ সমীকরণটির সমাধান করো।

$n = 3$ হলে, $\theta = \frac{7\pi}{4}$

∴ প্রদত্ত সীমার মধ্যে মানসমূহ $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}}$ **(Ans)**



CQ

দৃশ্যকল্প-১: $secA = \sqrt{5}, cosecB = \frac{5}{3}$ এবং $cotC = 3$

দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = sinx.$

[রাজশাহী বোর্ড '১৯]

(ক) $cosec^{-1}\sqrt{17} + sec^{-1}\frac{\sqrt{26}}{5}$ এর মান নির্ণয় করো।

(খ) দৃশ্যকল্প-১ থেকে, $A + C - \frac{1}{2}B$ এর মান নির্ণয় করো।

(গ) সমাধান করো: দৃশ্যকল্প-২ থেকে

$\sqrt{3}f(x) - f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 2.$ যখন $-2\pi < x < 2\pi$

CQ

(ক) $cosec^{-1}\sqrt{17} + sec^{-1}\frac{\sqrt{26}}{5}$ এর মান নির্ণয় করো।

$$cosec^{-1}\sqrt{17} + sec^{-1}\frac{\sqrt{26}}{5} = tan^{-1}\frac{1}{4} + tan^{-1}\frac{1}{5}$$

$$= tan^{-1}\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{4}.\frac{1}{5}}$$

$$= tan^{-1}\frac{\frac{5+4}{20}}{\frac{20-1}{20}}$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{9}{20}\times\frac{20}{19}\right) = \boldsymbol{tan^{-1}\frac{9}{19}} \quad (Ans)$$

$$\tan^{-1} a + \tan^{-1} b = \tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab}$$

CQ

দৃশ্যকল্প-১: $secA = \sqrt{5}, cosecB = \frac{5}{3}$ এবং $cotC = 3$

দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = sinx.$

(খ) দৃশ্যকল্প-১ থেকে, $A + C - \frac{1}{2}B$ এর মান নির্ণয় করো।

দেওয়া আছে,

$$secA = \sqrt{5}$$
$$\therefore A = sec^{-1}\sqrt{5}$$
$$= cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$cosecB = \frac{5}{3}$$
$$\therefore B = cosec^{-1}\frac{5}{3}$$
$$= sin^{-1}\frac{3}{5}$$

$$cotC = 3$$
$$\therefore C = cot^{-1}3$$
$$= tan^{-1}\frac{1}{3}$$

প্রদত্ত রাশি, $A + C - \frac{1}{2}B$

$$= cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} + tan^{-1}\frac{1}{3} - \frac{1}{2}sin^{-1}\frac{3}{5}$$

ধরি, $\frac{1}{2}sin^{-1}\frac{3}{5} = x$

$$\Longrightarrow sin^{-1}\frac{3}{5} = 2x$$

CQ

দৃশ্যকল্প-১: $secA = \sqrt{5}, cosecB = \frac{5}{3}$ এবং $cotC = 3$

দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = sinx.$

(খ) দৃশ্যকল্প-১ থেকে, $A + C - \frac{1}{2}B$ এর মান নির্ণয় করো।

$$\Rightarrow \frac{3}{5} = sin2x$$

$$\Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{2tanx}{1+tan^2x}$$

$$\Rightarrow 3 + 3tan^2x = 10\,tanx$$

$$\Rightarrow 3tan^2x - 10tanx + 3 = 0$$

$$\therefore tanx = \frac{1}{3}, 3$$

কিন্তু প্রদত্ত সমীকরণটি $tanx = 3$ এর জন্য সত্য নয়।

$\therefore tanx = \frac{1}{3}$ $\therefore x = tan^{-1}\frac{1}{3}$

CQ

দৃশ্যকল্প-১: $secA = \sqrt{5}, cosecB = \frac{5}{3}$ এবং $cotC = 3$

দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = sinx.$

(খ) দৃশ্যকল্প-১ থেকে, $A + C - \frac{1}{2}B$ এর মান নির্ণয় করো।

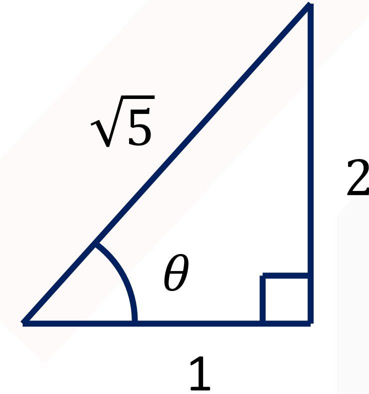
$\therefore \frac{1}{2}sin^{-1}\frac{3}{5} = tan^{-1}\frac{1}{3}$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} + tan^{-1}\frac{1}{3} - \frac{1}{2}sin^{-1}\frac{3}{5}$

$= cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} + tan^{-1}\frac{1}{3} - tan^{-1}\frac{1}{3}$

$= cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}$

$= tan^{-1} 2$ (Ans)



CQ

দৃশ্যকল্প-১: $secA = \sqrt{5}, cosecB = \frac{5}{3}$ এবং $cotC = 3$

দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = sinx.$

(গ) সমাধান করো: দৃশ্যকল্প-২ থেকে

$\sqrt{3}f(x) - f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 2.$ যখন $-2\pi < x < 2\pi$

দেওয়া আছে, $f(x) = sinx.$

প্রদত্ত সমীকরণ, $\sqrt{3}f(x) - f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 2;$ যখন $-2\pi < x < 2\pi$

বা, $\sqrt{3}sinx - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 2$ বা, $\sqrt{3}sinx - cosx = 2$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2}sinx - \frac{1}{2}cosx = \frac{2}{2}$ **[উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]**

বা, $sinx\cos\frac{\pi}{6} - cosx\sin\frac{\pi}{6} = 1$ বা, $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$

বা, $x - \frac{\pi}{6} = (4n + 1)\frac{\pi}{2}$ $\therefore x = (4n + 1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$

CQ

দৃশ্যকল্প-১: $secA = \sqrt{5}, cosecB = \frac{5}{3}$ এবং $cotC = 3$

দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = sinx.$

(গ) সমাধান করো: দৃশ্যকল্প-২ থেকে

$\sqrt{3}f(x) - f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 2.$ যখন $-2\pi < x < 2\pi$

যেখানে, n এর মান শূন্য বা অন্য যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

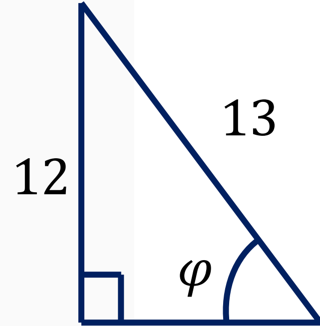
$n = 0$ তখন, $x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$

$n = -1$ তখন, $x = \frac{-3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{-4\pi}{3}$

নির্ণেয় সমাধান, $\mathbf{x} = \frac{-4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ যখন $-2\pi < x < 2\pi$ **(Ans)**

CQ

দৃশ্যকল্প-১:



[দিনাজপুর বোর্ড '১৯]

দৃশ্যকল্প-২: $g(x) = cotx$.

(ক) $tan^{-1}4$ ও $tan^{-1}\frac{5}{3}$ এর সমষ্টি নির্ণয় করো।

(খ) দৃশ্যকল্প-১: এর আলোকে প্রমাণ করো যে,

$$\frac{1}{2}\varphi + sin^{-1}\frac{3}{5} = cot^{-1}2 + cot^{-1}\frac{29}{18}$$

(গ) সমাধান করো: $g\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).g\left(\frac{3\pi}{2} - 2\theta\right) = 1, 0 \le \theta \le \pi$

CQ

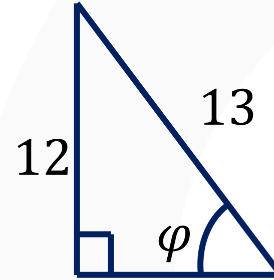
(ক) $tan^{-1}4$ ও $tan^{-1}\frac{5}{3}$ এর সমষ্টি নির্ণয় করো।

$$tan^{-1}4 + tan^{-1}\frac{5}{3} = tan^{-1}\frac{4+\frac{5}{3}}{1-4\times\frac{5}{3}} = tan^{-1}\frac{\frac{12+5}{3}}{\frac{3-20}{3}} = tan^{-1}\frac{17}{-17}$$

$$= tan^{-1}(-1) = tan^{-1}\left(tan\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4} \quad (Ans)$$

CQ

দৃশ্যকল্প-১:

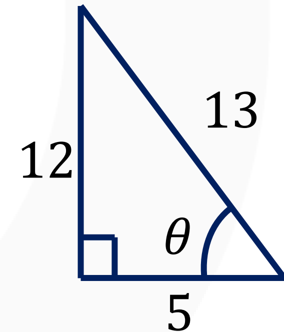


(খ) দৃশ্যকল্প-১: এর আলোকে প্রমাণ করো যে,

$\frac{1}{2}\varphi + sin^{-1}\frac{3}{5} = cot^{-1}2 + cot^{-1}\frac{29}{18}$

প্রমাণ করতে হবে যে, $\frac{1}{2}\varphi + sin^{-1}\frac{3}{5} = cot^{-1}2 + cot^{-1}\frac{29}{18}$

$\therefore \frac{1}{2}sin^{-1}\frac{12}{13} + sin^{-1}\frac{3}{5} = cot^{-1}2 + cot^{-1}\frac{29}{18}$ [দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত চিত্রানুসারে]

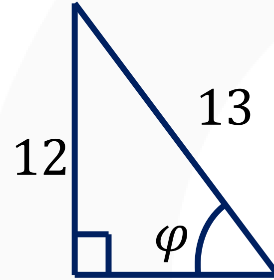


ধরি, $sin^{-1}\frac{12}{13} = 2\theta \ldots\ldots\ldots (i)$

বা, $cos^{-1}\frac{5}{13} = 2\theta$

CQ

দৃশ্যকল্প-১:



(খ) দৃশ্যকল্প-১: এর আলোকে প্রমাণ করো যে,

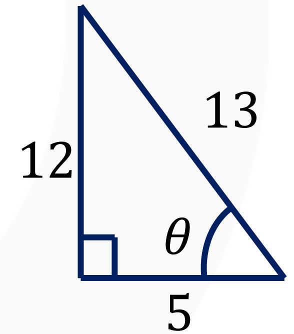
$\frac{1}{2}\varphi + sin^{-1}\frac{3}{5} = cot^{-1}2 + cot^{-1}\frac{29}{18}$

বা, $cos2\theta = \frac{5}{13}$

বা, $\frac{1-tan^2\theta}{1+tan^2\theta} = \frac{5}{13}$

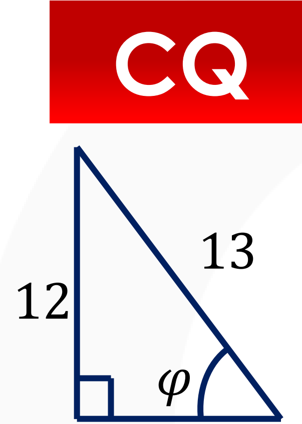
বা, $5 + 5tan^2\theta = 13 - 13tan^2\theta$

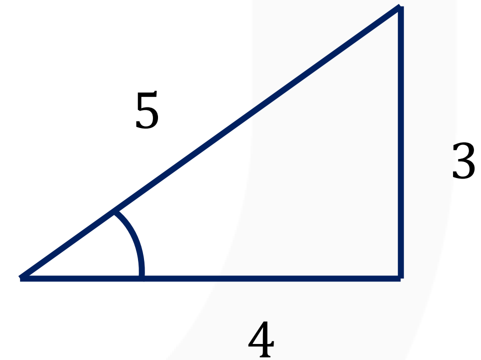
বা, $18tan^2\theta = 8$ বা, $tan^2\theta = \frac{8}{18}$



CQ

দৃশ্যকল্প-১:





(খ) দৃশ্যকল্প-১: এর আলোকে প্রমাণ করো যে,

$$\frac{1}{2}\varphi + sin^{-1}\frac{3}{5} = cot^{-1}2 + cot^{-1}\frac{29}{18}$$

বা, $tan^2\theta = \frac{4}{9}$ বা, $tan\theta = \frac{2}{3}$ বা, $\theta = tan^{-1}\frac{2}{3}$

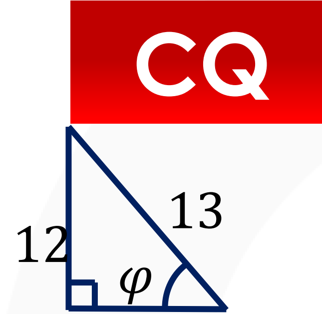
$\therefore \frac{1}{2}sin^{-1}\frac{12}{13} = tan^{-1}\frac{2}{3}$ [(i) নং হতে]

বামপক্ষ $= \frac{1}{2}\varphi + sin^{-1}\frac{3}{5} = \frac{1}{2}sin^{-1}\frac{12}{13} + sin^{-1}\frac{3}{5}$

$= tan^{-1}\frac{2}{3} + tan^{-1}\frac{3}{4} = tan^{-1}\frac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}{1-\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}}$

CQ

দৃশ্যকল্প-১:



(খ) দৃশ্যকল্প-১: এর আলোকে প্রমাণ করো যে,

$\frac{1}{2}\varphi + sin^{-1}\frac{3}{5} = cot^{-1}2 + cot^{-1}\frac{29}{18}$

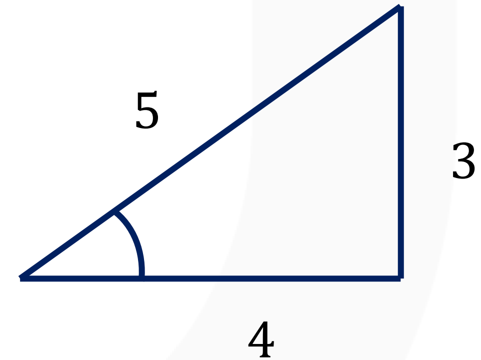
$= tan^{-1}\frac{\frac{8+9}{12}}{1-\frac{1}{2}} = tan^{-1}\frac{\frac{17}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{tan^{-1}17}{6}$

ডানপক্ষ, $cot^{-1}2 + cot^{-1}\frac{29}{28}$

$= tan^{-1}\frac{1}{2} + tan^{-1}\frac{28}{29} = tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{28}{29}}{1-\frac{1}{2}.\frac{28}{29}}$

$= tan^{-1}\frac{\frac{29+56}{58}}{\frac{58-28}{58}} = tan^{-1}\frac{85}{30} = tan^{-1}\frac{17}{6}$

$\therefore \frac{1}{2}\varphi + sin^{-1}\frac{3}{5} = cot^{-1}2 + cot^{-1}\frac{29}{18}$ [প্রমাণিত]



CQ

দৃশ্যকল্প-২: $g(x) = cotx.$

(গ) সমাধান করো: $g\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).g\left(\frac{3\pi}{2} - 2\theta\right) = 1, 0 \leq \theta \leq \pi$

দেওয়া আছে, $g(x) = cotx.$

$g\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).g\left(\frac{3\pi}{2} - 2\theta\right) = 1, 0 \leq \theta \leq \pi$

$\therefore \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) cot\left(\frac{3\pi}{2} - 2\theta\right) = 1$

বা, $tan\theta.tan2\theta = 1 \ldots\ldots\ldots (i)$

বা, $\frac{sin\theta.sin2\theta}{cos\theta.cos2\theta} = 1$

বা, $cos\theta.cos2\theta = sin\theta.sin2\theta$

বা, $cos\theta.cos2\theta - sin\theta.sin2\theta = 0$

CQ

দৃশ্যকল্প-২: $g(x) = cotx.$

(গ) সমাধান করো: $g\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).g\left(\frac{3\pi}{2} - 2\theta\right) = 1, 0 \leq \theta \leq \pi$

বা, $\cos(2\theta + \theta) = 0$ বা, $cos3\theta = cos\frac{\pi}{2}$

বা, $3\theta = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ \theta = (2n + 1)\frac{\pi}{6}$; যেখানে n এর মান শূন্য অথবা যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।

$n = -1$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{6}$

$n = 1$ হলে, $\theta = 3.\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ যা গ্রহণযোগ্য নয়। কারন, $\theta = \frac{\pi}{2}$ এর জন্য (i) নং সত্য নয়।

$n = 2$ হলে, $\theta = 5.\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

CQ

দৃশ্যকল্প-২: $g(x) = cotx.$

(গ) সমাধান করো: $g\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).g\left(\frac{3\pi}{2} - 2\theta\right) = 1, 0 \le \theta \le \pi$

$n = 3$ হলে, $\theta = 7.\frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} > \pi$

নির্দিষ্ট ব্যবধিতে নির্ণেয় সমাধান $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

(১) $\cot\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে θ এর মান কত হবে? যখন $180° < \theta < 360°$ [ঢা: বো: '১৯]

(ক) $210°$

(খ) $240°$

(গ) $300°$

(ঘ) $330°$

উত্তরঃ (গ) $300°$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

(২) $\tan^{-1}\frac{1}{3}$ =কত? [রা: বো: '১৯]

(ক) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{3}{5}$

(খ) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}$

(গ) $\sin^{-1}\frac{3}{5}$

(ঘ) $\cos^{-1}\frac{4}{5}$

উত্তরঃ (খ) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

(৩) $sin\theta + 1 = 0$ হলে $\theta = ?$ [রা: বো: '১৯]

(ক) $(4n-1)\frac{\pi}{2}, n \in z$

(খ) $(4n+1)\frac{\pi}{2}, n \in z$

(গ) $(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in z$

(ঘ) $(2n-1)\pi, n \in z$

উত্তরঃ (ক) $(4n-1)\frac{\pi}{2}, n \in z$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

(৪) $sinxcosx = \frac{1}{4}$ হলে x এর মান কত? [য: বো: '১৯]

(ক) $\frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{12}$

(খ) $2n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{12}$

(গ) $\frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{6}$

(ঘ) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$

উত্তরঃ (ক) $\frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{12}$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

(৫) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}=$ কত? [য: বো:'১৯]

(ক) $\tan^{-1}\frac{1}{3}$

(খ) $\tan^{-1}2$

(গ) $2\cos^{-1}\frac{4}{5}$

(ঘ) $\sin^{-1}\frac{1}{10}$

উত্তরঃ(ক) $\tan^{-1}\frac{1}{3}$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

(৬) $sin^2\left(\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$এর মান কোনটি? [কু: বো:'১৯]

(ক) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(খ) $\frac{1}{3}$

(গ) $\frac{2}{3}$

(ঘ) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

উত্তরঃ (গ) $\frac{2}{3}$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

(৭) $sin \tan^{-1}\frac{a}{b}$ এর মান -

(ক) $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(খ) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

(গ) $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(ঘ) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$

উত্তরঃ (ক) $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

(৮) $\sin^{-1} x$ এর ডোমেন - [চ: বো: '১৯]

(ক) $[-\pi, \pi]$

(খ) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

(গ) $[-1,1]$

(ঘ) $(-\infty, \infty)$

উত্তরঃ (গ) $[-1,1]$

MCQ

(৯) $\cot^{-1}\left(\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)$এর মান কত? [সি বো: '১৯]

(ক) 3

(খ) 15

(গ) $\frac{1}{15}$

(ঘ) $\frac{1}{3}$

উত্তরঃ (ক) 3

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

(১০) $cosx + secx = 2$ হলে, x এর মান কত? [সি: বো:'১৯]

(ক) $(2n+1)\pi$

(খ) $(2n+1)\frac{\pi}{2}$

(গ) $2\pi n$

(ঘ) $(2n+1)\frac{\pi}{4}$

উত্তরঃ (গ) $2\pi n$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

(১১) $\sin(2\tan^{-1}x)$এর সমান কোনটি? [সি:বো: '১৯]

(ক) $\frac{2x}{1-x^2}$

(খ) $\frac{1-x^2}{1+x^2}$

(গ) $\frac{1+x^2}{1-x^2}$

(ঘ) $\frac{2x}{1+x^2}$

উত্তরঃ(ঘ) $\frac{2x}{1+x^2}$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

(১২) a একটি পূর্ণসংখ্যা হলে $sin2\theta = \frac{1}{2}$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান কোনটি? [য:বো: '১৯]

(ক) $n\pi + \frac{\pi}{12}$

(খ) $n\pi +$

(গ) $n\pi - \frac{\pi}{12}$

(ঘ) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{12}$

উত্তরঃ (ঘ) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{12}$

MCQ

(১৩) $\cot\left(\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)$এর মান কত? [ব: বো: '১৯]

(ক) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(খ) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(গ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(ঘ) $\sqrt{3}$

উত্তরঃ (ঘ) $\sqrt{3}$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

(১৪) যদি $\sin^{-1} x = 2\theta$ হয়, তবে $cos2\theta$ এর মান কত? [দি: বো: '১৯]

(ক) $1 -$

(খ) $2x^2 - 1$

(গ) $1 - 2x^2$

(ঘ) $\sqrt{1 - x^2}$

উত্তরঃ (ঘ) $\sqrt{1 - x^2}$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

(১৫) $\cos\left\{2\left(\sin^{-1}\frac{3x}{2}+\cos^{-1}\frac{3x}{2}\right)\right\}=p$ হলে p এর মান কত? [দি: বো: '১৯]

(ক) 0

(খ) 1

(গ) -1

(ঘ) $\frac{\pi}{2}$

উত্তরঃ (গ) -1

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

(১৬) $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ সমীকরণের সমাধান কোনটি? [দি: বো: '১৯]

(ক) $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(খ) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(গ) $n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

(ঘ) $2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

উত্তরঃ (ঘ) $2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

(১৭) $sec^2(\cot^{-1}\sqrt{2}) - sin^2(\cos^{-1}1)$এর মান কোনটি? [সকল বোর্ড '১৮]

(ক) $\frac{1}{2}$

(খ) 1

(গ) $\frac{3}{2}$

(ঘ) 3

উত্তরঃ (গ)$\frac{3}{2}$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

(১৮) $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=0, n\in\mathbb{Z}$ সমীকরণের সমাধান কোনটি? [সকল বোর্ড '১৮]

(ক) $n\pi+\frac{\pi}{2}$

(খ) $2n\pi+\frac{\pi}{2}$

(গ) $n\pi-\frac{\pi}{2}$

(ঘ) $2n\pi-\frac{\pi}{2}$

উত্তরঃ (ক) $n\pi+\frac{\pi}{2}$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে ২০-২১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও: [ঢা:বো: '১৭]

$\cot\theta = k$ সমীকরণটির সমাধান $\theta = n\pi + \alpha$

(১৯) $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে α=কত?

(ক) $\frac{\pi}{6}$ (খ) $\frac{\pi}{4}$

(গ) $\frac{\pi}{3}$ (ঘ) $\frac{\pi}{2}$

উত্তরঃ (গ) $\frac{\pi}{3}$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

(২০) $K = 1$ এবং $\frac{\pi}{4} < \theta < 2\pi$ হলে এর মান কত?

(ক) $\frac{3\pi}{2}$

(খ) $\frac{5\pi}{4}$

(গ) $\frac{3\pi}{4}$

(ঘ) $\frac{\pi}{2}$

উত্তরঃ (খ) $\frac{5\pi}{4}$

MCQ

(২১) $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে [কু: বো: '১৭]

i. θ এর মুখ্যমান $\frac{\pi}{4}$

ii. $\theta = \{4n + (-1)^n\}\frac{\pi}{4}\ \forall n \in Z$

iii. $\theta = (4n+1)\frac{\pi}{2}, n \in Z$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i, ii (খ) ii, iii (গ) i, iii (ঘ) i, ii, iii

উত্তরঃ (ক) i, ii

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

(২২) বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের ক্ষেত্রে - [চ:বো: '১৭]

i. $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

ii. $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$

iii. $3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i, ii (খ) ii, iii (গ) i, iii (ঘ) i, ii, iii

উত্তরঃ (গ) i, iii

MCQ

(২৩) $3sec^4\theta + 8 = 10sec^2\theta$ হলে, $tan\theta$ এর মান কত? **[BUET 12-13]**

(ক) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

(খ) $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

(গ)$\pm\sqrt{3}$

(ঘ)$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

উত্তরঃ খ) $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

MCQ

(২৪) $cos\theta - cos7\theta = sin4\theta$ সমীকরণে θ এর মান - [SUST'09-10]

(ক) $\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$

(খ) $\frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{16}$

(গ) $\frac{n\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{18}$

(ঘ) $\frac{n\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{6}$

উত্তরঃ (গ) $\frac{n\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{18}$

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

(২৫) $4(sin^2\theta + cos\theta) = 5$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান- [DU'09-10]

(ক) $2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$

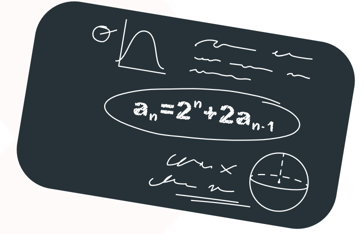
(খ) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(গ) $2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

(ঘ) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

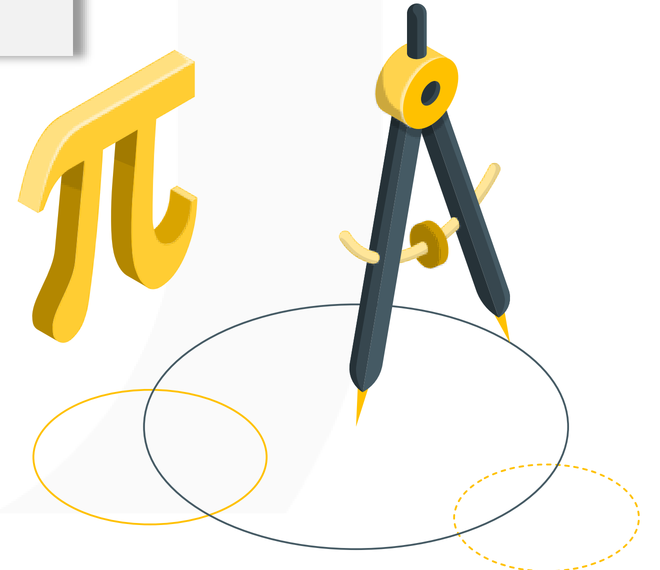
উত্তরঃ (খ) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$





স্থিতিবিদ্যা





10 MINUTE SCHOOL

বলবিদ্যা

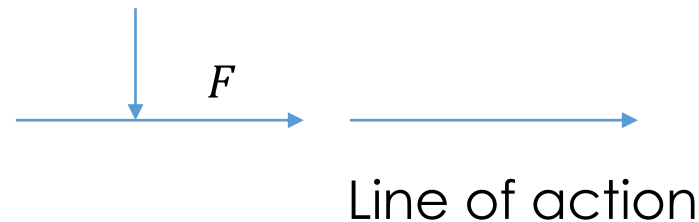
স্থিতি বিদ্যা
৮ম অধ্যায়

গতি বিদ্যা
৯ম অধ্যায়

স্থিতি বিদ্যাঃ

বলের বৈশিষ্ট্যঃ

- Point of action (প্রয়োগ বিন্দু)
- Line of action (ক্রিয়া রেখা)
- মান
- দিক



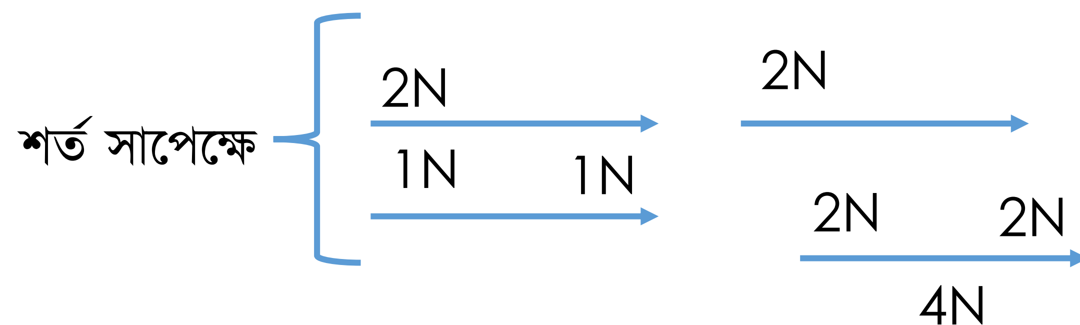
10 MINUTE SCHOOL

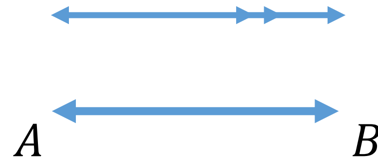
Especial Properties Of Vector:

- Shifting
- Scaling

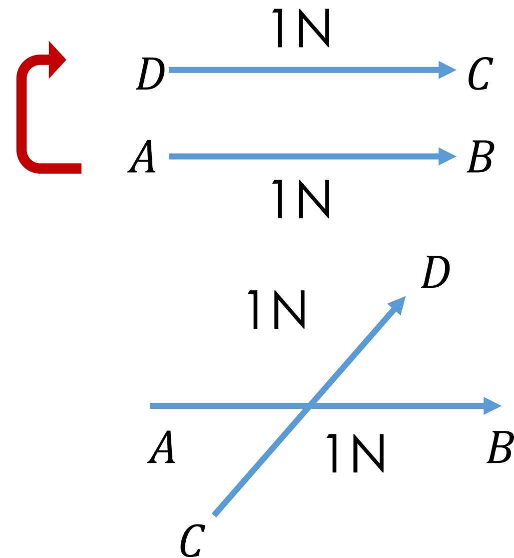


গ্রাফ





- **Shifting (স্থানান্তর):**



সমান্তরাল

$\overline{AB} = \overline{CD}$

$\overrightarrow{AB} = 1$

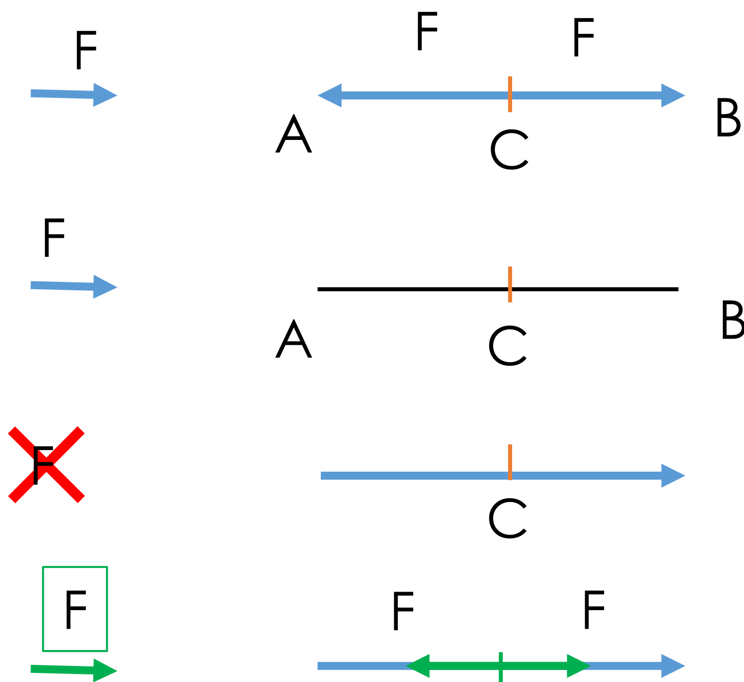
মান = 1 N

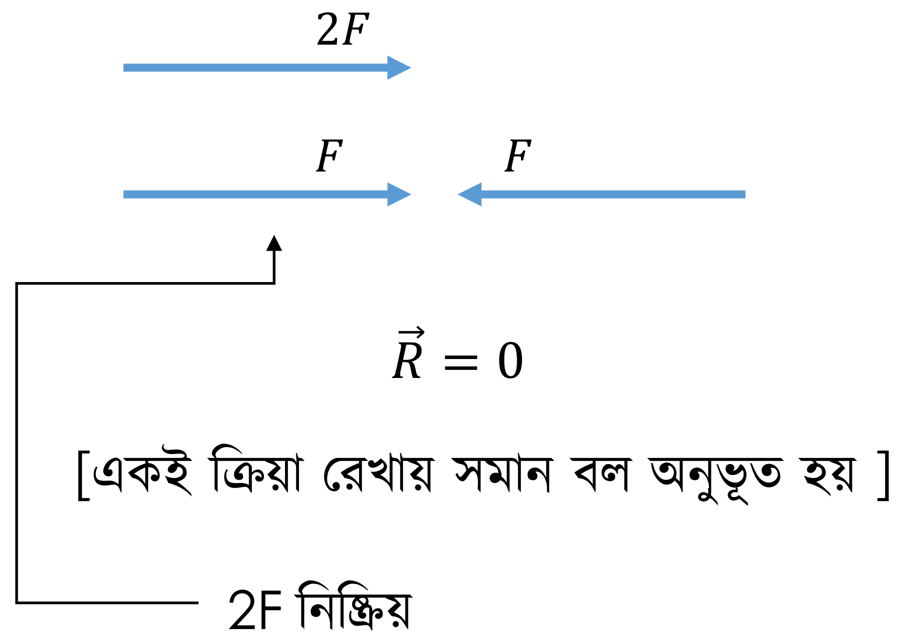
$\overline{AB} \neq \overline{CD}$

10 MINUTE SCHOOL

বলের স্থানান্তর বিধি :

$$\overrightarrow{AC} = \vec{F}$$
$$\overrightarrow{CA} = \vec{F}$$



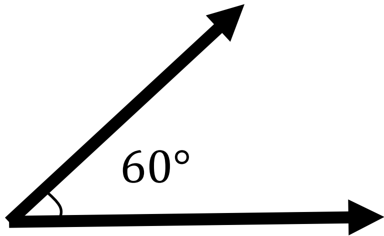


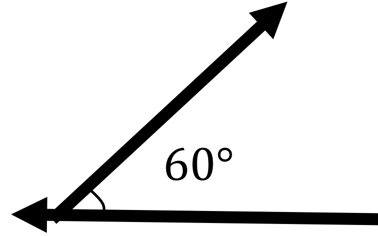
$$\vec{R} = 0$$

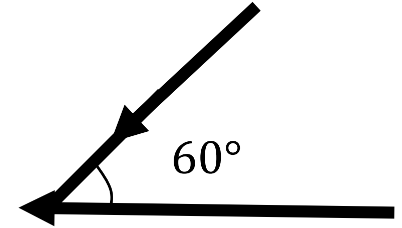
[একই ক্রিয়া রেখায় সমান বল অনুভূত হয়]

10 MINUTE SCHOOL

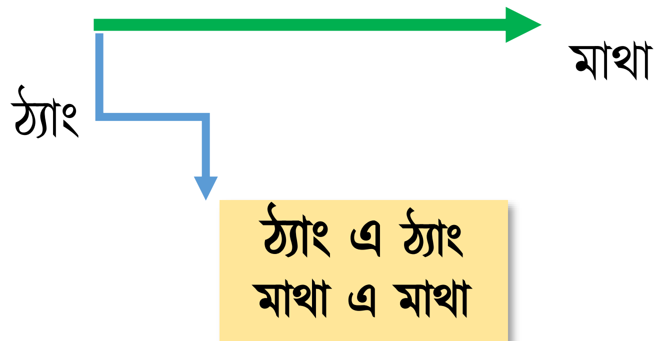
মধ্যবর্তী কোণ (না বুঝলেই শেষ)(প্যারা)



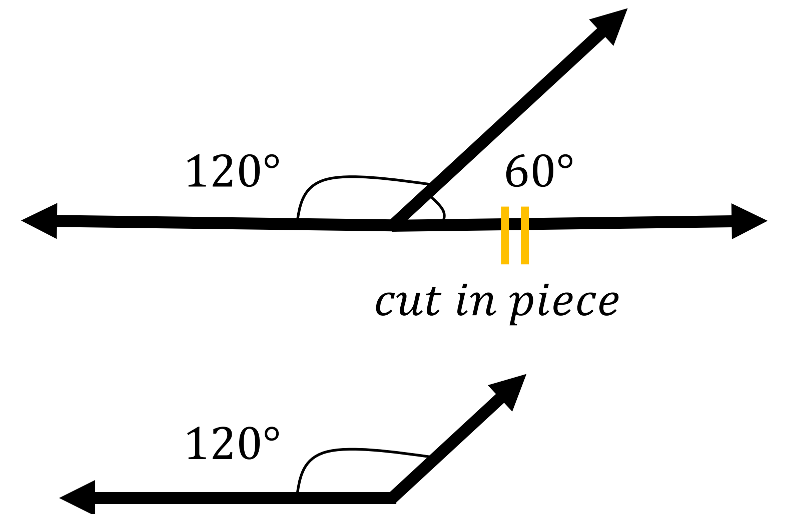




ভেক্টরের কোণ কখন উৎপন্ন হয়-



ঠ্যাং এ ঠ্যাং
মাথা এ মাথা



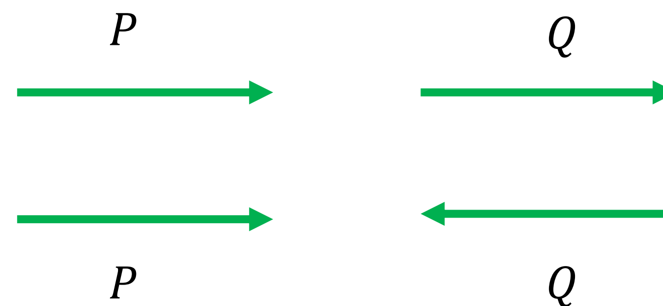
বলের লব্ধি :

সরল রেখার সূত্র :

$\vec{R} = \bar{P} + \bar{Q} \quad |R| = P + Q$

$\bar{R} =$

$P > Q \ or \ Q > P$



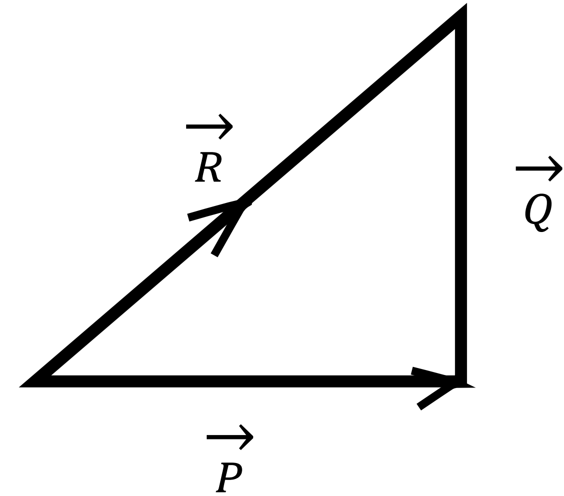
10 MINUTE SCHOOL

বলের লব্ধি :

ত্রিভুজ সূত্র :

$P > Q \ or \ Q > P$

$\bar{R} = \bar{P} + \bar{Q}$

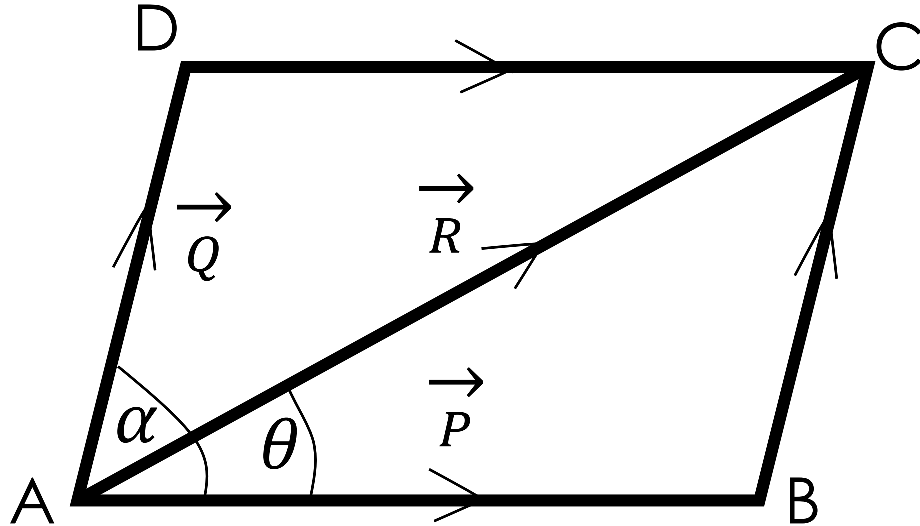


10 MINUTE SCHOOL

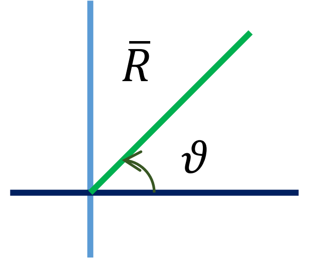
বলের লব্ধি :

পোলার (r, θ)

সামান্তরিক সূত্র : ১ বিন্দু, দুই বল



$$\bar{R} = \bar{P} + \bar{Q}$$
$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$$
$$\therefore R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$$
$$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$$



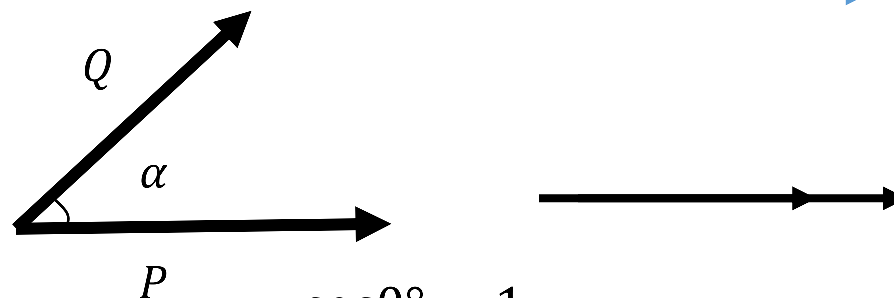
$$\tan\theta = \frac{P\sin\alpha}{Q+P\cos\alpha}$$

"যার সাথে লব্ধি সে থাকে একা"
যার সাথে angle সেই থাকে single

- $\boldsymbol{R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQcos\alpha}$ ← $\boldsymbol{\bar{R} = \bar{P} + \bar{Q}}$

$\bar{R}.\bar{R} = (\bar{P} + \bar{Q}).(\bar{P} + \bar{Q})$
$\Rightarrow \bar{R}.\bar{R} = \bar{P}.\bar{P} + \bar{P}\bar{Q} + \bar{Q}\bar{P} + \bar{Q}\bar{Q}$
$\Rightarrow R^2 = P^2 + Q^2 + 2\bar{P}\bar{Q}$
$\Rightarrow R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQcos\alpha$

$\bar{A}.\bar{B} = ABcos\theta$
$\bar{A}\bar{B} = \bar{B}\bar{A}$ → বিনিময় বিধি



$cos0° = 1$
$\bar{R}.\bar{R} = R.R.cos0° = R^2$

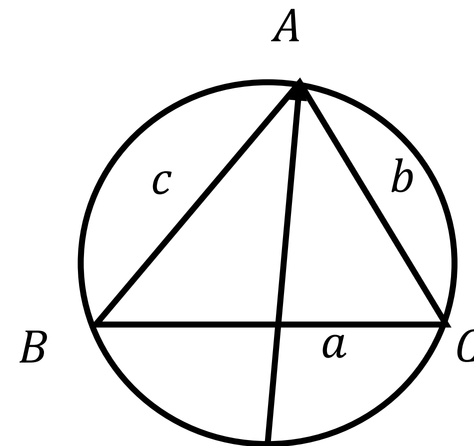
10 MINUTE SCHOOL

❑ sin সূত্র:

$$\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC} = 2R$$

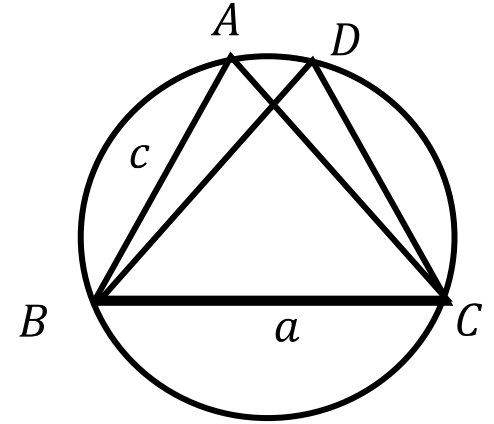
$2R$ =পরিব্যাস

R =পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ



10 MINUTE SCHOOL

Proof:



অধিবৃত্তের কোণ $BD = 2R$

$\angle D =$ সূক্ষ্মকোণ

$$\sin\angle BDC = \frac{BC}{BD}$$

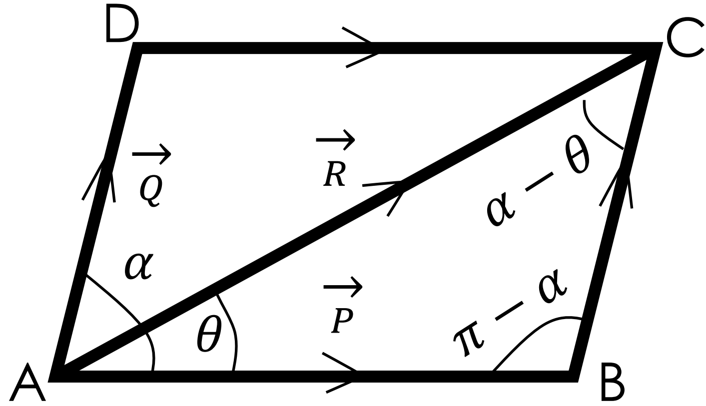
$$\Rightarrow \sin\angle BDC = \frac{a}{2R}$$

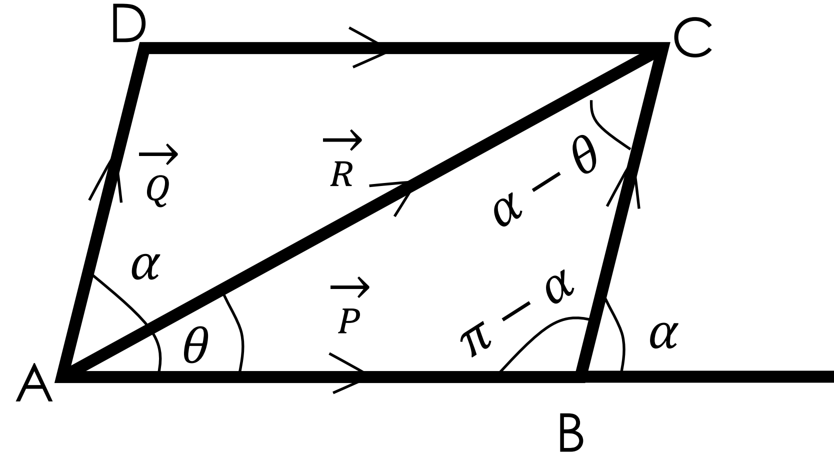
একই চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ গুলো পরস্পর সমান।

$$\Rightarrow \sin A = \frac{a}{2R}$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = 2R$$

10 MINUTE SCHOOL





যে বলের শক্তি বেশি সে লব্ধি কে নিজের দিকে টেনে রাখে।

$$\frac{P}{\sin(\alpha - \theta)} = \frac{Q}{sin\theta} = \frac{R}{\sin(\pi - \alpha)}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin(\alpha - \theta)} = \frac{Q}{sin\theta} = \frac{R}{\sin\alpha} = 2R$$

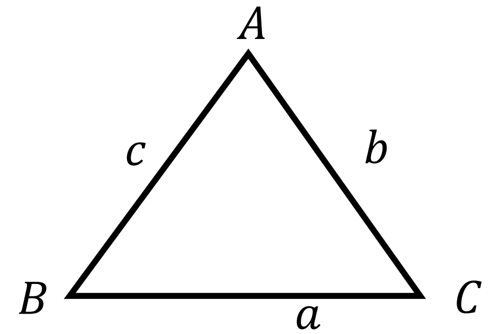
10 MINUTE SCHOOL

❑ cosine সূত্র:

$$cosA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$cosB = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

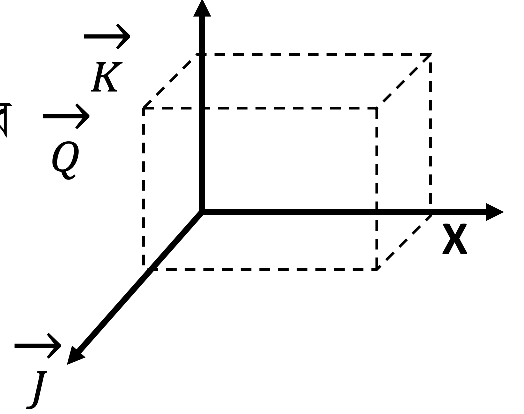
$$cosC = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$



10 MINUTE SCHOOL

লম্বাংশ উপপাদ্যঃ

একই বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত যেকোন সংখ্যক বলের কোন নির্দিষ্ট দিকে লম্বাংশসমূহের বীজগণিতীয় সমষ্টি একই দিকে এদের লব্ধির লম্বাংশের সমান।.



$$\vec{P} = P_x\hat{i} + P_y\hat{j} + P_z\hat{k}$$

$$\bar{R} = \bar{P} + \bar{Q}$$

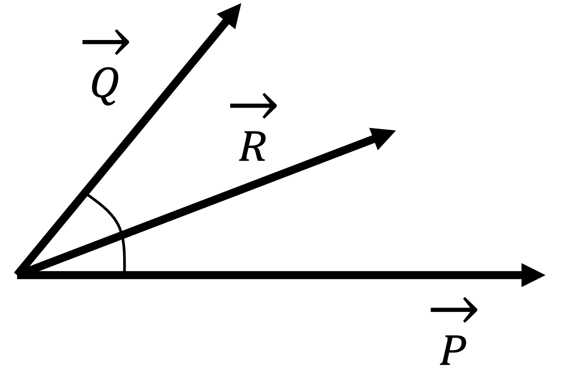
$$\vec{Q} = Q_x\hat{i} + Q_y\hat{j} + Q_z\hat{k}$$

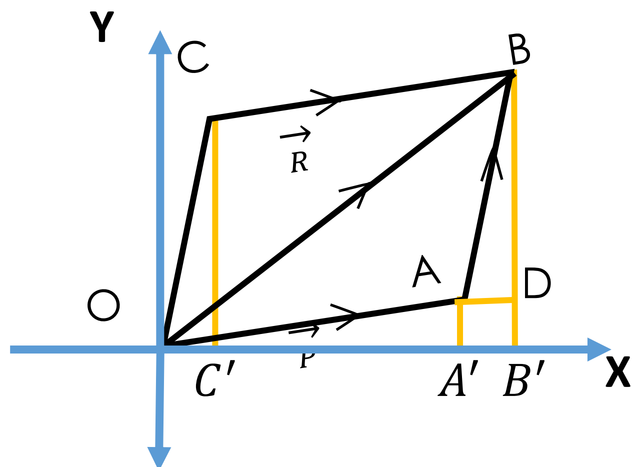
$$R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k} = \vec{R} = (P_x + Q_x)\hat{i} + (P_y + Q_y)\hat{j} + (P_z + Q_z)\hat{k}$$

$$R_x = P_x + Q_x$$

$$R_y = P_y + Q_y$$

$$R_z = P_z + Q_z$$





$OB' = OA' + OC'$

লব্ধি ↓ OB' ; লম্বাংশ ↓ OC'

লম্ব অভিক্ষেপ

$\overline{OA} = \bar{P} \longrightarrow OA'$

$\overline{OB} = \bar{Q} \longrightarrow OB'$

$\overline{OC} = \bar{R} \longrightarrow OC'$

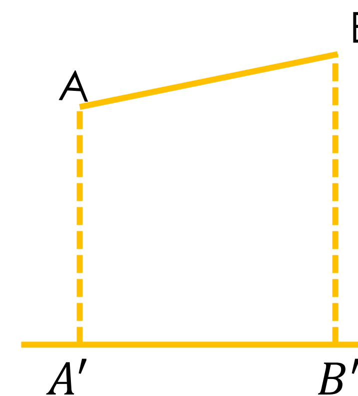
OCC' & $ABD \therefore OC' = AD$

$OB' = OA' + A'B'$

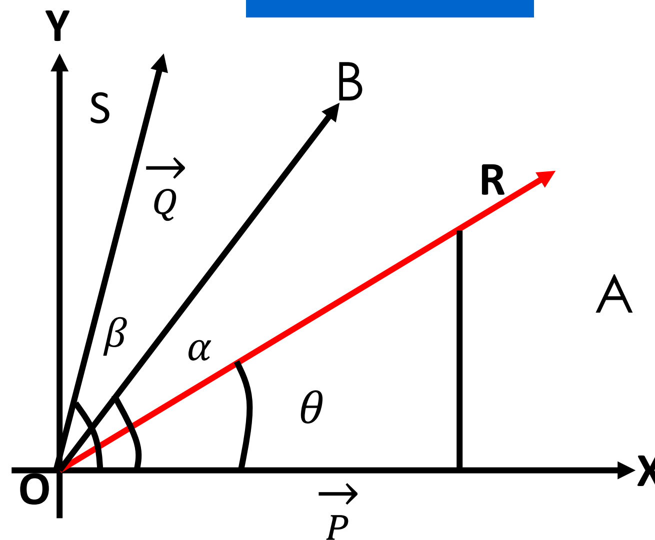
$= OA' + AD$

$= OA' + OC'$

$OB' = OA' + OC'$



QUIZ:



বলজোট

P বরাবর লম্বাংশ প্রয়োগ করে

$$R\cos\theta = P\cos 0° + Q\cos\alpha + S\cos\beta$$
$$\Rightarrow R\sin\theta = P\sin 0° + Q\sin\alpha + S\sin\beta$$

বলজোটের সমীকরণ

10 MINUTE SCHOOL

8(A)→Example

টাইপ ভিত্তিক সমস্যা

টাইপ ০১ লব্ধি নির্ণয় সংক্রান্ত

টাইপ ০২ সাইন সূত্রের প্রয়োগ

টাইপ ০৩ লম্বাংশ ও বলজোট সংক্রান্ত

টাইপ ০১ - লব্ধি নির্ণয় সংক্রান্ত

10 MINUTE SCHOOL

HOME WORK

১. কোনো বিন্দুতে 3P এবং 2P দুইটি বলের লব্ধি R; প্রথম বলটির মান দ্বিগুণ করলে লব্ধির মানও দ্বিগুণ হয়। বল দ্বয়ের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর।

[ঢা. বি. ১৪-১৫; বুয়েট-০৩-০৪; কু: বো: ০৭; সি: বো: ০৭]

২. কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q মানের দুটি বলের লব্ধি P বলের দিকের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে । P বলটিকে দ্বিগুণ করলে উক্ত কোণ $30°$ হয়। P ও Q এর অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর।

[বুয়েট ১১-১২]

৩. সমমানের দুইটি বল কোন কোন বিন্দুতে 2α কোণে ক্রিয়ারত থাকলে যে লব্ধি উৎপন্ন হয়, তা দ্বারা 2β কোণে ক্রিয়ারত থাকলে যে লব্ধি হয় তার দ্বিগুণ। প্রমাণ করো যে, $\cos\alpha = 2\cos\beta$.

[ঢা: বো: ১৫; রা: বো: ১০, ০৫; কু: বো: ১২]

HOME WORK

৪. θ কোণে ক্রিয়ারত P, Q মানের বল দ্বয়ের লব্ধি $(2m+1)\sqrt{P^2+Q^2}$, উক্ত কোণ টি $(90°-\theta)$ হলে লব্ধির মান $(2m-1)\sqrt{P^2+Q^2}$ হয়। প্রমাণ করে যে, $\tan\theta = \frac{m-1}{m+1}$.

[ঢা: বো: ১২, ০৮; রা: বো: ০৬; দি: বো: ১৫; মাদ্রাসা বো: ১৫,১২]

৫. কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি বলের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম লব্ধির মান যথাক্রমে F এবং G. প্রমাণ করো যে, বলদ্বয়ের ক্রিয়ারেখার মধ্যবর্তী কোণের মান α হলে তাদের লব্ধির মান $\sqrt{F^2 cos^2\frac{\alpha}{2}+G^2 sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

[য: বো: ১৪; দি: বো: ১২]

10 MINUTE SCHOOL

টাইপ ভিত্তিক সমস্যা

টাইপ ০১ লব্ধি নির্ণয় সংক্রান্ত

টাইপ ০২ সাইন সূত্রের প্রয়োগ

টাইপ ০৩ লম্বাংশ ও বলজোট সংক্রান্ত

Problems

1. সমমানের দুইটি বল কোন কোন বিন্দুতে 2α কোণে ক্রিয়ারত থাকলে যে লব্ধি উৎপন্ন হয়, তা দ্বারা 2β কোণে ক্রিয়ারত থাকলে যে লব্ধি হয় তার দ্বিগুণ। প্রমাণ করো যে, $\cos\alpha = 2\cos\beta$. [ঢা: বো: ১৫; রা: বো: ১০, ০৫; কু: বো: ১২]

ধরি, 2β কোণে ক্রিয়ারত P মানের দুটি বলের লব্ধি R

১ম শর্ত মতে,

$R^2 = P^2 + P^2 + 2PPcos2\beta$

$\Rightarrow R^2 = 2P^2 + 2P^2cos2\beta$

$\Rightarrow R^2 = 2P^2(1 + cos2\beta)$

$\Rightarrow R^2 = 2P^2.2cos^2\beta$

$\Rightarrow R^2 = 4P^2cos^2\beta$

$\therefore R = 2Pcos\beta \ldots\ldots (i)$

২য় শর্ত মতে,

$(2R)^2 = P^2 + P^2 + 2PPcos2\alpha$

$\Rightarrow 4R^2 = 2P^2(1 + cos2\alpha)$

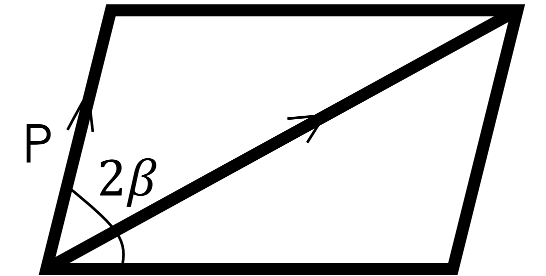
$\Rightarrow 4R^2 = 4P^2cos^2\alpha$

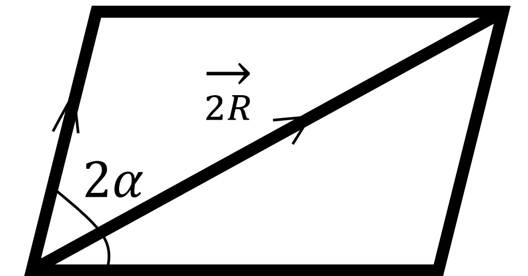
$\therefore R = Pcos\alpha \ldots\ldots (ii)$

$\therefore (i)$ ও (ii) হতে,

$Pcos\alpha = 2Pcos\beta$

$\Rightarrow cos\alpha = 2cos\beta$





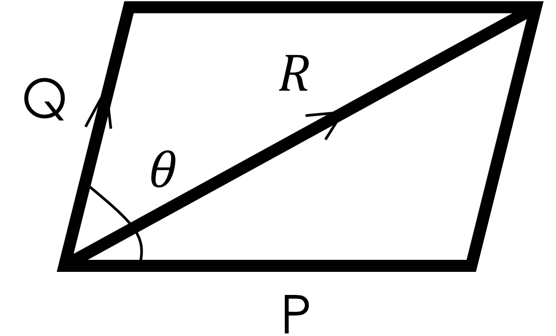
10 MINUTE SCHOOL

Problems

2. θ কোণে ক্রিয়ারত P, Q মানের বল দ্বয়ের লব্ধি $(2m+1)\sqrt{P^2+Q^2}$, উক্ত কোণ টি $(90^\circ-\theta)$ হলে লব্ধির মান $(2m-1)\sqrt{P^2+Q^2}$ হয়। প্রমাণ করে যে, $\tan\theta = \frac{m-1}{m+1}$. [ঢা: বো: ১২, ০৮; রা: বো: ০৬; দি: বো: ১৫; মাদ্রাসা বো: ১৫,১২]

১ম শর্ত মতে,

$$\left\{(2m+1)\sqrt{P^2+Q^2}\right\}^2 = P^2+Q^2+2PQcos\theta$$
$$\Rightarrow (2m+1)^2(\sqrt{P^2+Q^2})^2 = P^2+Q^2+2PQcos\theta$$
$$\Rightarrow (4m^2+4m+1)(P^2+Q^2) = P^2+Q^2+2PQcos\theta$$
$$\Rightarrow (4m^2+4m+1)(P^2+Q^2) - (P^2+Q^2) = 2PQcos\theta$$
$$\Rightarrow (P^2+Q^2)(4m^2+4m+1-1) = 2PQcos\theta$$
$$\therefore 2PQcos\theta = 4m(P^2+Q^2)(m+1) \ldots\ldots (i)$$



$R_1 = (2m+1)\sqrt{P^2+Q^2}$

10 MINUTE SCHOOL

Problems

2. θ কোণে ক্রিয়ারত P, Q মানের বল দ্বয়ের লব্ধি $(2m+1)\sqrt{P^2+Q^2}$, উক্ত কোণ টি $(90°-\theta)$ হলে লব্ধির মান $(2m-1)\sqrt{P^2+Q^2}$ হয়। প্রমাণ করে যে, $\tan\theta = \frac{m-1}{m+1}$. [ঢা: বো: ১২, ০৮; রা: বো: ০৬; দি: বো: ১৫; মাদ্রাসা বো: ১৫,১২]

২য় শর্ত মতে,

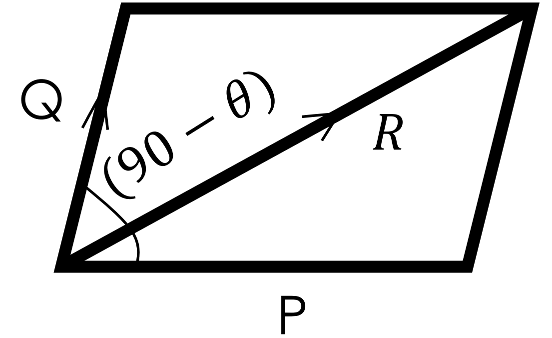
$$\left\{(2m-1)\sqrt{P^2+Q^2}\right\}^2 = P^2+Q^2+2PQcos(90-\theta)$$

$$\Rightarrow (4m^2-4m+1)(P^2+Q^2) = P^2+Q^2+2PQsin\theta$$

$$\Rightarrow (4m^2-4m+1)(P^2+Q^2)-(P^2+Q^2)= 2PQsin\theta$$

$$\Rightarrow (P^2+Q^2)(4m^2-4m+1-1) = 2PQsin\theta$$

$$\therefore 2PQsin\theta = 4m(P^2+Q^2)(m-1) \ldots\ldots (ii)$$



$(ii) \div (i) \rightarrow$

$$\frac{2PQsin\theta}{2PQcos\theta} = \frac{4m(P^2+Q^2)(m-1)}{4m(P^2+Q^2)(m+1)}$$

$$\Rightarrow tan\theta = \frac{(m-1)}{(m+1)}$$

$$R_2 = (2m-1)\sqrt{P^2+Q^2}$$

10 MINUTE SCHOOL

Problems

3. কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি বলের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম লব্ধির মান যথাক্রমে F এবং G. প্রমাণ করো যে, বলদ্বয়ের ক্রিয়ারেখার মধ্যবর্তী কোণের মান α হলে তাদের লব্ধির মান $\sqrt{F^2cos^2\frac{\alpha}{2}+G^2sin^2\frac{\alpha}{2}}$. [য: বো: ১৪; দি: বো: ১২]

ধরি, বল দুটি P ও Q,

$\therefore F = P + Q \ldots\ldots(i)$

$G = P - Q \ldots\ldots(ii)$

$\therefore (i)+(ii) \Rightarrow 2P = F + G$

$\Rightarrow P = \frac{F+G}{2} = \frac{1}{2}(F+G) \ldots\ldots(iii)$

$\therefore (i)-(ii) \Rightarrow Q = \frac{1}{2}(F-G) \ldots\ldots(iv)$

$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQcos\alpha$

→ P ও Q কে F ও G এর মাধ্যমে প্রকাশ কর?

10 MINUTE SCHOOL

Problems

3. কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি বলের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম লব্ধির মান যথাক্রমে F এবং G. প্রমাণ করো যে, বলদ্বয়ের ক্রিয়ারেখার মধ্যবর্তী কোণের মান α হলে তাদের লব্ধির মান $\sqrt{F^2cos^2\frac{\alpha}{2}+G^2sin^2\frac{\alpha}{2}}$. [য: বো: ১৪; দি: বো: ১২]

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQcos\alpha$$
$$= \left\{\frac{1}{2}(F+G)\right\}^2 + \left\{\frac{1}{2}(F-G)\right\}^2 + 2.\left\{\frac{1}{2}(F+G)\right\}\left\{\frac{1}{2}(F-G)\right\}cos\alpha$$
$$= \frac{1}{4}(F+G)^2 + \frac{1}{4}(F-G)^2 + 2.\frac{1}{4}.(F+G)(F-G)cos\alpha$$
$$= \frac{1}{4}(F+G)^2 + \frac{1}{4}(F-G)^2 + 2.\frac{1}{4}.(F^2-G^2)\,cos\alpha$$
$$= 2.\frac{1}{4}.(F^2+G^2) + 2.\frac{1}{4}.(F^2-G^2)\,cos\alpha$$
$$= \frac{1}{2}\{F^2+G^2+F^2cos\alpha - G^2cos\alpha\}$$

10 MINUTE SCHOOL

Problems

3. কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি বলের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম লব্ধির মান যথাক্রমে F এবং G. প্রমাণ করো যে, বলদ্বয়ের ক্রিয়ারেখার মধ্যবর্তী কোণের মান α হলে তাদের লব্ধির মান $\sqrt{F^2\cos^2\frac{\alpha}{2}+G^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. [য: বো: ১৪; দি: বো: ১২]

$$R^2=\frac{1}{2}\{F^2+F^2\cos\alpha+G^2-G^2\cos\alpha\}$$
$$=\frac{1}{2}\{F^2(1+\cos\alpha)+G^2(1-\cos\alpha)\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{2F^2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2G^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\times 2\left\{F^2\cos^2\frac{\alpha}{2}+G^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right\}$$
$$\therefore R=\sqrt{F^2\cos^2\frac{\alpha}{2}+G^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$1-\cos\alpha=\sin^2\frac{\alpha}{2}$$
$$1+\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

টাইপ ০২ সাইন সূত্রের প্রয়োগ

(কোণ কখন উৎপন্ন হয়)

Problems

1. P+Q ও P-Q বলদ্বয় α কোণে ক্রিয়ারত। তাদের লব্ধির তাদের অন্তর্গত কোণ এর সমাদ্বিখন্ডক এর সাথে $\frac{\theta}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ করো যে, $P:Q = \tan\frac{\alpha}{2} : \tan\frac{\theta}{2}$ [চ: বো: ০৪]

$\angle CAC' = \frac{\theta}{2}$

$\angle BAD = \alpha$

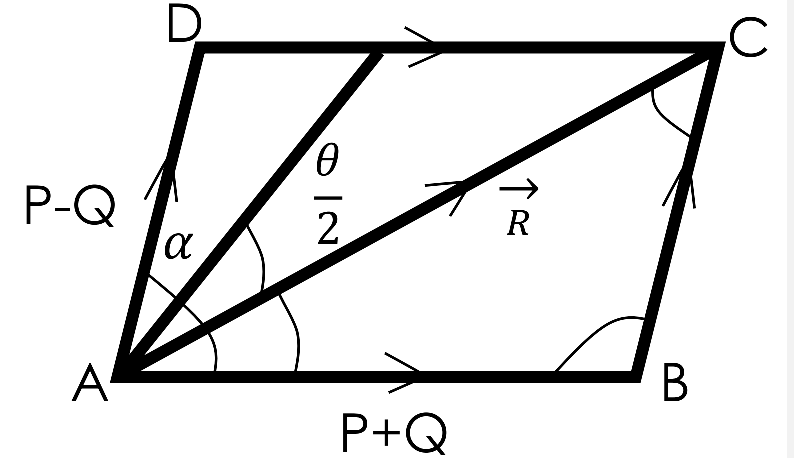
$\angle BAC' = \angle DAC' = \frac{\alpha}{2}$

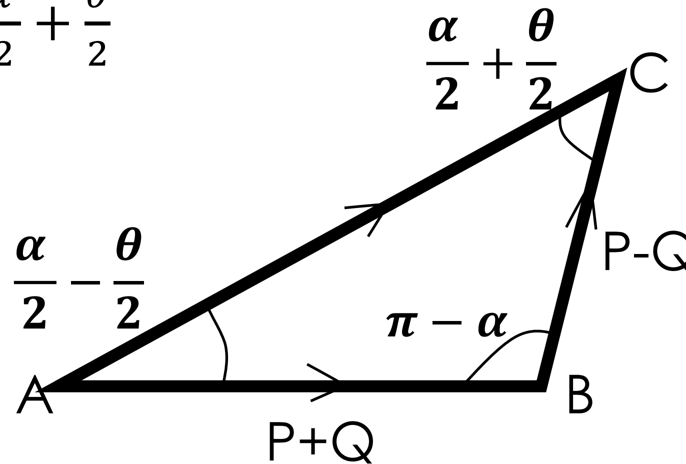
$\therefore \angle BAC = \angle BAC' - \angle CAC' = \frac{\alpha}{2} - \frac{\theta}{2}$

$\angle ACB = \angle CAD = \angle C'AD + \angle CAC' = \frac{\alpha}{2} + \frac{\theta}{2}$

$$\frac{P+Q}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{P-Q}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{P+Q}{P-Q} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}$$





(ii)ABC ত্রিভুজের কোণ নির্ণয়

$\angle ABC = \pi - \alpha$

$\angle BAC = ?$

$\angle ACB = ?$

10 MINUTE SCHOOL

Problems

1. P+Q ও P-Q বলদ্বয় α কোণে ক্রিয়ারত। তাদের লব্ধির তাদের অন্তর্গত কোণ এর সমাদ্বিখন্ডক এর সাথে $\frac{\theta}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ করো যে, $P:Q = \tan\frac{\alpha}{2}:\tan\frac{\theta}{2}$ [চ: বো: ০৪]

$$\Rightarrow \frac{P+Q+P-Q}{P+Q-P+Q} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\theta}{2}\right)-\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{2P}{2Q} = \frac{2sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\theta}{2}}{2cos\frac{\alpha}{2}sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{Q} = tan\frac{\alpha}{2}cot\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{tan\frac{\alpha}{2}}{tan\frac{\theta}{2}}$$

$$\therefore P:Q = tan\frac{\alpha}{2}:tan\frac{\theta}{2}$$

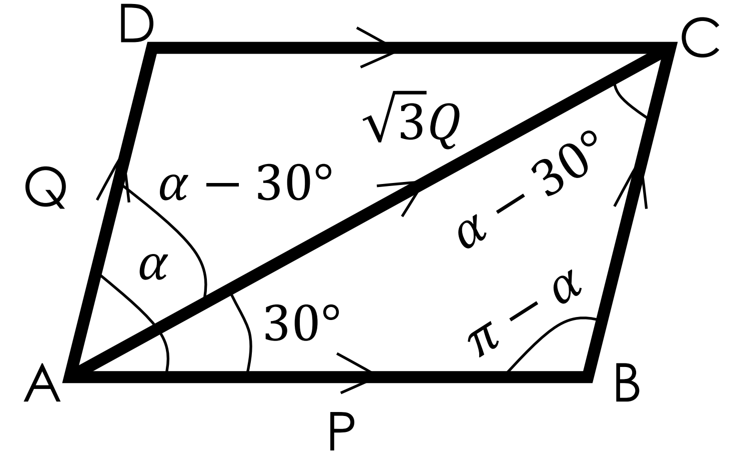
Problems

2. কোনো বিন্দুতে নির্দিষ্ট কোণে ক্রিয়ারত P ও Q মানের দুটি বলের লব্ধি $\sqrt{3}Q$ এবং তা P বলের দিকের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে । দেখাও যে, $P = Q$ অথবা $P = 2Q$. [সি: বো: ০৫; মাদ্রাসা বো: ১০]

ধরি, P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ α

$$\frac{P}{\sin(\alpha-30)} = \frac{Q}{\sin 30} = \frac{\sqrt{3}Q}{\sin(\pi-\alpha)}$$

$$\therefore \frac{P}{\sin(\alpha-30)} = \frac{Q}{\frac{1}{2}} \quad or, \frac{P}{\sin(\alpha-30)} = \frac{\sqrt{3}Q}{\sin\alpha}$$



$$\angle BAC = 30°$$
$$\angle DAC = \angle ACB = \alpha - 30°$$
$$\angle ABC = \pi - \alpha$$
$$R = \sqrt{3}Q$$

H.W

10 MINUTE SCHOOL

টাইপ ০৩ লম্বাংশ ও বলজোট সংক্রান্ত

লম্বাংশ

$$Rcos\theta = P_1cos\alpha_1 + P_2cos\alpha_2 + \cdots$$
$$Rsin\theta = P_1sin\alpha_1 + P_2sin\alpha_2 + \cdots$$

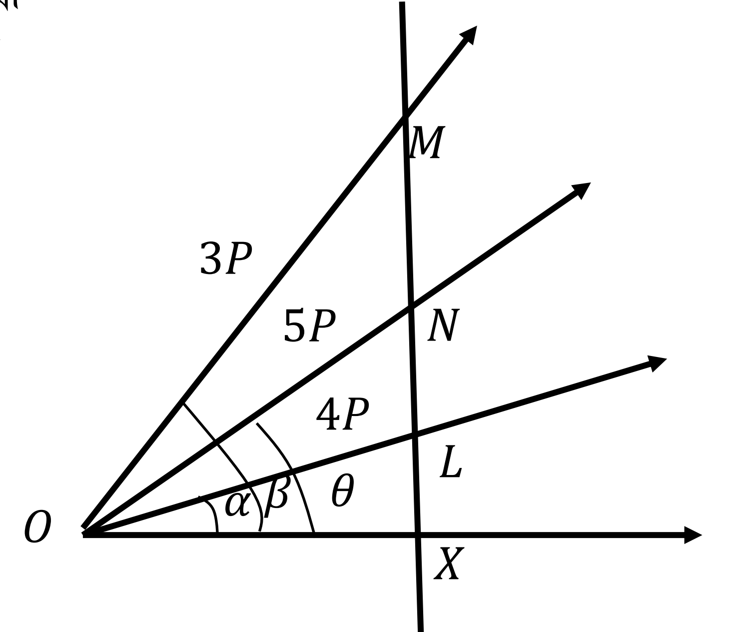
10 MINUTE SCHOOL

Problems

1. 4P এবং 3P বল দুইটি O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল এবং 5P তাদের লব্ধি। যদি কোনো ছেদক তাদের ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে L, M, N বিন্দুতে ছেদ করে, তবে দেখাও যে, $\frac{4}{OL} + \frac{3}{OM} = \frac{5}{ON}$. [রা: বো: ০৭; দি: বো:১৩; কু: বো: ১১; সি: বো: ১৪, ০৯; চ: বো: ১৩, ০৮]

ধরি, 4P ও 3P কোণদ্বয় OX রেখার সাথে যথাক্রমে α ও β কোণ উৎপন্ন করে। এদের লব্ধি 5P, OX এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। MX ছেদক রেখা, 3P,4P,5P এর ক্রিয়ারেখাকে M,N,L বিন্দুতে ছেদ করে ।

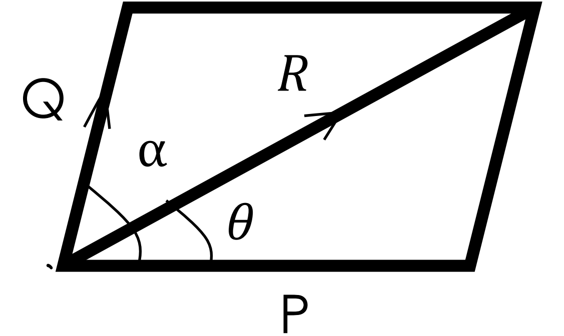
$$5P\cos\theta = 4P\cos\alpha + 3P\cos\beta$$
$$\Rightarrow 5\cos\angle NOX = 4\cos\angle LOX + 3\cos\angle NOX$$
$$\Rightarrow 5 \times \frac{OX}{ON} = 4 \times \frac{OX}{OL} + 3 \times \frac{OX}{OM}$$
$$\therefore \frac{5}{ON} = \frac{4}{OL} + \frac{3}{OM} \quad \text{(PROVED)}$$



Problems

2. কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q বলের লব্ধি R এবং P এর দিক বরাবর R এর লম্বাংশ Q হলে দেখাও যে, বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ $\cos^{-1}\frac{Q-P}{Q} = 2\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{P}{2Q}}\right)$ এবং $R = \sqrt{Q^2 - P^2 + 2PQ}$.

[রা: বো : ১৩; দি: বো: ১৬; য: বো: ১৩, ০৮; মাদ্রাসা বো: ১৩]



ধরি, P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ α এবং P ও R এর মধ্যবর্তী কোণ θ ।

১ম শর্তমতে,

P এর দিক বরাবর R এর লম্বাংশ

$R\cos\theta = Q \ldots (i)$

P এর দিক বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$R\cos\theta = P\cos(0°) + Q\cos(\alpha)$

$\Rightarrow Q = P + Q\cos\alpha$ [(i) নং হতে]

$\Rightarrow Q\cos\alpha = Q - P \ldots (ii)$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{Q-P}{Q}$

$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{Q-P}{Q}\right)$

10 MINUTE SCHOOL

Problems

2. কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q বলের লব্ধি R এবং P এর দিক বরাবর R এর লম্বাংশ Q হলে দেখাও যে, বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ $\cos^{-1}\frac{Q-P}{Q} = 2\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{P}{2Q}}\right)$ এবং $R = \sqrt{Q^2 - P^2 + 2PQ}$.

[রা: বো : ১৩; দি: বো: ১৬; য: বো: ১৩, ০৮; মাদ্রাসা বো: ১৩]

(ii) হতে পাই,

$\mathrm{Q} = \mathrm{P} + \mathrm{Q}\cos\alpha$

$\therefore P = Q - \mathrm{Q}\cos\alpha$

$\Rightarrow P = Q(1 - \cos\alpha)$

$\Rightarrow P = Q \times 2sin^2\, {}^{\alpha}/_{2}$

$\Rightarrow 2sin^2\, {}^{\alpha}/_{2} = \frac{P}{Q}$

$\Rightarrow sin^2\, {}^{\alpha}/_{2} = \frac{P}{2Q}$

$\Rightarrow sin\, {}^{\alpha}/_{2} = \sqrt{\frac{P}{2Q}}$

$\Rightarrow {}^{\alpha}/_{2} = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{P}{2Q}}\right)$

$\Rightarrow \alpha = 2\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{P}{2Q}}\right)$

$\therefore \cos^{-1}\left(\frac{Q-P}{Q}\right) = 2\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{P}{2Q}}\right)$(SHOWED)

10 MINUTE SCHOOL

Problems

2. কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q বলের লব্ধি R এবং P এর দিক বরাবর R এর লম্বাংশ Q হলে দেখাও যে, বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ $\cos^{-1}\frac{Q-P}{Q} = 2\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{P}{2Q}}\right)$ এবং $R = \sqrt{Q^2 - P^2 + 2PQ}$.

[রা: বো : ১৩; দি: বো: ১৬; য: বো: ১৩, ০৮; মাদ্রাসা বো: ১৩]

আবার, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQcos\alpha$

$= P^2 + Q^2 + 2P(Q - P)$ $[\because Qcos\alpha = (Q - P)]$

$= P^2 + Q^2 + 2PQ - 2P^2$

$= Q^2 - P^2 + 2PQ$

$\therefore R = \sqrt{Q^2 - P^2 + 2PQ}$

10 MINUTE SCHOOL

Problems

$(+)ve$ $(-)ve$

3. কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q মানের দুইটি বলের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোন কে এক-তৃতীয়াংশে বিভক্ত করে। দেখাও যে তাদের অন্তর্গত কোণের পরিমাণ $3\cos^{-1}\frac{P}{2Q}$ এবং লব্ধির মান $\frac{P^2-Q^2}{Q}$, $(P>Q)$ [ঢা: বো: ১৬, ১৩; রা: বো: ১৫, ০৮; দি: বো:১৪; কু: বো: ১০; সি: বো: ১৫; য: বো: ১২, ০৬; মাদ্রাসা বো: ১১]

P বরাবর→ 3α

বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

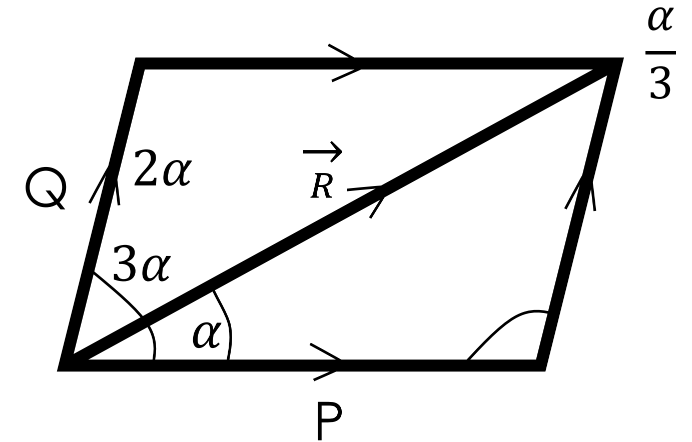
$$R\cos 0^\circ = P\cos(-\alpha) + Q\cos(2\alpha)$$

$$\Rightarrow R = P\cos\alpha + Q(2\cos^2\alpha - 1) \ldots (i)$$

আবার, $R\sin 0^\circ = P\sin(-\alpha) + Q\sin(2\alpha)$

$$\Rightarrow 0 = -P\sin\alpha + Q.2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\Rightarrow 0 = \sin\alpha(-P + 2Q\cos\alpha)$$



ধরি, লব্ধি R এবং P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ 3α

প্রশ্নমতে, P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ α

10 MINUTE SCHOOL

Problems

3. কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q মানের দুইটি বলের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোন কে এক-তৃতীয়াংশে বিভক্ত করে। দেখাও যে তাদের অন্তর্গত কোণের পরিমাণ $3\cos^{-1}\frac{P}{2Q}$ এবং লব্ধির মান $\frac{P^2-Q^2}{Q}, (P > Q)$ [ঢা: বো: ১৬, ১৩; রা: বো: ১৫, ০৮; দি: বো:১৪; কু: বো: ১০; সি: বো: ১৫; য: বো: ১২, ০৬; মাদ্রাসা বো: ১১]

$sin\alpha = 0\ or, P + 2Qcos\alpha = 0$

$\Rightarrow 2Qcos\alpha = P$

$\Rightarrow cos\alpha = \frac{P}{2Q}$

$\therefore \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{P}{2Q}\right)$

(i) নং হতে,

$R = P \times \frac{P}{2Q} + Q\left\{2\left(\frac{P}{2Q}\right)^2 - 1\right\}$

$= \frac{P^2}{2Q} + Q\left\{2.\frac{P^2}{4Q^2} - 1\right\}$

$= \frac{P^2}{2Q} + Q\left(\frac{P^2-2Q^2}{2Q^2}\right)$

$= \frac{P^2}{2Q} + \frac{P^2-2Q^2}{2Q}$

10 MINUTE SCHOOL

Problems

3. কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q মানের দুইটি বলের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোন কে এক-তৃতীয়াংশে বিভক্ত করে। দেখাও যে তাদের অন্তর্গত কোণের পরিমাণ $3\cos^{-1}\frac{P}{2Q}$ এবং লব্ধির মান $\frac{P^2-Q^2}{Q}, (P > Q)$ [ঢা: বো: ১৬, ১৩; রা: বো: ১৫, ০৮; দি: বো:১৪; কু: বো: ১০; সি: বো: ১৫; য: বো: ১২, ০৬; মাদ্রাসা বো: ১১]

$$= \frac{P^2+P^2-2Q^2}{2Q}$$

$$= \frac{2(P^2-Q^2)}{2Q}$$

$$R = \frac{(P^2-Q^2)}{Q}$$

H.W → P বরাবর লম্বাংশ

10 MINUTE SCHOOL

Problems

P ∝ cosA ⇒ P=K cosA

Q ∝ cosB ⇒ Q=K cos B

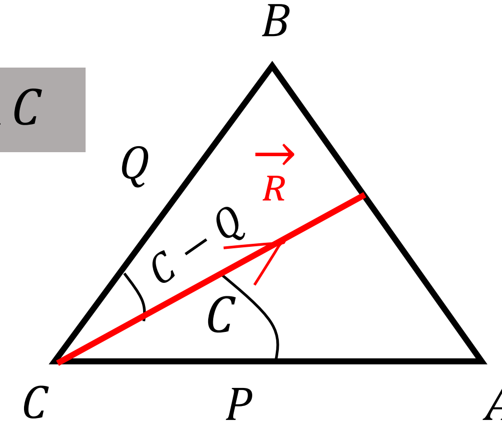
4. ABC ত্রিভুজের CA এবং CB বাহু বরাবর ক্রিয়ারত দুইটি বলের মান $cosA$ এবং $cosB$ এর সমানুপাতিক। প্রমাণ কর যে, এদের লব্ধির মান $sinC$ এর সমানুপাতিক এবং তার দিক C কোণ কে $\frac{1}{2}(C+B-A)$ এবং $\frac{1}{2}(C+A-B)$ অংশে বিভক্ত করে।[ঢা: বো: ০৬; ব: বো: ১০, ০৫; চ: বো: ১১]

(CA → P, CB → Q)

প্রশ্নমতে

প্রমাণ করতে হবে যে , $R = K\sin C$

$$P = K\cos A$$
$$Q = K\cos B$$



<C
R,P এর সাথে
Q কোণ C-Q
R,Q এর সাথে

CA বরাবর লম্বাংশ লিখে পাই ,

$$R\cos\theta = P\cos 0^0 + Q\cos C$$
$$\Rightarrow R\cos\theta = K\cos A.1 + K\cos B\cos C$$
$$= K\cos\{\pi-(B+C)\} + K\cos B\cos C$$

∴ ABC ত্রিভুজ

$$A+B+C=\pi$$
$$A=\pi-(B+C)$$

ধরি,

CA বরাবর বল= P

CB বরাবর বল=Q

লব্ধি P এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে ।

10 MINUTE SCHOOL

Problems

4. ABC ত্রিভুজের CA এবং CB বাহু বরাবর ক্রিয়ারত দুইটি বলের মান $cosA$ এবং $cosB$ এর সমানুপাতিক। প্রমাণ কর যে, এদের লব্ধির মান $sinC$ এর সমানুপাতিক এবং তার দিক C কোণ কে $\frac{1}{2}(C+B-A)$ এবং $\frac{1}{2}(C+A-B)$অংশে বিভক্ত করে।[ঢা: বো: ০৬; ব: বো: ১০, ০৫; চ: বো: ১১]

$\Rightarrow R\cos\theta = K\cos\{\pi - (B+C) + K\cos B\cos C$

$= -K\cos(B+C) + K\cos B\cos C$

$= -K(\cos B\cos C - \sin B\sin C) + K\cos B\cos C$

$= -K\cos B\cos C + K\sin B\sin C + K\cos B\cos C$

R cosθ = K sinB sinC ....(i)

আবার,

$R\sin\theta = P\sin 0^0 + Q\sin C$

$\Rightarrow R\sin\theta = 0 + K\cos B\sin C$

$\therefore$ R sin θ = K cos B sin C .... (ii)

$(ii) \div (i) \Rightarrow$

$\frac{R\sin\theta}{R\cos\theta} = \frac{K\cos B\sin C}{K\sin B\sin C}$

$\Rightarrow \tan\theta = \cot B$

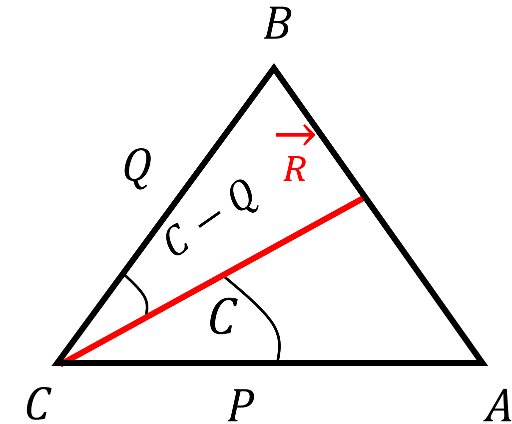
10 MINUTE SCHOOL

Problems

4. ABC ত্রিভুজের CA এবং CB বাহু বরাবর ক্রিয়ারত দুইটি বলের মান $cosA$ এবং $cosB$ এর সমানুপাতিক। প্রমাণ কর যে, এদের লব্ধির মান $sinC$ এর সমানুপাতিক এবং তার দিক C কোণ কে $\frac{1}{2}(C+B-A)$ এবং $\frac{1}{2}(C+A-B)$ অংশে বিভক্ত করে।[ঢা: বো: ০৬; ব: বো: ১০, ০৫; চ: বো: ১১]

$\pi/2 + B$

$$\tan\theta = \tan(\pi/2 - B)$$
$$\therefore \theta = \pi/2 - B \quad \ldots\ldots (iii)$$
(ii) এর সমীকরণে $\theta = \pi/2 - B$ বসিয়ে পাই ,
$$R\sin(\pi/2 - B) = K\cos B\sin C$$
$$\Rightarrow R\cos B = K\cos B\sin C$$
$$\Rightarrow R = K\sin C$$
$$\therefore R \propto \sin C$$



10 MINUTE SCHOOL

Problems

4. ABC ত্রিভুজের CA এবং CB বাহু বরাবর ক্রিয়ারত দুইটি বলের মান $cosA$ এবং $cosB$ এর সমানুপাতিক। প্রমাণ কর যে, এদের লব্ধির মান $sinC$ এর সমানুপাতিক এবং তার দিক C কোণ কে $\frac{1}{2}(C+B-A)$ এবং $\frac{1}{2}(C+A-B)$অংশে বিভক্ত করে।[ঢা: বো: ০৬; ব: বো: ১০, ০৫; চ: বো: ১১]

$\pi/2 + B$

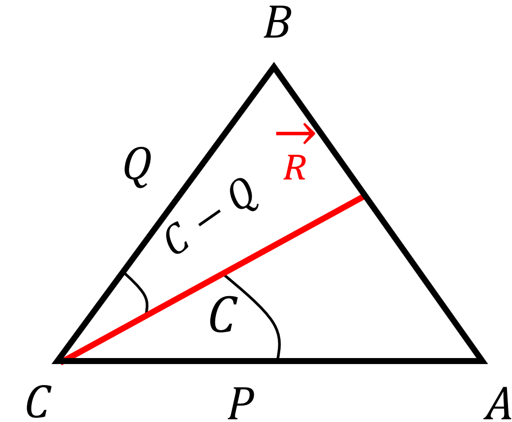
$\frac{A+B+C}{2} = \frac{\pi}{2}$

(iii) হতে ,

$$\theta = \pi/_2 - B$$
$$= \frac{A+B+C}{2} - B$$
$$= \frac{A+B+C-2B}{2}$$
$$= \frac{C+A-B}{2}$$
$$\theta = \frac{1}{2}(C+A-B)$$

∴ অপর রাশি, = C-Q

$$= C - \frac{C+A-B}{2}$$
$$= \frac{2C-C-A+B}{2}$$
$$= \frac{C+B-A}{2}$$
$$= \frac{1}{2}(C+B-A)$$



10 MINUTE SCHOOL

$R = 0$

$0 \rightarrow R\cos\theta = X = P_1 cos\theta_1 + P_2 cos\theta_2$ ....

$\leftarrow R\sin\theta = Y = P_1 sin\theta_1 + P_2 sin\theta_2$ ....

$x^2 + y^2 = (R\cos\theta)^2 + (R\sin\theta)^2$

$= R^2 cos^2\theta + R^2 sin^2\theta$

$= R^2(cos^2\theta + sin^2\theta)$

$= R^2$

$R^2 = x^2 + y^2$

$x^2 + y^2 = 0$

$x = y = 0$

$X = 0$

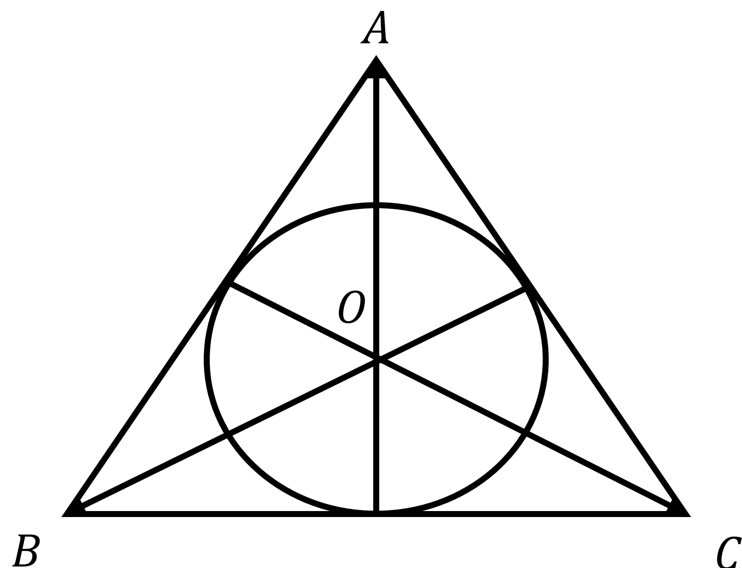
$Y = 0$

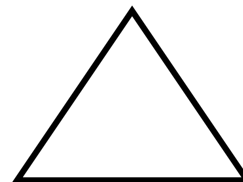
কখন = ?

10 MINUTE SCHOOL

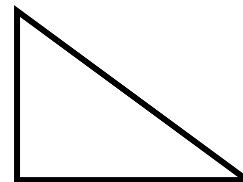
10 yr

অন্তঃকেন্দ্র (Incentre): ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোণত্রয়ের সমদ্বিখণ্ডকত্রয়ের ছেদবিন্দুকে ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র বলা হয়।
অন্তঃকেন্দ্র হলো ত্রিভুজে অন্তর্লিখিত বৃত্তের কেন্দ্র।

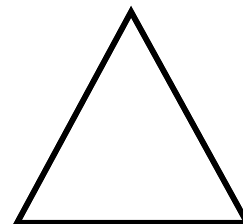




সমবাহু



সমকোণী



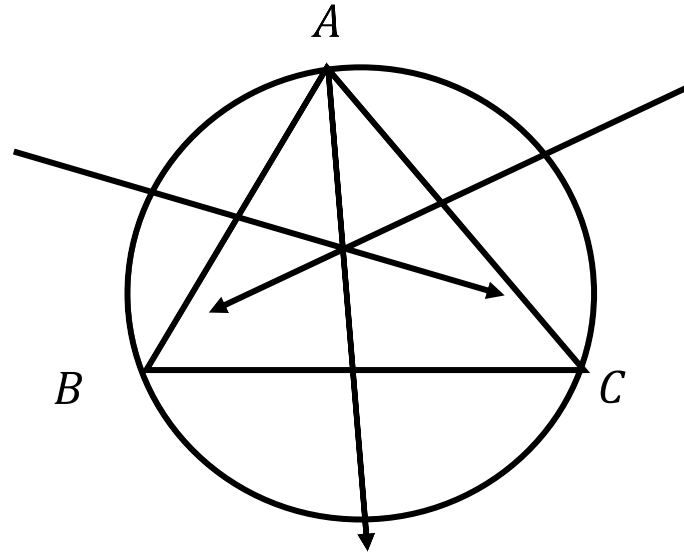
সমদ্বিবাহু

2%

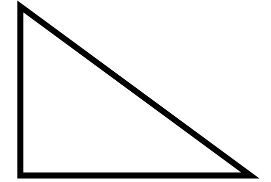
বিষম

10 MINUTE SCHOOL

পরিকেন্দ্র (Circumcentre): ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের লম্ব সমদ্বিখণ্ডকত্রয়ের ছেদবিন্দুকে ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র বলা হয়। পরিকেন্দ্র হলো ত্রিভুজের পরিলিখিত বৃত্তের কেন্দ্র।

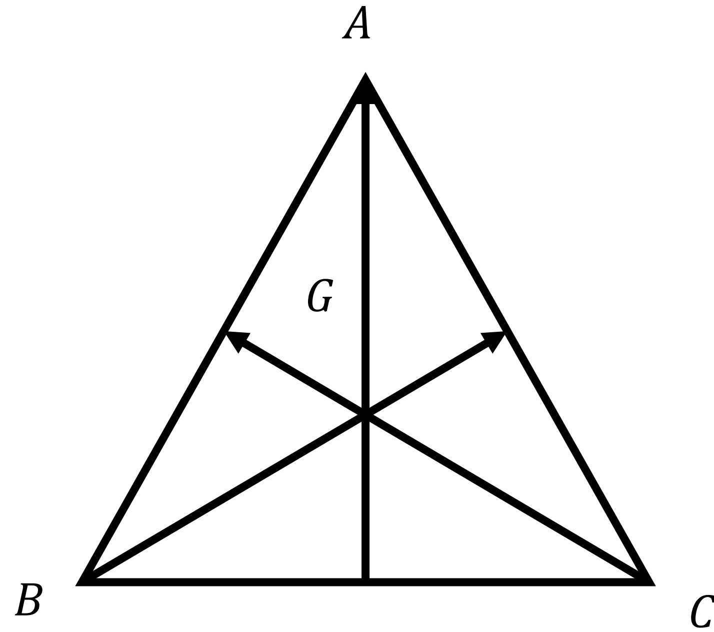


সমকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র কোথায় ?

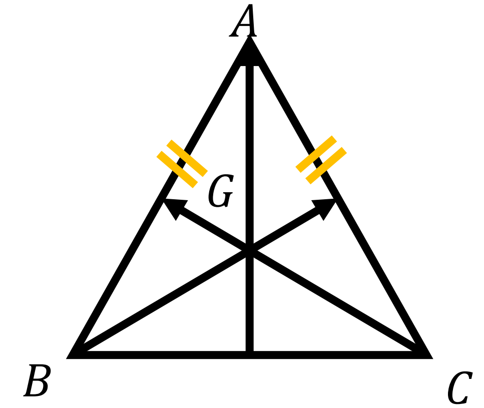


10 MINUTE SCHOOL

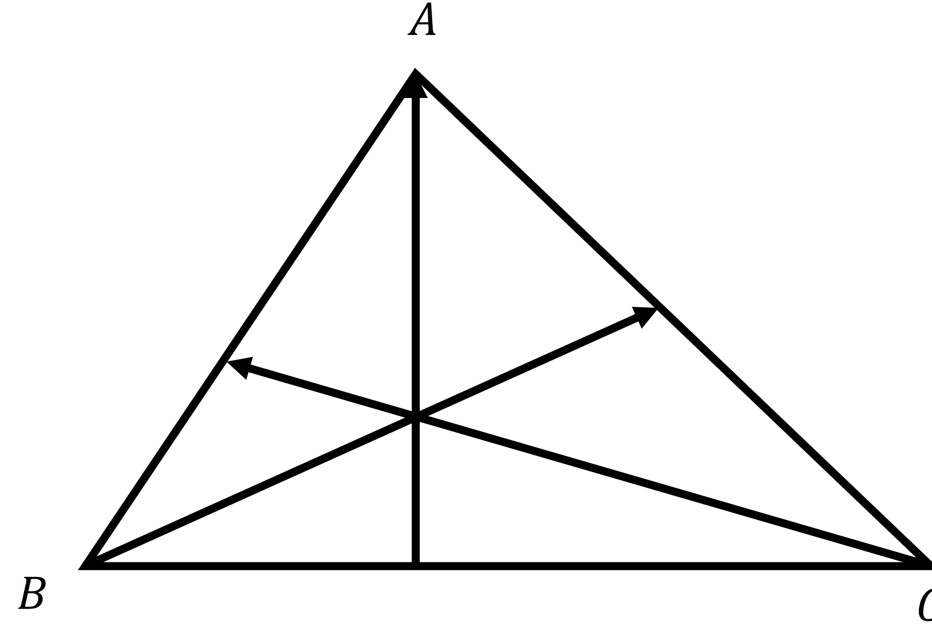
ভরকেন্দ্র (Centroid): কোনো ত্রিভুজের মধ্যমায়ের ছেদবিন্দুকে ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র বলা হয়। ভরকেন্দ্র প্রতিটি মধ্যমাকেই 2:1 অনুপাতে বিভক্ত করে।



ভরকেন্দ্র ও লম্বকেন্দ্র কখন এক হয়



লম্বকেন্দ্র (Orthocentre): কোনো ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় হতে বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত লম্বত্রয়ের ছেদবিন্দুই হলো লম্বকেন্দ্র।



লামী

টাইপ ০৪ সাম্যাবস্থায় কেন্দ্র সংক্রান্ত



টাইপ ০৫ সাম্যাবস্থা ও টান



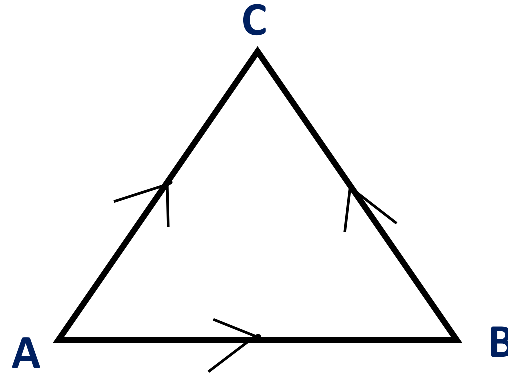
টাইপ ০৬ সাম্যাবস্থা ও অন্যান্য

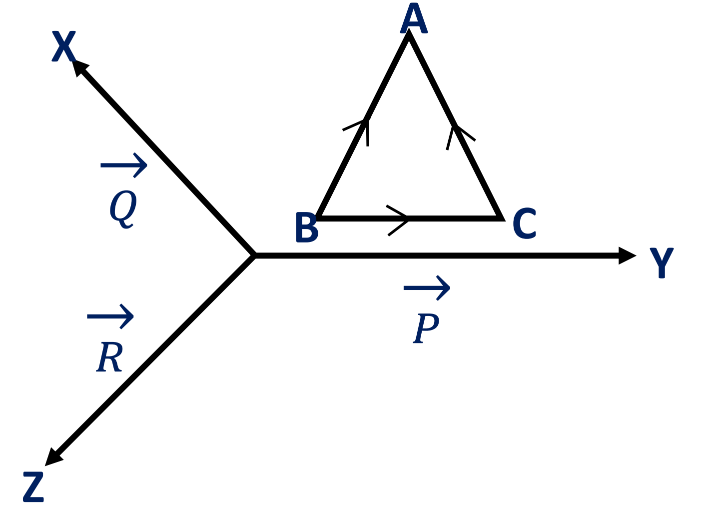


10 MINUTE SCHOOL

বলের সাম্যাবস্থার ত্রিভুজ সূত্রঃ

যদি একটি বিন্দুতে কার্যরত তিনটি বলের মান ও দিক (অবস্থানে নয়) কোনো ত্রিভুজের একই নিয়মে গৃহীত তিনটি বাহুদ্বারা নির্দেশ করা যায়, তবে তারা সাম্যাবস্থায় থাকবে ।





$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$
$$\Rightarrow \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$$

বলের সাম্যাবস্থার ত্রিভুজ সূত্রের বিপরীত সূত্রঃ

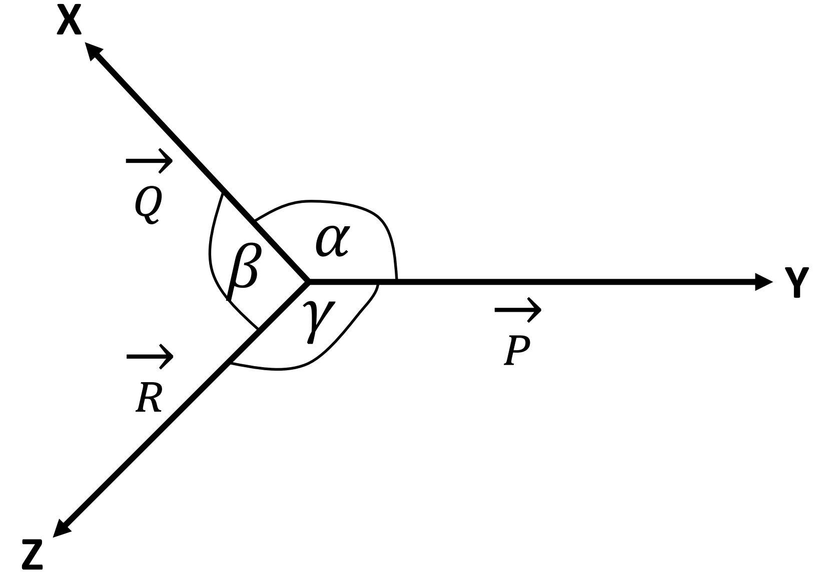
একটি বিন্দুতে কার্যরত তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকলে এদেরকে কোনো ত্রিভুজের একইক্রমে গৃহীত তিনটি বাহু দ্বারা মানে ও দিকে সূচিত করা যায়।

বলের সাম্যাবস্থার ত্রিভুজ সূত্রঃ

কোনো বিন্দুতে ভিন্ন ভিন্ন রেখায় ক্রিয়ারত তিনটি সমতলীয় বল সাম্যাবস্থায় থাকলে এদের প্রতিটির মান অপর দুটির অন্তর্ভুক্ত কোণের সাইনের সমানুপাতিক।

$$\frac{P}{\sin \theta^\wedge R} = \frac{Q}{sinR^\wedge P} = \frac{R}{sinP^\wedge Q}$$

কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি একতলীয় বলের প্রত্যেকটির মান অপর দুটির অন্তর্গত কোণের সাইনের সমানুপাতিক হলে এবং কোনোটিই অপর দুইটির লব্ধির সমান না হলে, ... সৃষ্টি করে।



HOME WORK

1. P, Q, R বল তিনটি কোনো ত্রিভুজের A, B, C শীর্ষবিন্দু হতে যথাক্রমে তাদের বিপরীত বাহুর লম্বাভিমুখী দিকে ক্রিয়ারত থেকে ভারসাম্য সৃষ্টি করেছে। প্রমাণ কর যে, $P:Q:R = a:b:c$ । [ঢা: বো: ১১; ব:বো: ১২, ০৭; সি: বো: ১১; মাদ্রাসা বো: ১৩]

2. ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র I তে IA, IB, IC বরাবর যথাক্রমে P, Q, R বল তিনটি ক্রিয়ারত থেকে ভারসাম্য সৃষ্টি করছে। প্রমাণ কর যে, $P:Q:R = \cos\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}$. [ঢা: বো: ১৪; য: বো: ১৬; চ: বো: ০৫]

10 MINUTE SCHOOL

টাইপ ০৪ : সাম্যাবস্থায় কেন্দ্র সংক্রান্ত

টাইপ ০৫ : সাম্যাবস্থা ও টান

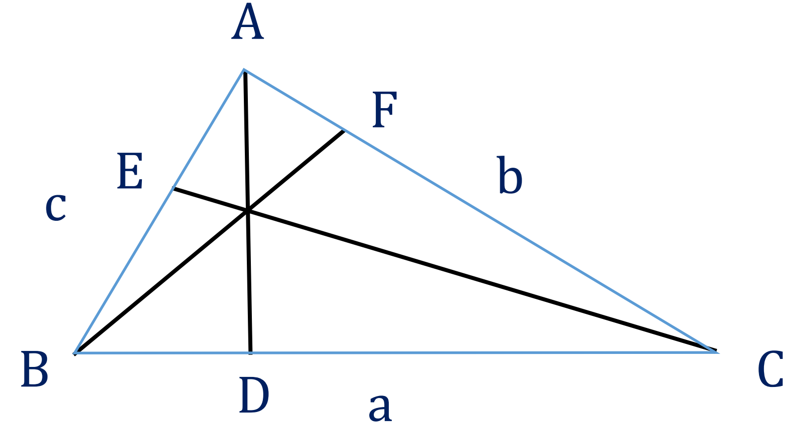
টাইপ ০৬ : সাম্যাবস্থা ও অন্যান্য

Problems

1. P, Q, R বল তিনটি কোনো ত্রিভুজের A, B, C শীর্ষবিন্দু হতে যথাক্রমে তাদের বিপরীত বাহুর লম্বাভিমুখী দিকে ক্রিয়ারত থেকে ভারসাম্য সৃষ্টি করেছে। প্রমাণ কর যে, $P: Q: R = a: b: c$ । [ঢা: বো: ১১; ব:বো: ১২, ০৭; সি: বো: ১১; মাদ্রাসা বো: ১৩]

লামীর উপপাদ্য অনুযায়ী,

$$\frac{P}{sinEOF} = \frac{Q}{sinEOD} = \frac{R}{sinFOD} \ldots (i)$$



$\therefore$ $AEOF$ একটি চতুর্ভুজ।

$\angle AEO = \angle AFO = \frac{\pi}{2}$ $\therefore \angle AEO + \angle AFO = \pi$

$\angle EAF + \angle EOF = \pi$

$\therefore \angle EOF = \pi - \angle EAF = \pi - A$

একইভাবে, $\angle EOD = \pi - B$

এবং, $\angle FOD = \pi - C$

10 MINUTE SCHOOL

Problems

স্থিতিবিদ্যা= স্থিতিবিদ্যা + ভেক্টর + ত্রিকোণমিতি

1. P, Q, R বল তিনটি কোনো ত্রিভুজের A, B, C শীর্ষবিন্দু হতে যথাক্রমে তাদের বিপরীত বাহুর লম্বাভিমুখী দিকে ক্রিয়ারত থেকে ভারসাম্য সৃষ্টি করেছে। প্রমাণ কর যে, $P:Q:R = a:b:c$ । [ঢা: বো: ১১; ব:বো: ১২, ০৭; সি: বো: ১১; মাদ্রাসা বো: ১৩]

(i) হতে,

$$\frac{P}{\sin(\pi - A)} = \frac{Q}{\sin(\pi - B)} = \frac{R}{\sin(\pi - C)}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin A} = \frac{Q}{\sin B} = \frac{R}{\sin C} \dots (ii)$$

ত্রিভুজের ত্রিকোণমিতিক গুণাবলী –

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \dots (iii)$$

$(ii) \div (iii) \Rightarrow$

$$\frac{\frac{P}{\sin A}}{\frac{a}{\sin A}} = \frac{\frac{Q}{\sin B}}{\frac{b}{\sin B}} = \frac{\frac{R}{\sin C}}{\frac{c}{\sin C}}$$

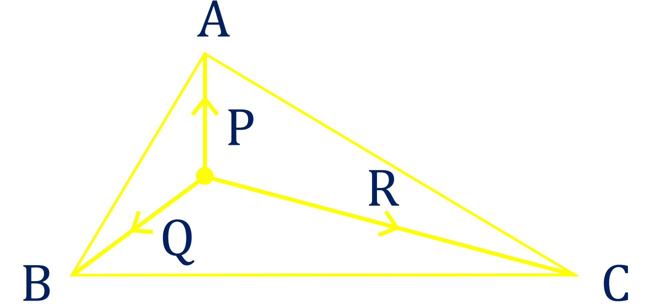
$$\Rightarrow \frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c}$$

$$\therefore P:Q:R = a:b:c$$

10 MINUTE SCHOOL

Problems

2. ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র I তে IA, IB, IC বরাবর যথাক্রমে P, Q, R বল তিনটি ক্রিয়ারত থেকে ভারসাম্য সৃষ্টি করছে। প্রমাণ কর যে, $P:Q:R = \cos\frac{A}{2}:\cos\frac{B}{2}:\cos\frac{C}{2}$. [ঢা: বো: ১৪; য: বো: ১৬; চ: বো: ০৫]



লামীর উপপাদ্য অনুযায়ী,

$$\frac{P}{sinBIC} = \frac{Q}{sinAIC} = \frac{R}{sinAIE} \dots (i)$$

$$\angle BAI = \angle IAC = \frac{A}{2}$$

$$\angle IBC = \angle IBA = \frac{B}{2}$$

$$\angle ICA = \angle ICB = \frac{C}{2}$$

ΔAIB এ,

$$\angle IAB + \angle AIB + \angle IBA = \pi$$

$$A + B + C = \pi$$

$$\Rightarrow A + B = \pi - C$$

$$\Rightarrow \frac{A+B}{2} = \frac{\pi - C}{2}$$

10 MINUTE SCHOOL

Problems

2. ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র I তে IA, IB, IC বরাবর যথাক্রমে P, Q, R বল তিনটি ক্রিয়ারত থেকে ভারসাম্য সৃষ্টি করছে। প্রমাণ কর যে, $P:Q:R = cos\frac{A}{2} : cos\frac{B}{2} : cos\frac{C}{2}$. [ঢা: বো: ১৪; য: বো: ১৬; চ: বো: ০৫]

(i) হতে,

$$\frac{P}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}\right)} = \frac{Q}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{B}{2}\right)} = \frac{R}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{C}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{Q}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{R}{\cos\frac{C}{2}}$$

$$\therefore P:Q:R = \cos\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}$$

10 MINUTE SCHOOL

Type-5: সাম্যাবস্থা ও টান

1. l দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি সুতার একপ্রান্ত কোনো খাড়া দেয়ালে আটকানো আছে এবং তার অপর প্রান্ত a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি সুষম গোলকের উপরস্থ কোনো বিন্দুতে সংযুক্ত আছে। গোলক টির ওজন W হলে দেখাও যে, সুতার টান $\frac{W(a+l)}{\sqrt{2al+l^2}}$.

[বুয়েট ০৪-০৫; কু: বো: ১৫; দি: বো: ০৯; য: বো: ১৩; ব: বো: ০৬]

লামীর উপপাদ্য অনুযায়ী,

$$\frac{T}{sinR\hat{}W} = \frac{W}{sinT\hat{}R} = \frac{R}{sinT\hat{}W}$$

$$\Rightarrow \frac{T}{sin90°} = \frac{W}{sinAOD}$$

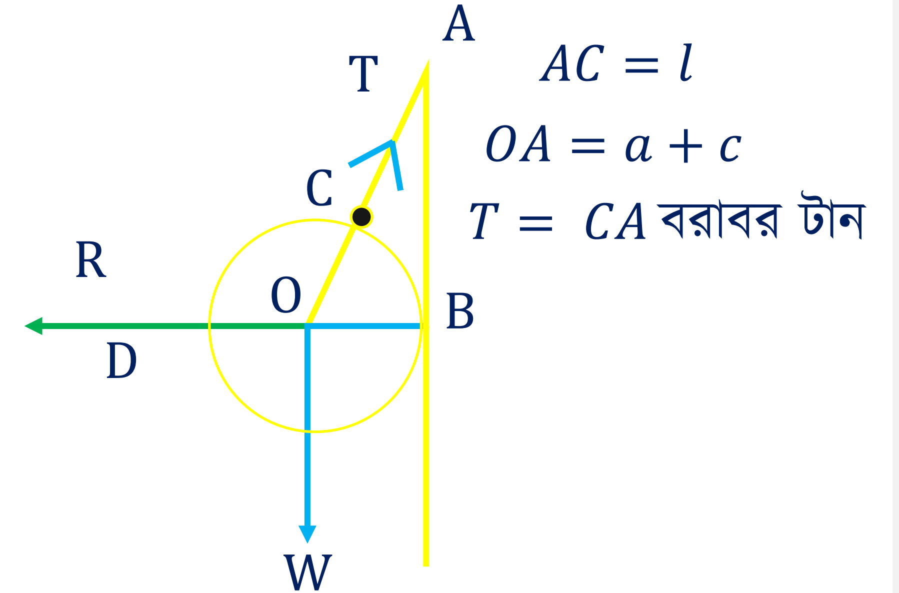
$$\Rightarrow T = \frac{W}{\sin(\pi - AOB)}$$

$$= \frac{W}{\sin AOB}$$

$$= \frac{W}{\frac{AB}{OA}}$$

$$= \frac{W.OA}{AB}$$

$$T = \frac{W(a+l)}{\sqrt{2al+l^2}}$$ **(SHOWED)**



10 MINUTE SCHOOL

Problems

2. ACB সুতাটির দুই প্রান্ত একই অনুভূমিক রেখাস্থ A ও B বিন্দুতে আবদ্ধ আছে। সুতাটির C বিন্দুতে W ওজনের একটি বস্তুকে গিঁট দিয়ে বাঁধা হয়েছে। ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য a, b, c এবং তার ক্ষেত্রফল Δ হলে, দেখাও যে, সুতাটির CA অংশের টান $\frac{Wb}{4c\Delta}(c^2 + a^2 - b^2)$

[ঢা: বো: ০৭; চ: বো: ০৭]

লামীর উপপাদ্য অনুযায়ী,

$$\frac{T_1}{\sin T_1\hat{}W} = \frac{T_2}{\sin T_2\hat{}W} = \frac{W}{\sin\ T_1\hat{}T_2}$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{\sin(\pi - BCD)} = \frac{W}{\sin C}$$

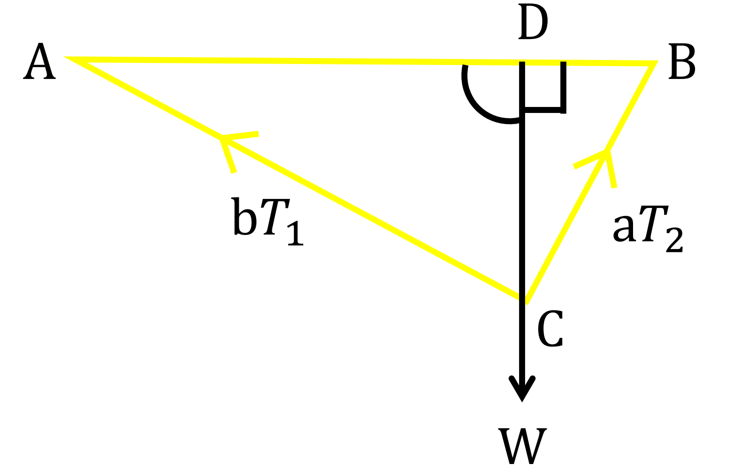
$$\Rightarrow \frac{T_1}{\sin BCD} = \frac{W}{\sin C}$$

$$\therefore \frac{T_1}{\sin(90° - \angle B\ )} = \frac{W}{\sin C}$$

ΔBCD একটি সমকোণী ত্রিভুজ ,$\angle D = 90°$

$\therefore \angle BCD + \angle DBC = 90°$

$\therefore \angle BCD = 90° - \angle B$



10 MINUTE SCHOOL

Problems

2. ACB সুতাটির দুই প্রান্ত একই অনুভূমিক রেখাস্থ A ও B বিন্দুতে আবদ্ধ আছে। সুতাটির C বিন্দুতে W ওজনের একটি বস্তুকে গিঁট দিয়ে বাঁধা হয়েছে। ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য a, b, c এবং তার ক্ষেত্রফল Δ হলে, দেখাও যে, সুতাটির CA অংশের টান $\frac{Wb}{4c\Delta}(c^2 + a^2 - b^2)$

[ঢা: বো: ০৭; চ: বো: ০৭]

$$\therefore \frac{T_1}{\cos B} = \frac{W}{\sin C}$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{W \cos B}{\sin C}$$

$$= \frac{W \times \frac{a^2+c^2-b^2}{2ca}}{\frac{2\Delta}{ab}}$$

$$= W \times \frac{a^2+c^2-b^2}{2ca} \times \frac{ab}{2\Delta}$$

$$= \frac{Wb}{4c\Delta}(c^2 + a^2 - b^2)$$

Cosine.

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ca}$$

$$\Delta = \frac{1}{2} ab\sin C$$

$$\therefore \sin C = \frac{ab}{2\Delta}$$

10 MINUTE SCHOOL

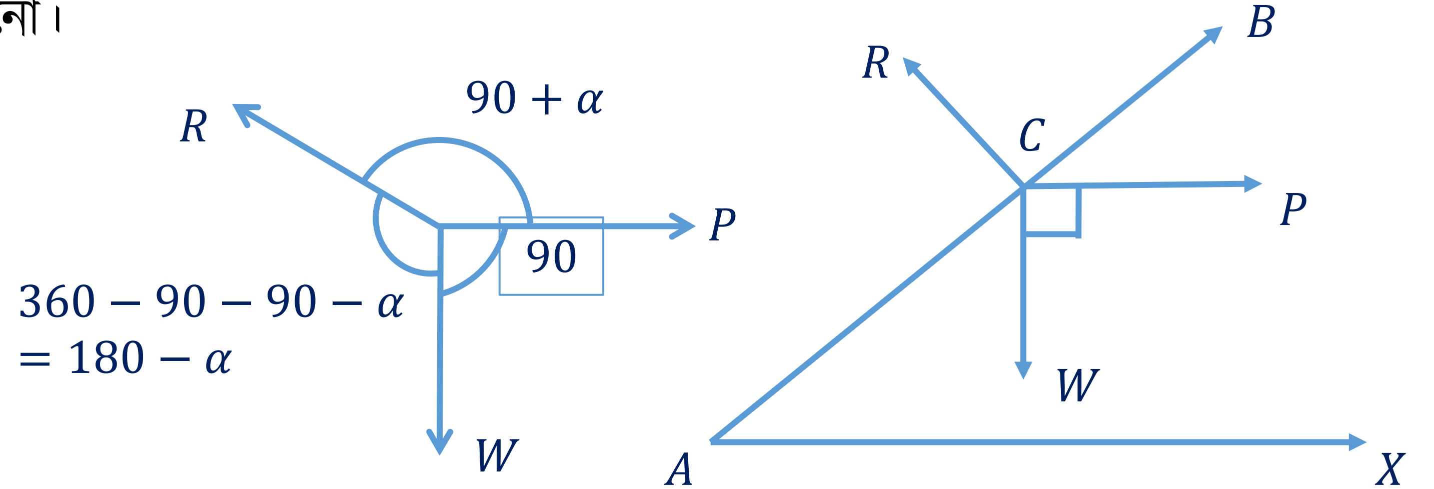
Problems

1. একটি হেলানো সমতলের ভূমি ও দৈর্ঘ্যের সমান্তরালে যথাক্রমে ক্রিয়াশীল দুইটি পৃথক বল P ও Q এর প্রত্যেক একাকী W ওজনের কোনো বস্তু কে সমতলের উপর স্থিরভাবে ধরে রাখতে পারে। প্রমাণ কর যে, $W = \frac{PQ}{\sqrt{P^2-Q^2}}$. [রাজশাহী, কুমিল্লা, চট্টগ্রাম ও বরিশাল বোর্ড -২০১৮ এর সৃজনশীল -৬(খ); ব: বো: ১৫; চ: বো: ০৯]

ধরি, AX ভূমির সাথে AB তলটি α কোণে হেলানো।
লামীর উপপাদ্য অনুসারে ,

$$\frac{P}{\sin R\hat{}W} = \frac{W}{\sin P\hat{}R} = \frac{R}{\sin P\hat{}W}$$

$$\frac{P}{\sin(180-\alpha)} = \frac{W}{\sin(90+\alpha)}$$



10 MINUTE SCHOOL

Problems

1. একটি হেলানো সমতলের ভূমি ও দৈর্ঘ্যের সমান্তরালে যথাক্রমে ক্রিয়াশীল দুইটি পৃথক বল P ও Q এর প্রত্যেক একাকী W ওজনের কোনো বস্তু কে সমতলের উপর স্থিরভাবে ধরে রাখতে পারে। প্রমাণ কর যে, $W = \frac{PQ}{\sqrt{P^2-Q^2}}$. [রাজশাহী, কুমিল্লা, চট্টগ্রাম ও বরিশাল বোর্ড -২০১৮ এর সৃজনশীল -৬(খ); ব: বো: ১৫; চ: বো: ০৯]

$$\frac{P}{\sin(180-\alpha)} = \frac{W}{\sin(90+\alpha)}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin\alpha} = \frac{W}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{W}{P}$$

$$\Rightarrow \cot\alpha = \frac{W}{P} \ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

$$360 - 180 - \alpha = 180 - \alpha$$

$$\frac{Q}{\sin(180-\alpha)} = \frac{W}{\sin 90^\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{W}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{W}{Q}$$

$$\therefore \frac{W}{Q} = \operatorname{cosec}\alpha \ldots\ldots\ldots (ii)$$

10 MINUTE SCHOOL

Problems

1. একটি হেলানো সমতলের ভূমি ও দৈর্ঘ্যের সমান্তরালে যথাক্রমে ক্রিয়াশীল দুইটি পৃথক বল P ও Q এর প্রত্যেক একাকী W ওজনের কোনো বস্তু কে সমতলের উপর স্থিরভাবে ধরে রাখতে পারে। প্রমাণ কর যে, $W = \frac{PQ}{\sqrt{P^2-Q^2}}$. [রাজশাহী, কুমিল্লা, চট্টগ্রাম ও বরিশাল বোর্ড -২০১৮ এর সৃজনশীল -৬(খ); ব: বো: ১৫; চ: বো: ০৯]

আমরা জানি,

$$cosec^2\alpha - cot^2\alpha = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{W}{Q}\right)^2 - \left(\frac{W}{P}\right)^2 = 1$$

$$\frac{W^2}{Q^2} - \frac{W^2}{P^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{W^2P^2 - WQ^2}{P^2Q^2} = 1$$

$$\Rightarrow W^2(P^2 - Q^2) = P^2Q^2$$

$$\Rightarrow W^2 = \frac{P^2Q^2}{P^2-Q^2}$$

$$\Rightarrow W = \sqrt{\frac{P^2Q^2}{P^2-Q^2}}$$

$$\therefore W = \frac{PQ}{\sqrt{P^2-Q^2}}$$

[PROVED]

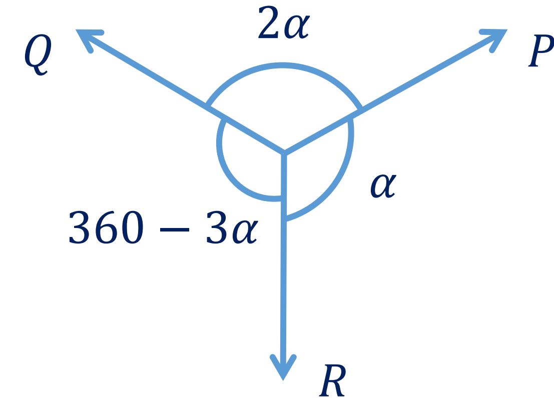
Problems

2. কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P, Q, R বল তিনটি ভারসাম্য সৃষ্টি করেছে। P ও Q এর অন্তর্গত কোণ P ও R এর অন্তর্গত কোণের দ্বিগুণ হলে, প্রমাণ কর যে, $R^2 = Q(Q - P)$.
[বুয়েট ০৭-০৮; ঢা: বো: ০৫; রা: বো: ১৬, ১২; দি: বো: ১১; সি: বো: ১৬, ১২; য: বো: ০৯, ০৭; ব: বো: ০৯]

$$\frac{P}{sin(360-3\alpha)} = \frac{Q}{sin\alpha} = \frac{R}{sin2\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{-sin3\alpha} = \frac{Q}{Sin\alpha} = \frac{R}{Sin2\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{-(3sin-4Sin^3\alpha} = \frac{Q}{sin\alpha} = \frac{R}{sin2\alpha}$$



ধরি, P ও R এর মধ্যবর্তী কোণ α
$\therefore P$ ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ 2α

10 MINUTE SCHOOL

Problems

2. কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P, Q, R বল তিনটি ভারসাম্য সৃষ্টি করেছে। P ও Q এর অন্তর্গত কোণ P ও R এর অন্তর্গত কোণের দ্বিগুণ হলে, প্রমাণ কর যে, $R^2 = Q(Q - P)$.

[বুয়েট ০৭-০৮; ঢা: বো: ০৫; রা: বো: ১৬, ১২; দি: বো: ১১; সি: বো: ১৬, ১২; য: বো: ০৯, ০৭; ব: বো: ০৯]

$$\Rightarrow \frac{P}{4sin^3\alpha-3Sin\alpha} = \frac{Q}{sin\alpha} = \frac{R}{2sin\alpha cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{4sin\alpha-3} = \frac{Q}{1} = \frac{R}{2cos\alpha}$$

$$\therefore \frac{P}{4(1-cos^2)-3} = \frac{Q}{1}$$

$$Q = \frac{R}{2cos\alpha}$$

$$R = 2Qcos\alpha$$

10 MINUTE SCHOOL

Problems

2. কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P, Q, R বল তিনটি ভারসাম্য সৃষ্টি করেছে। P ও Q এর অন্তর্গত কোণ P ও R এর অন্তর্গত কোণের দ্বিগুণ হলে, প্রমাণ কর যে, $R^2 = Q(Q-P)$.

[বুয়েট ০৭-০৮; ঢা: বো: ০৫; রা: বো: ১৬, ১২; দি: বো: ১১; সি: বো: ১৬, ১২; য: বো: ০৯, ০৭; ব: বো: ০৯]

$\frac{P}{4-4cos^2\alpha-3} = \frac{Q}{1}$

$\Rightarrow \frac{Q-P}{1-1+4cos^2\alpha} = Q$

$\Rightarrow \frac{Q-P}{4\,cos^2\alpha} = Q$

$\Rightarrow \frac{Q-P}{4\left(\frac{R}{2Q}\right)^2} = Q$

$[R = 2Qcos\alpha$

$\therefore cos\alpha = \frac{R}{2Q}]$

$\Rightarrow \frac{Q-P}{4\times\frac{R^2}{4Q^2}} = Q$

$\Rightarrow \frac{Q^2(Q-P)}{R^2} = Q$

$\Rightarrow \frac{Q(Q-P)}{R^2} = 1$

$\therefore R^2 = Q(Q-P)$

10 MINUTE SCHOOL

Problems

$$\frac{AB}{SinC} = \frac{BC}{SinA} = 2R$$

3. ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AB, AD বরাবর যথাক্রমে X ও Y বলদ্বয় ক্রিয়ারত আছে। C হতে A এর দিকে CA বরাবর ক্রিয়ারত Z বলটির দ্বারা তাদের সমতা রক্ষা করা হলে, দেখাও যে, $\frac{X}{CD} = \frac{Y}{CB} = \frac{Z}{BD}$.[য: বো: ০৫]

$$(1) \Rightarrow \frac{X}{Sin\ DAE} = \frac{Y}{Sin\ BAE} = \frac{Z}{Sin\ BAD}$$

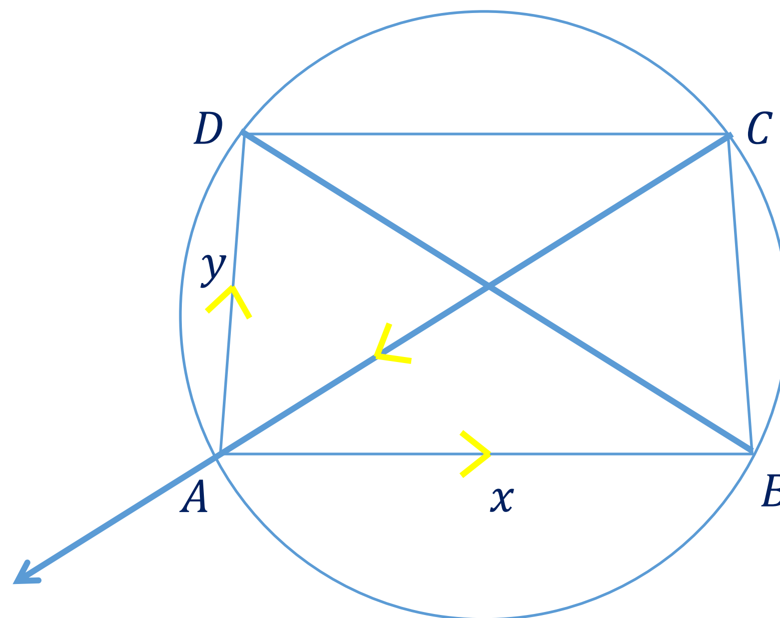
$$(2) \Rightarrow \frac{X}{Sin(\pi - CAD} = \frac{Y}{Sin(\pi - BAC} = \frac{Z}{SinBAD}$$

$$(3) \Rightarrow \frac{X}{SinCAD} = \frac{Y}{SinBAC} = \frac{Z}{SinBAD} \quad \dots\dots\dots (i)$$

$$(4)\ \frac{CD}{SinCAD} = 2R$$

$$(5)\ \frac{BC}{SinBAC} = 2R$$

$$(6)\ \frac{BD}{SinBAD} = 2R$$



10 MINUTE SCHOOL

Problems

3. ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AB, AD বরাবর যথাক্রমে X ও Y বলদ্বয় ক্রিয়ারত আছে। C হতে A এর দিকে CA বরাবর ক্রিয়ারত Z বলটির দ্বারা তাদের সমতা রক্ষা করা হলে, দেখাও যে, $\frac{X}{CD}=\frac{Y}{CB}=\frac{Z}{BD}$.[য: বো: ০৫]

$$\therefore \frac{CD}{sinCAD}=2R$$

$$\frac{CB}{sinBAC}=2R$$

$$\frac{BD}{sinBAD}=2R$$

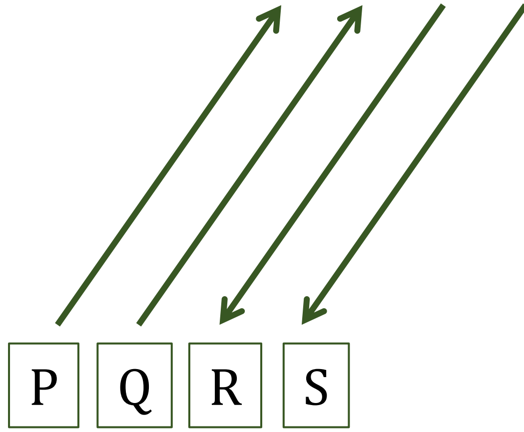
$$\therefore sin\ CAD=\frac{CD}{2R}$$

$$\therefore sin\ BAC=\frac{CB}{2R}$$

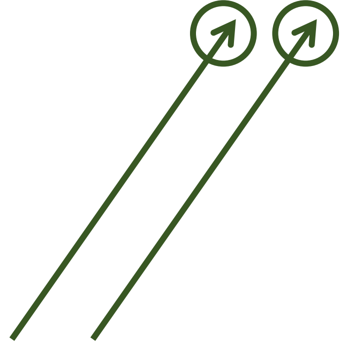
$$\therefore sin\ BAD=\frac{BD}{2R}$$

$$\therefore \frac{X}{\frac{CD}{2R}}=\frac{Y}{\frac{CB}{2R}}=\frac{Z}{\frac{BD}{2R}}$$

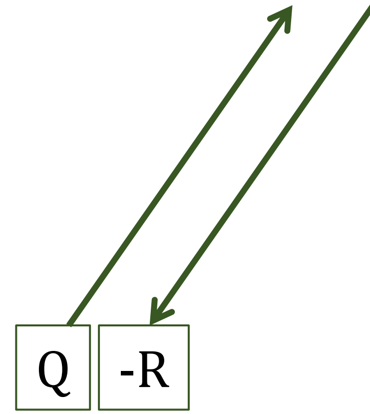
$$\therefore \frac{X}{CD}=\frac{Y}{CB}=\frac{Z}{BD}$$



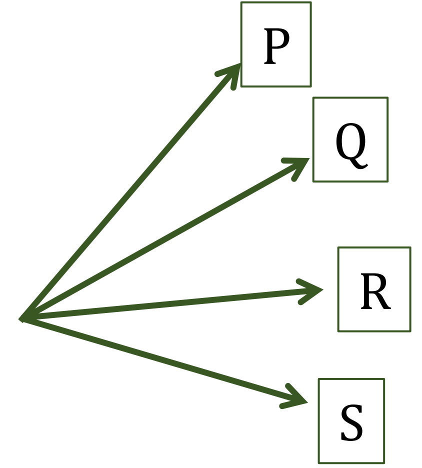
সমান্তরাল বল



সদৃশ সমান্তরাল



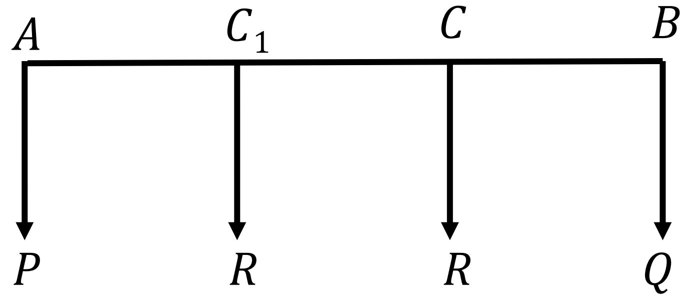
বিসদৃশ সমান্তরাল



অসমান্তরাল

10 MINUTE SCHOOL

সদৃশ সমান্তরাল

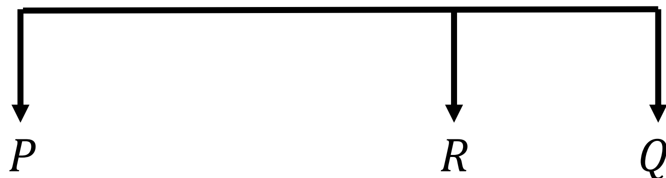


$Case: 1 \quad R = P + Q = 10 + 10 = 20\ N, AC = BC$

$Case: 2 \quad P > Q, R = P + Q = 25\ R, P$ সরে যাবে।

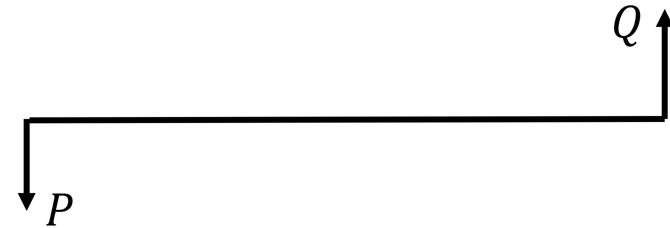


$Case: 3 \ \ Q > P \ \ R = P + Q = 10 + 20 = 30,$
R, Q এর দিকে.



Vs.

বিসদৃশ অসমান্তরাল

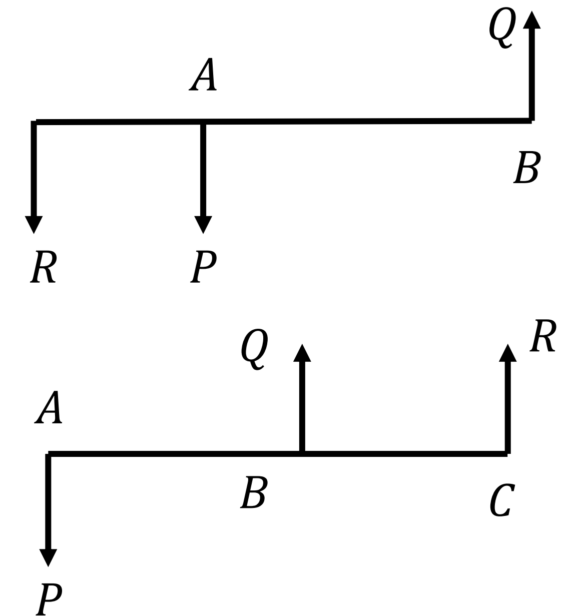


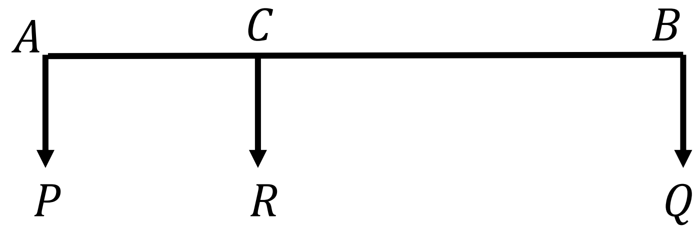
$C_1 \rightarrow R = P \sim Q$

$C_2 \rightarrow P > Q$

$R = P - Q$

$C_3 \rightarrow Q > P$







$$\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC}$$

$$\therefore P.AC = Q.BC$$

বল × বল থেকে লব্ধীর দূরত্ব

ΔADH ও ΔAOC সদৃশকোণী

$\frac{DH}{CO} = \frac{AH}{AC}$

$\Rightarrow \frac{P}{CO} = \frac{F}{AC}$

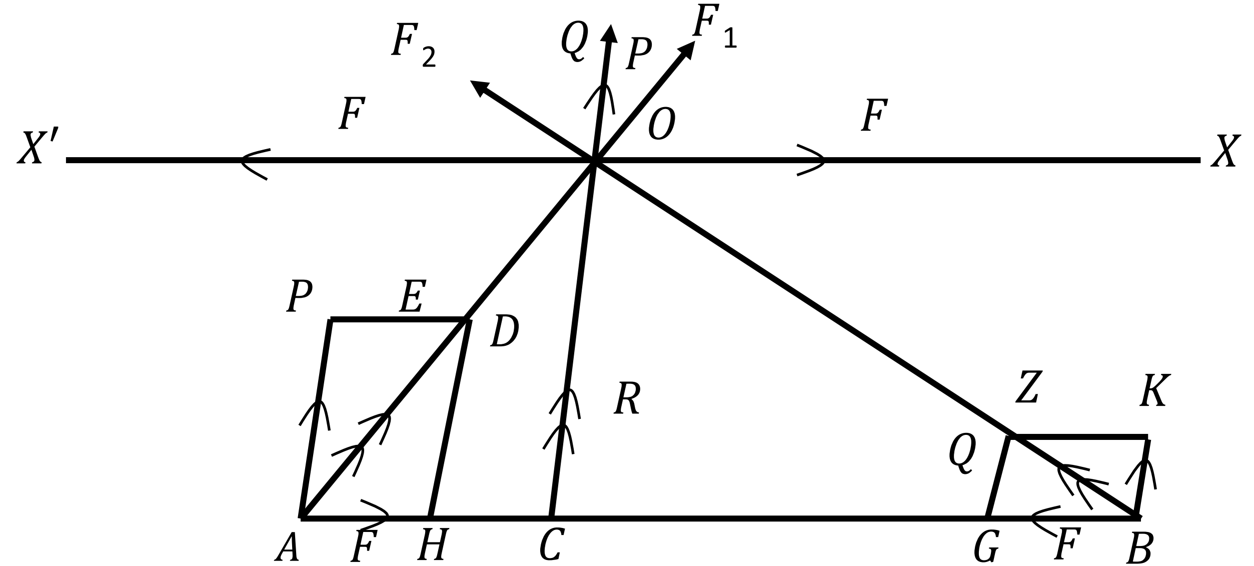
$\therefore F.CO \ldots (i)$

ΔBGZ ও ΔBCO সদৃশকোণী

$\frac{Q}{CO} = \frac{F}{BC}$

$\therefore Q.BC = F.CO \ldots (ii)$

(i) ও $(ii) \rightarrow P.AC = Q.BC$



10 MINUTE SCHOOL

টাইপ ০৭ সমান্তরাল বল ও কেন্দ্র সংক্রান্ত



টাইপ ০৮ সমান্তরাল বল ও লব্ধির অবস্থান পরিবর্তন



10 MINUTE SCHOOL

Problems

1. কোনো ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুগুলিতে P, Q, R মানের তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত আছে। এদের লব্ধি ঐ ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রে ক্রিয়ারত হলে দেখাও যে, $P = Q = R$

[ঢাকা, দিনাজপুর, যশোর ও সিলেট বোর্ড-২০১৮ এর সৃজনশীল ৬(গ); ঢা: বো: ১৪, ০৮; রা: বো: ০৫; কু: বো: ১০; চ: বো: ০৭; সি: বো: ০৮; য: বো: ০৭; ব: বো: ১০; মাদ্রাসা বো: ১২, ১০]

G বিন্দুর লব্ধী $P + Q + R$ কাজ করে।

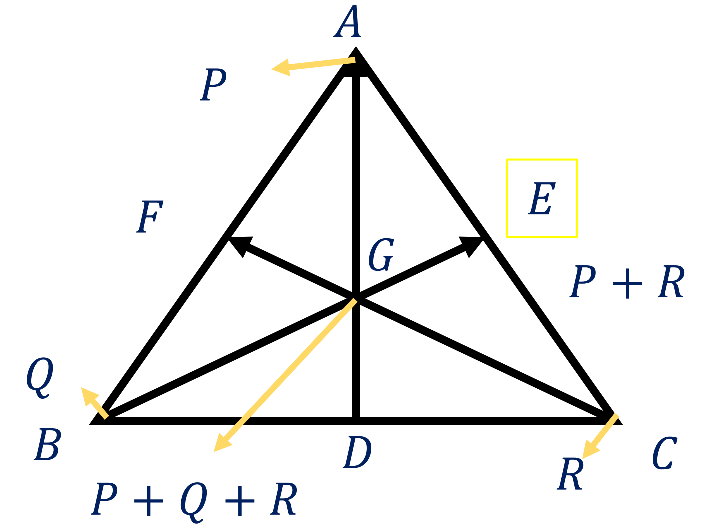
∴B ও C বিন্দুর লব্ধী Q+R অবশ্যই D বিন্দুতে কাজ করবে।

$\therefore Q = R \ldots (i)$

একই ভাবে দেখানো যায়, $P = R \ldots (ii)$

বিন্দু D মধ্যবিন্দু হওয়ায় BD=CD

(i) ও (ii) হতে, $P = Q = R$

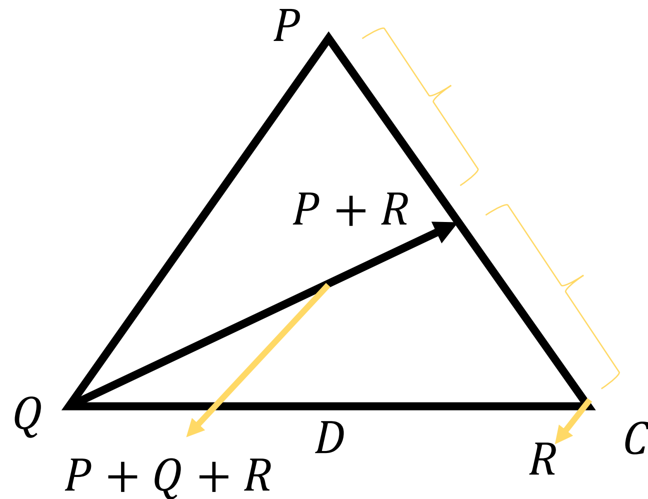


10 MINUTE SCHOOL

Problems

1. কোনো ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুগুলিতে P, Q, R মানের তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত আছে। এদের লব্ধি ঐ ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রে ক্রিয়ারত হলে দেখাও যে, $P = Q = R$

[ঢাকা, দিনাজপুর, যশোর ও সিলেট বোর্ড-২০১৮ এর সৃজনশীল ৬(গ); ঢা: বো: ১৪, ০৮; রা: বো: ০৫; কু: বো: ১০; চ: বো: ০৭; সি: বো: ০৮; য: বো: ০৭; ব: বো: ১০; মাদ্রাসা বো: ১২, ১০]



$P = R$

$P = Q$

$P = Q$

$Q = R$

$P, Q, R \rightarrow P + Q + R$

10 MINUTE SCHOOL

Problems

2. ABC ত্রিভুজের A, B, C কৌণিক বিন্দুতে যথাক্রমে P, Q, R মানের তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত আছে। তাদের লব্ধি ঐ ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রে ক্রিয়ারত হলে দেখাও যে,

একটি ত্রিভুজের যেকোনো সমদ্বিখণ্ডক তার বিপরিত বাহুকে কোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ে অনুপাতে বিভক্ত করে।

(i) $\frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c}$.

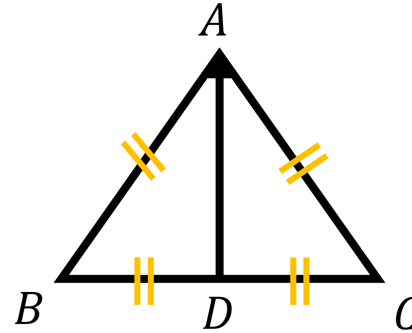
[বুয়েট ৯৮-৯৯; কু: বো: ০৮; সি: বো: ১২; রা: বো: ১৪, ০৭]

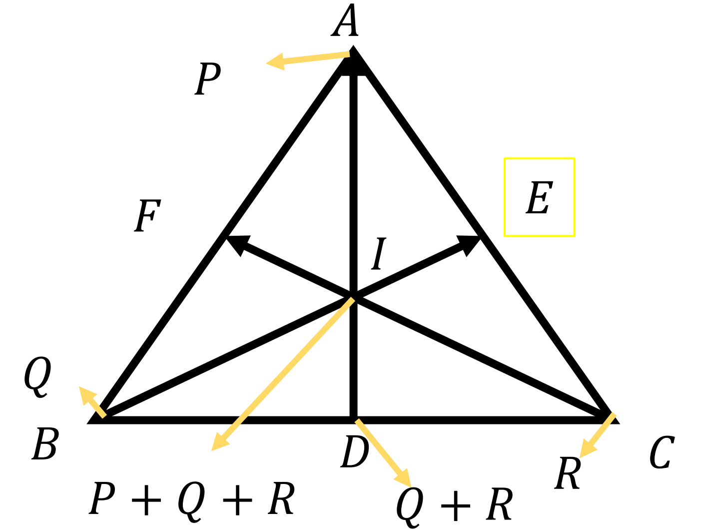
(ii) $P:Q:R = sinA:sinB:sinC$

[ঢাকা, দিনাজপুর, যশোর ও সিলেট বোর্ড -২০১৮ এর সৃজনশীল -৬(খ); চুয়েট ০৩-০৪; দি: বো: ১৩; সি: বো: ০৫; রা:বো: ১৬; ব: বো: ১৬, ১৩; মাদ্রাসা বো: ১৪, ১১, ১০]

যেহেতু, লব্ধি $P + Q + R$, I বিন্দুতে ক্রিয়ারত সুতরাং Q ও R এর লব্ধি Q+R অবশ্যই AI রেখার বর্ধিত D বিন্দুতে ক্রিয়ারত.

$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ ($AD, \angle A$ কোণ সমদ্বিখণ্ডক বলে)





10 MINUTE SCHOOL

Problems

2. ABC ত্রিভুজের A, B, C কৌণিক বিন্দুতে যথাক্রমে P, Q, R মানের তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত আছে। তাদের লব্ধি ঐ ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রে ক্রিয়ারত হলে দেখাও যে,

একটি ত্রিভুজের যেকোনো সমদ্বিখণ্ডক তার বিপরিত বাহুকে কোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ে অনুপাতে বিভক্ত করে।

$(i)\ \frac{P}{a}=\frac{Q}{b}=\frac{R}{c}.$

[বুয়েট ৯৮-৯৯; কু: বো: ০৮; সি: বো: ১২; রা: বো: ১৪, ০৭]

$(ii)\ P:Q:R=sinA:sinB:sinC$

[ঢাকা, দিনাজপুর, যশোর ও সিলেট বোর্ড -২০১৮ এর সৃজনশীল -৬(খ); চুয়েট ০৩-০৪; দি: বো: ১৩; সি: বো: ০৫; রা:বো: ১৬; ব: বো: ১৬, ১৩; মাদ্রাসা বো: ১৪, ১১, ১০]

আবার, $Q.BD=R.CD$

$\Rightarrow \frac{BD}{CD}=\frac{R}{Q}\ldots(i)$

(i) ও (ii) হতে, $\frac{AB}{AC}=\frac{R}{Q}$

$\therefore \frac{Q}{AC}=\frac{R}{AB}$

অনুরূপভাবে, $\frac{Q}{AC}=\frac{P}{BC}$

$\therefore \frac{P}{BC}=\frac{Q}{AC}=\frac{R}{AB}$

10 MINUTE SCHOOL

Problems

2. ABC ত্রিভুজের A, B, C কৌণিক বিন্দুতে যথাক্রমে P, Q, R মানের তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত আছে। তাদের লব্ধি ঐ ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রে ক্রিয়ারত হলে দেখাও যে,

একটি ত্রিভুজের যেকোনো সমদ্বিখণ্ডক তার বিপরিত বাহুকে কোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ে অনুপাতে বিভক্ত করে।

(i) $\frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c}$.

[বুয়েট ৯৮-৯৯; কু: বো: ০৮; সি: বো: ১২; রা: বো: ১৪, ০৭]

(ii) $P : Q : R = sinA : sinB : sinC$

[ঢাকা, দিনাজপুর, যশোর ও সিলেট বোর্ড -২০১৮ এর সৃজনশীল -৬(খ); চুয়েট ০৩-০৪; দি: বো: ১৩; সি: বো: ০৫; রা:বো: ১৬; ব: বো: ১৬, ১৩; মাদ্রাসা বো: ১৪, ১১, ১০]

$$\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}$$

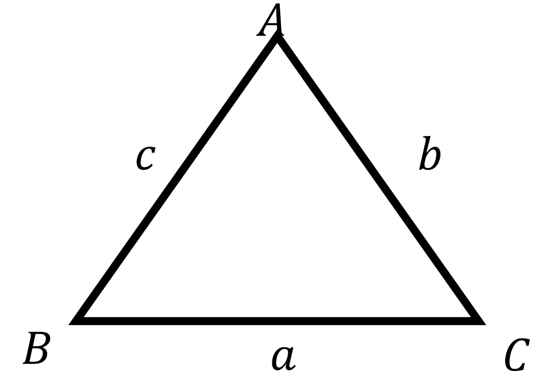
$$\Rightarrow \frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c} \text{ (Proved)}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\therefore a = 2RsinA$$

$$b = 2RsinB$$

$$c = 2RsinC$$



10 MINUTE SCHOOL

Problems

2. ABC ত্রিভুজের A, B, C কৌণিক বিন্দুতে যথাক্রমে P, Q, R মানের তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত আছে। তাদের লব্ধি ঐ ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রে ক্রিয়ারত হলে দেখাও যে,

একটি ত্রিভুজের যেকোনো সমদ্বিখণ্ডক তার বিপরিত বাহুকে কোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ে অনুপাতে বিভক্ত করে।

(i) $\frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c}$.

[বুয়েট ৯৮-৯৯; কু: বো: ০৮; সি: বো: ১২; রা: বো: ১৪, ০৭]

(ii) $P:Q:R = sinA:sinB:sinC$

[ঢাকা, দিনাজপুর, যশোর ও সিলেট বোর্ড -২০১৮ এর সৃজনশীল -৬(খ); চুয়েট ০৩-০৪; দি: বো: ১৩; সি: বো: ০৫; রা:বো: ১৬; ব: বো: ১৬, ১৩; মাদ্রাসা বো: ১৪, ১১, ১০]

$$\frac{P}{2RsinA} = \frac{Q}{2RsinB} = \frac{R}{2RsinC}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{sinA} = \frac{Q}{sinB} = \frac{R}{sinC}$$

$$\therefore P:Q:R = sinA:sinB:sinC$$

10 MINUTE SCHOOL

HOME WORK

3. ABC ত্রিভুজের A, B, C কৌণিক বিন্দুতে যথাক্রমে P, Q, R মানের তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত আছে। তাদের লব্ধি ঐ ত্রিভুজের লম্ব কেন্দ্রগামী হলে, প্রমাণ কর যে,

$(a) \frac{P}{tanA} = \frac{Q}{tanB} = \frac{R}{tanC}$. [ঢা: বো: ১২; দি: বো: ১১, ০৯; কু: বো: ০৬; চ: বো: ১৫, ১২, ০৬ ; ব: বো: ০৭; য: বো: ০৮; সি: বো: ১০]

$(b)\ P\ (b^2 + c^2 - a^2) = Q\ (c^2 + a^2 - b^2) = R\ (a^2 + b^2 - c^2)$চ:বো: ০৯; ব: বো: ০৫]

10 MINUTE SCHOOL

টাইপ ০৭ সমান্তরাল বল ও কেন্দ্র সংক্রান্ত

টাইপ ০৮ সমান্তরাল বল ও লব্ধির অবস্থান পরিবর্তন

$$R = P + Q$$
$$R = P \sim Q$$
বল × বল থেকে লব্ধীর দূরত্ব

10 MINUTE SCHOOL

Problems

1. একজন লোক একটু লাঠি কাধেঁর উপর আনুভূমিক ভাবে স্থাপন করে এর এক প্রান্তে হাত রেখে অপর প্রান্তে W ওজনের একটি বস্তু বহন করছে। যদি তার কাধ হতে বস্তু ও হাতের দূরত্ব যথাক্রমে a ও x হয়, তবে প্রমাণ কর যে, তার কাঁধের উপর চাপের পরিমাণ হবে $W\left(1+\frac{a}{x}\right)$. [ঢা: বো: ১৪; রা:বো: ১৫; দি:বো: ১৬; সি: বো: ০৫; ব: বো: ১০]

$R = P + W \ldots (i)$

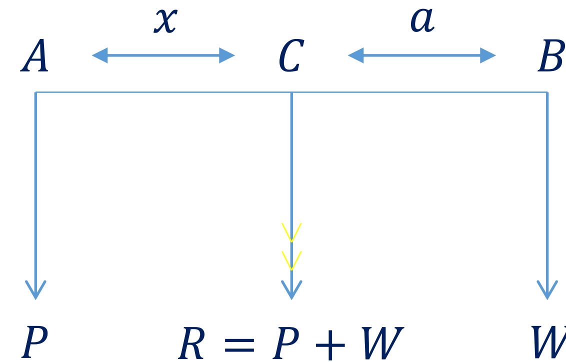
আবার, $P.AC = W.BC$

$\Rightarrow P.x = W.a$

$\Rightarrow P = W.\frac{a}{x}$

(i) নং হতে, $R = W.\frac{a}{x} + W$

$= W\left(1+\frac{a}{x}\right)$



কাধের উপর বল

কাধ কি পরিমান বল প্রতিক্রিয়া প্রয়োগ করবে।

10 MINUTE SCHOOL

Problems

2. একটি দণ্ডের একপ্রান্ত হতে 2, 8, 6 মিটার দূরত্বে অবস্থিত তিনটি বিন্দুতে যথাক্রমে P, Q, R মানের তিনটি সমান্তরাল বল ক্রিয়া করছে। দণ্ডটি সাম্যাবস্থায় থাকলে দেখাও যে, $P:Q:R = 1:2:3$.

[চ: বো: ১৬; সি: বো: ১১, ০৬; য: বো: ০৯, ০৫; ব: বো: ১৫, ০৯]

$R = P + Q \quad \ldots (i)$

$P \times 4 = Q \times 2$

$\Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \ldots (ii)$

$Q = 2P$

$(i) \Rightarrow R = P + 2P$

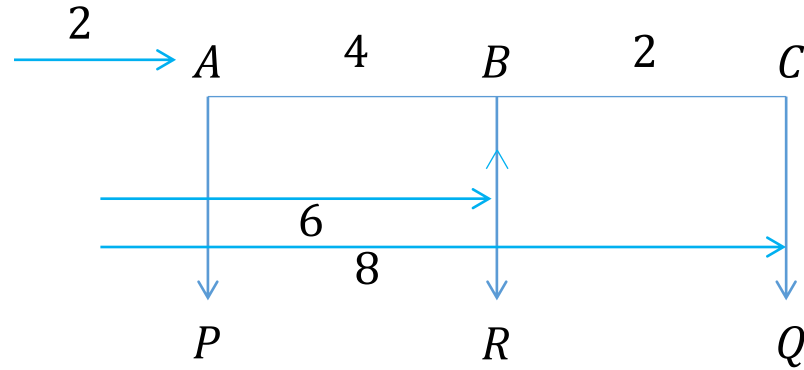
$\Rightarrow R = 3P$

$\Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{P}{1} = \frac{R}{3}$

$\therefore \frac{P}{1} = \frac{Q}{2} = \frac{R}{3}$

$\therefore P:Q:R = 1:2:3$



10 MINUTE SCHOOL

Problems

3. দুইটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বল P ও Q (P>Q) যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত। P এবং Q এর প্রত্যেককে x পরিমাণে বৃদ্ধি করলে দেখাও যে, তাদের লব্ধিটি d দূরত্বে সরে যাবে, যখন $d = \frac{x}{P-Q}AB$.

[ঢা: বো: ১৫, ১৩, ০৫; য: বো: ১৬, ১৫; রা: বো: ১০; চ: বো: ০৯; কু:বো: ১৬ ,০৫; ব: বো: ১৪, ০৬]

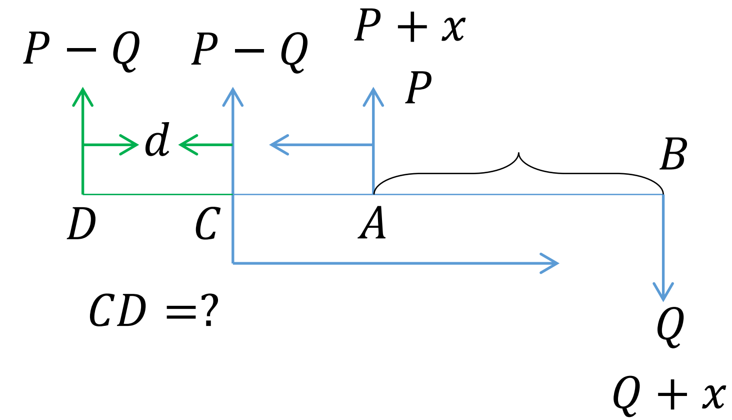
$P.AC = Q.BC$

$\Rightarrow P.AC = Q(AC + AB)$

$\Rightarrow P.AC = Q.AC + Q.AB$

$\Rightarrow QAB = (P - Q)AC$

$\therefore AC = \frac{Q}{P-Q}AB \ldots (i)$



10 MINUTE SCHOOL

Problems

3. দুইটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বল P ও Q (P>Q) যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত। P এবং Q এর প্রত্যেককে x পরিমাণে বৃদ্ধি করলে দেখাও যে, তাদের লব্ধিটি d দূরত্বে সরে যাবে, যখন $d = \frac{x}{P-Q}AB$.

[ঢা: বো: ১৫, ১৩, ০৫; য: বো: ১৬, ১৫; রা: বো: ১০; চ: বো: ০৯; কু:বো: ১৬ ,০৫; ব: বো: ১৪, ০৬]

$(P+x)AD = (Q+x)BD$

$\Rightarrow (P+x)AD = (Q+x)(AD+AB)$

$\Rightarrow AD(P+x) = (Q+x)AD + AB(Q+x)$

$\Rightarrow AD(P+x) - (Q+x)AD = AB(Q+x)$

$\Rightarrow AD(P+x-Q-x) = (Q+x)AB$

$\therefore AD = \frac{Q+x}{P-Q}AB$

$\therefore CD = AD - AC$

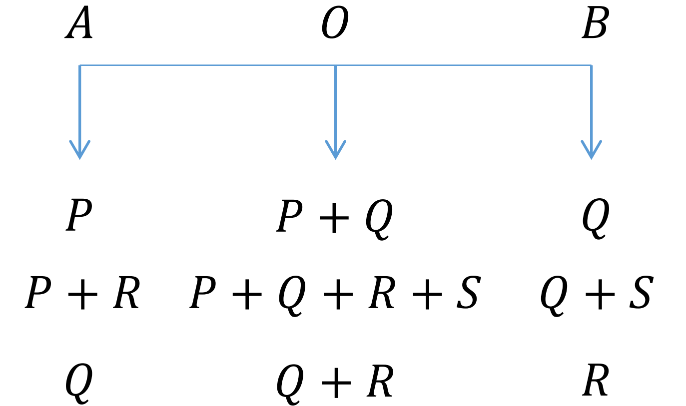
$= \frac{Q+x}{P-Q}.AB - \frac{Q}{PQ}AB$

$= \frac{Q+x-Q}{P-Q}.AB$

$d = \frac{x}{P-Q}.AB$

Problems

4. P ও Q মানের দুইটি সমমুখী সমান্তরাল বলের লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। P কে R পরিমাণে এবং Q কে S পরিমাণে বৃদ্ধি করলেও লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। আবার, P, Q এর বদলে Q, R ক্রিয়া করলেও লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। দেখাও যে, $S = R - \frac{(Q-R)^2}{P-Q}$. [বুয়েট ০৩-০৪; ঢা: বো: ০৬; রা: বো: ০৯; কু: বো: ১১, ০৯; চ: বো: ১৪; য: বো: ১৫]



১ম শর্তে, $P.AD = Q.BD \ldots (i)$

২য় শর্তে, $(P+R).AD = (Q+S)BO \ldots (ii)$

৩য় শর্তে, $Q.AD = R.BO \ldots (iii)$

$(i) \div (ii) \Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{Q}{R} = \frac{P-Q}{Q-R} \ldots (iv)$

$(ii) - (i) \Rightarrow R.AO = S.BO \ldots (v)$

$(iii) \div (v) \Rightarrow \frac{Q}{S} = \frac{R}{S} = \frac{Q-R}{R-S} \ldots (vi)$

$\frac{P-Q}{Q-R} = \frac{Q-R}{R-S}$

$\Rightarrow (R-S)(P-Q) = (Q-R)^2$

$\Rightarrow R - S = \frac{(Q-R)^2}{P-Q}$

$\therefore S = R - \frac{(Q-R)^2}{P-Q}$

10 MINUTE SCHOOL

HOME WORK

5. দুইটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বল P ও Q (P>Q) এর প্রত্যেকের মান যদি সমপরিমাণে বর্ধিত করা হয়, তবে প্রমাণ কর যে, তাদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু P হতে আরও দূরে সরে যাবে।

[ঢা: বো: ১৪; রা: বো: ০৮; দি: বো: ১৪; কু: বো: ১৩, ০৯; চ: বো: ১৩, ০৭; সি: বো: ১৩; ব: বো: ১৩, ১১]

6. P ও Q দুইটি সমমুখী সমান্তরাল বল। P বলটির ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল রেখে তার ক্রিয়াবিন্দুকে x দূরে সরালে দেখাও যে, তাদের লব্ধি $\frac{Px}{P+Q}$ দূরে সরে যাবে । [ঢা: বো: ০৭; রা: বো: ০৬; দি: বো: ১৫, ১০; কু: বো: ০৭; চ:বো: ১১;

সি: বো: ১৬, ১৫, ১৪, ০৯, ০৭, ০৫; য: বো: ১২, ১০; ব: বো: ০৮]

CQ

দৃশ্যকল্প-১: কোন বিন্দুতে 2P এবং Q মানের দুটি বল ক্রিয়ারত আছে।

দৃশ্যকল্প-২: 5N ও 3N বানের বিপরীতমুখী দুটি সমান্তরাল বল যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল, যেখানে AB= 10 cm

রাজশাহী বোর্ড' ২০১৯

(ক) কোন বিন্দুতে পরস্পর 120 ডিগ্রি কোণে ক্রিয়ারত একই মানের দুটি বলের লব্ধি 4 নিউটন হলে, বল 2 টি নির্ণয় করো।

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ যদি Q= 3P হয় এবং প্রথম বলটিকে দ্বিগুণ ও দ্বিতীয় বলটির মান 6 একক বৃদ্ধি পায় তবে লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে। Q এর মান নির্ণয় করো।

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ প্রত্যেক বলের মান যদি 3N করে বৃদ্ধি করা হয় তবে লব্ধির ক্রিয়া বিন্দু কত দূরে সরে যাবে?

CQ

(ক) কোন বিন্দুতে পরস্পর 120 ডিগ্রি কোণে ক্রিয়ারত একই মানের দুটি বলের লব্ধি 4 নিউটন হলে, বল 2 টি নির্ণয় করো।

ধরি, বল দুটি P ও P মানের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 120^{\circ}$ এবং লব্ধি, R=4N

$\therefore\ R^2 = P^2 + P^2 + 2.P.P\cos\alpha$

$\Rightarrow\ R^2 = 2P^2 + 2P^2\ \cos\alpha$

$\Rightarrow\ 4^2 = 2P^2 + 2P^2\cos 120^{\circ}$

$\Rightarrow 16\ = 2P^2 - 2P^2\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow 16\ = 2P^2 - P^2$

$\Rightarrow 16\ = P^2$

$\therefore P = 4$

নির্ণেয় বল দুটি 4N, 4N

CQ

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ যদি Q= 3P হয় এবং প্রথম বলটিকে দ্বিগুণ ও দ্বিতীয় বলটির মান 6 একক বৃদ্ধি পায় তবে লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে। Q এর মান নির্ণয় করো।

মনে করি O বিন্দুতে কার্যরত যথাক্রমে OA এবং OB দ্বারা সূচিত P এবং Q বল দুটির লব্ধি OACB সামান্তরিকের কর্ণ OC দ্বারা সূচিত। আবার, OE এবং OF দ্বারা সূচিত যথাক্রমে 2P ও Q+6 বল দুইটির লব্ধি OEDF সামান্তরিকের কর্ণ OD দ্বারা সূচিত হবে যা OC বরাবর ক্রিয়াশীল।

ΔOAC এবং ΔOED সদৃশকোণী

$$\frac{OA}{AC} = \frac{OE}{ED} \quad \Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{2P}{Q+6} \quad \Rightarrow \frac{P}{3P} = \frac{2P}{3P+6} \quad [\because Q = 3P] \quad \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2P}{3P+6}$$

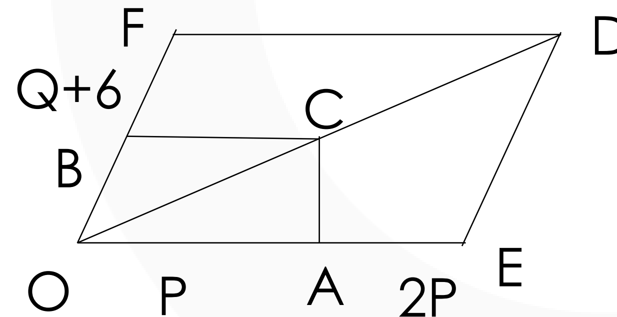
$$\Rightarrow 6P = 3P + 6$$

$$\Rightarrow 3P = 6$$

$$\therefore P = 2$$

সুতরাং, $Q = 3P = 3 \times 2 = 6\ N$

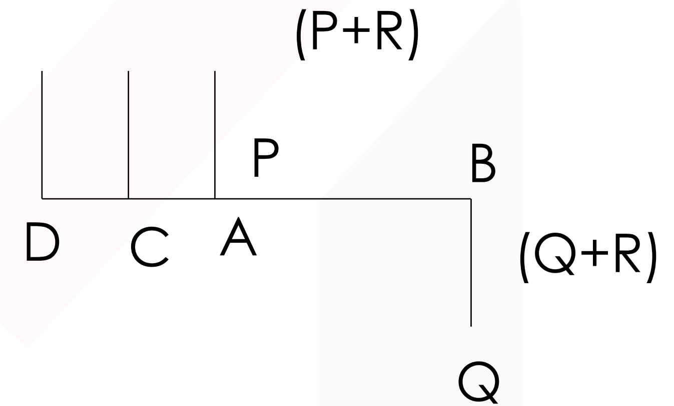
$\therefore$ Q এর মান 6N



CQ

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ প্রত্যেক বলের মান যদি 3N করে বৃদ্ধি করা হয় তবে লব্ধির ক্রিয়া বিন্দু কত দূরে সরে যাবে?

প্রথম ক্ষেত্রে, A বিন্দুতে P বল B বিন্দুতে Q বল ও তাদের লব্ধি C বিন্দুতে।



$$P.AC = Q.BC$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{P}{Q} \qquad \Rightarrow \frac{BC - AC}{AC} = \frac{P - Q}{Q}$$ [বিয়োজন করে]

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{P - Q}{Q}$$

$$\Rightarrow AC = Q.\frac{AB}{P - Q}$$

CQ

২য় ক্ষেত্রে, R পরিমাণ বৃদ্ধি করলে A বিন্দুতে P+R এবং B বিন্দুতে Q+R বলের লব্ধি D বিন্দুতে।

$$\therefore (P+Q).AD = (Q+R).BD$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{P+Q}{Q+R} \qquad \Rightarrow \frac{(BD-AD)}{AD} = \frac{P+R-Q-Q}{Q+R}$$ [বিয়োজন করে]

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{P-Q}{Q+R}$$

$$\Rightarrow AD = AB.\frac{Q+R}{P-Q}$$

লব্ধির সরণ, $CD = AD - AC$

$$= AB.\frac{(Q+R)}{P-Q} - AB.\frac{Q}{P-Q}$$

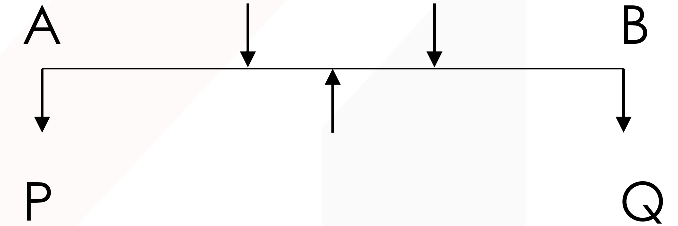
$$= \frac{Q.AB + R.AB - Q.AB}{P-Q} \qquad = \frac{R.AB}{P-Q}$$

CQ

এখানে, P= 5N, Q=3N, R=3N এবং AB= 10 cm

লব্ধির সরণ, CD= $\frac{3\times10}{5-3} = \frac{30}{2} = 15\ c.m$

∴ অতএব, লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু 15 c.m দূরে সরে যাবে।



A ও B বিন্দুতে একটি দণ্ড রয়েছে। যে কাজগুলি হতে পারে:

১) উপরে-নিচে হবে; $\sum F_v = 0$
২) Side হবে ; $\sum F_n = 0$
৩) Rotate হবে; $\sum M = 0$

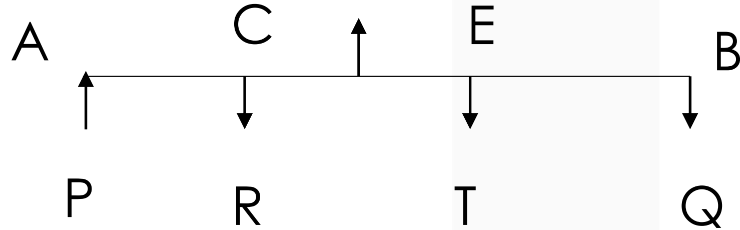
বস্তু স্থির থাকলে

$M \propto F$ যখন d স্থির $\quad$ $M \propto d$ যখন F স্থির $\quad$ $\therefore M = kFd\ [k = 1] \Rightarrow MFd$

d= লম্ব দূরত্ব $\quad$ M নির্দিষ্ট বিন্দু সাপেক্ষে হয়।

CQ

দরজার কব্জা S



এখানে, AB রেখার উপর কিছু বল ক্রিয়া করছে।

এক্ষেত্রে Anti clockwise (+ve) দিকে

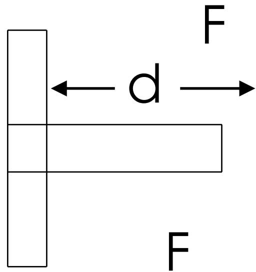
$$+\sum M = 0$$

∴ P বিন্দু হতে কব্জার দূরত্ব, $d_p = -P \times CA$; A বিন্দুর জন্য moment
∴ R বিন্দু হতে কব্জার দূরত্ব, $d_R = R \times O$; C বিন্দুর জন্য moment
∴ C বিন্দু হতে S বলের দূরত্ব, $d_{cs} = S \times CD$; D বিন্দুর জন্য moment
∴ C বিন্দু হতে P বলের দূরত্ব, $d_{cp} = -T \times CE$; E বিন্দুর জন্য moment
∴ Q বিন্দু হতে C বলের দূরত্ব, $d_{QC} = -Q \times CB$; B বিন্দুর জন্য moment

সাম্যবস্থায় C বিন্দু সাপেক্ষে মোমেন্ট:

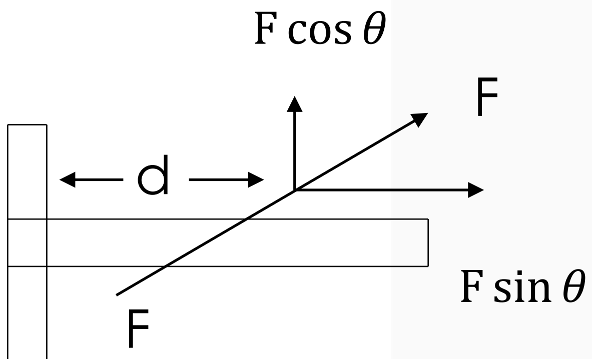
$$+\hookleftarrow \sum M_c = -P \times CA + R \times 0 + S \times CD - T \times CE - Q \times CB = 0$$
$$= P \times CA + S \times CD - T \times CE - Q \times CB = 0$$

CQ



এখানে কব্জা **360° কোণে** rotate করবে।

$$M = F \times d$$



∴ এখানে কোন বলের কারণে কব্জা ঘুরবে?

$\Rightarrow F \sin\theta$

$$\therefore M = F \sin\theta \times d$$

CQ

প্রশ্ন–২: দৃশ্যকল্প -১ : কোন বিন্দুতে $2P$ এবং Q মানের দুটি বল ক্রিয়ারত আছে।

দৃশ্যকল্প -২: $5\ N$ ও $3\ N$ মানের বিপরীতমুখী দুটি সমান্তরাল বল যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল, যেখানে $AB = 10\ cm$

[রা. বো. '১৯]

(ক) কোন বিন্দুতে পরস্পর 120 ডিগ্রি কোণে ক্রিয়ারত একই মানের দুটি বলের লব্ধি 4 নিউটন হলে, বলদুটি নির্ণয় করো।

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ যদি $Q = 3P$ হয় এবং ১ম বলটিকে দ্বিগুণ ও ২য় বলটির মান 6 একক বৃদ্ধি পায় তবে লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে। Q এর মান নির্ণয় করো

(গ) দৃশ্যকল্প -2 এ, প্রত্যেক বলের মান যদি $3N$ করে বৃদ্ধি করা হয় তবে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু কত দূরে সরে যাবে ?

CQ

(ক) কোন বিন্দুতে পরস্পর 120 ডিগ্রি কোণে ক্রিয়ারত একই মানের দুটি বলের লব্ধি 4 নিউটন হলে, বলদুটি নির্ণয় করো।

ধরি, বলদুটি P ও P যাদের মধ্যবর্তী কোণ ,$\alpha = 120^\circ$ এবং লব্ধি, $R = 4N$

$\therefore \quad R^2 = P^2 + P^2 + 2P.P \cos\alpha$

বা, $R^2 = 2P^2 + 2P^2 \cos\alpha$

বা, $4^2 = 2P^2 + 2P^2 \cos 120^\circ$

বা, $16 = 2P^2 - 2P^2 . \frac{1}{2}$

বা, $16 = 2P^2 - P^2$

বা, $16 = P^2$

বা, $p = 4$

সুতরাং , নির্ণেয় বল দুটি $4N, 4N$

CQ

দৃশ্যকল্প -১ : কোন বিন্দুতে $2P$ এবং Q মানের দুটি বল ক্রিয়ারত আছে।

দৃশ্যকল্প -২: $5\ N$ ও $3\ N$ মানের বিপরীতমুখী দুটি সমান্তরাল বল যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল, যেখানে $AB = 10\ cm$

[রা. বো. '১৯]

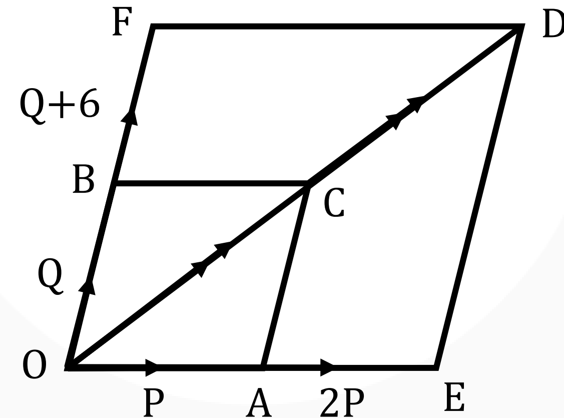
(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ যদি $Q = 3P$ হয় এবং ১ম বলটিকে দ্বিগুণ ও ২য় বলটির মান 6 একক বৃদ্ধি পায় তবে লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে। Q এর মান নির্ণয় করো

মনে করি O বিন্দুতে কার্যরত যথাক্রমে OA এবং OB দ্বারা সূচিত P এবং Q বল দুটির লব্ধি OACB সামান্তরিকের কর্ণ OC দ্বারা সূচিত।
আবার, OE এবং OF দ্বারা সূচিত যথাক্রমে 2P ও Q + 6 বল দুটির লব্ধি OEDF সামান্তরিকের কর্ণ OD দ্বারা সূচিত হবে যা OC বরাবর ক্রিয়াশীল।

ΔOAC এবং ΔOED সদৃশকোণী

$$\frac{OA}{AC} = \frac{OE}{ED}$$

বা, $\frac{P}{Q} = \frac{2P}{Q+6}$



CQ

দৃশ্যকল্প -১ : কোন বিন্দুতে $2P$ এবং Q মানের দুটি বল ক্রিয়ারত আছে।

দৃশ্যকল্প -২: $5\ N$ ও $3\ N$ মানের বিপরীতমুখী দুটি সমান্তরাল বল যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল, যেখানে $AB = 10\ cm$

[রা. বো. '১৯]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ যদি $Q = 3P$ হয় এবং ১ম বলটিকে দ্বিগুণ ও ২য় বলটির মান 6 একক বৃদ্ধি পায় তবে লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে। Q এর মান নির্ণয় করো

বা, $\frac{P}{3P} = \frac{2P}{3P+6}$ [∵Q=3P]

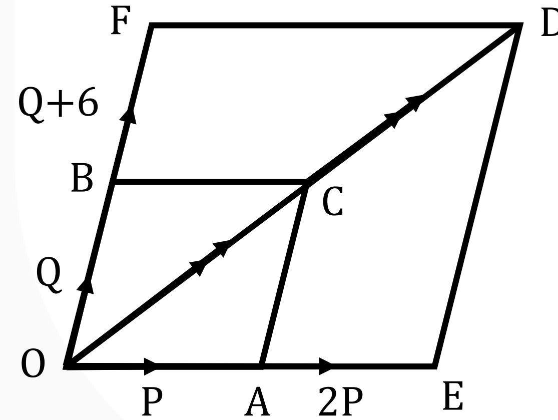
বা, $\frac{1}{3} = \frac{2P}{3P+6}$

বা, $6P = 3P + 6$

বা, $3P = 6$

বা, $P = 2$

সুতরাং, $Q = 3P = 3 \times 2 = 6N$



CQ

দৃশ্যকল্প -১ : কোন বিন্দুতে $2P$ এবং Q মানের দুটি বল ক্রিয়ারত আছে।

দৃশ্যকল্প -২: $5\ N$ ও $3\ N$ মানের বিপরীতমুখী দুটি সমান্তরাল বল যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল, যেখানে $AB = 10\ cm$

[রা. বো. '১৯]

(গ) দৃশ্যকল্প -২ এ, প্রত্যেক বলের মান যদি 3N করে বৃদ্ধি করা হয় তবে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু কত দূরে সরে যাবে ?

১ম ক্ষেত্রে , A বিন্দুতে P বল B বিন্দুতে Q বল ও তাদের লব্ধি C বিন্দুতে

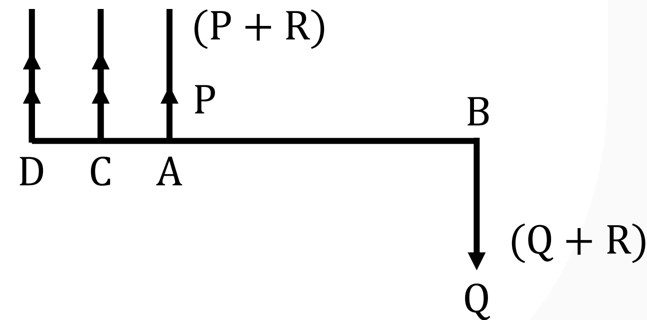
$P.AC = Q.BC$

বা, $\frac{BC}{AC} = \frac{P}{Q}$

বা, $\frac{BC-AC}{AC} = \frac{P-Q}{Q}$ [বিয়োজন করে]

বা, $\frac{AB}{BC} = \frac{P-Q}{Q}$

বা, $AC = Q.\frac{AB}{P-Q}$



CQ

দৃশ্যকল্প -১ : কোন বিন্দুতে $2P$ এবং Q মানের দুটি বল ক্রিয়ারত আছে।

দৃশ্যকল্প -২: $5\ N$ ও $3\ N$ মানের বিপরীতমুখী দুটি সমান্তরাল বল যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল, যেখানে $AB = 10\ cm$

[রা. বো. '১৯]

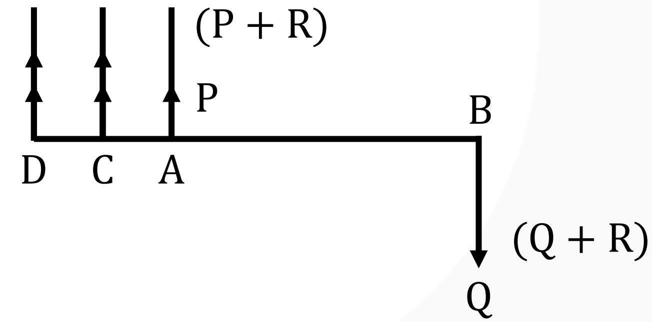
(গ) দৃশ্যকল্প -২ এ, প্রত্যেক বলের মান যদি 3N করে বৃদ্ধি করা হয় তবে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু কত দূরে সরে যাবে ?

২য় ক্ষেত্রে , R পরিমাণ বল বৃদ্ধি করলে A বিন্দুতে P + R এবং B বিন্দুতে Q + R বলের লব্ধি D বিন্দুতে ।

$$\therefore\ (P+R).AD = (Q+R).BD$$

বা, $\frac{BD}{AD} = \frac{P+Q}{Q+R}$

বা, $\frac{(BD - AD)}{AD} = \frac{P+R-Q-R}{Q+R}$ [বিয়োজন করে]



CQ

দৃশ্যকল্প -১ : কোন বিন্দুতে $2P$ এবং Q মানের দুটি বল ক্রিয়ারত আছে।

দৃশ্যকল্প -২: $5\ N$ ও $3\ N$ মানের বিপরীতমুখী দুটি সমান্তরাল বল যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল, যেখানে $AB = 10\ cm$

[রা. বো. '১৯]

(গ) দৃশ্যকল্প -২ এ, প্রত্যেক বলের মান যদি 3N করে বৃদ্ধি করা হয় তবে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু কত দূরে সরে যাবে ?

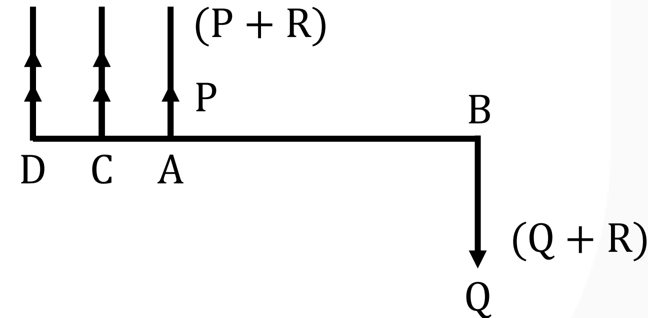
$$\frac{AB}{AD} = \frac{P-Q}{Q+R}$$

বা, $AD = AB.\frac{Q+R}{P-Q}$

লব্ধির সরণ ,$CD = AD - AC$

$$= AB.\frac{(Q+R)}{P-Q} - AB.\frac{Q}{P-Q}$$

$$= \frac{Q.AB+R.AB-Q.AB}{P-Q} = \mathbf{\frac{R.AB}{P-Q}}$$



CQ

দৃশ্যকল্প -১ : কোন বিন্দুতে $2P$ এবং Q মানের দুটি বল ক্রিয়ারত আছে। [রা. বো. '১৯]

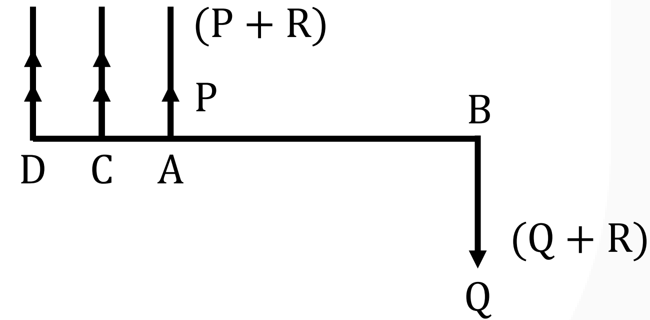
দৃশ্যকল্প -২: $5\ N$ ও $3\ N$ মানের বিপরীতমুখী দুটি সমান্তরাল বল যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল, যেখানে $AB = 10\ cm$

(গ) দৃশ্যকল্প -২ এ, প্রত্যেক বলের মান যদি 3N করে বৃদ্ধি করা হয় তবে লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু কত দূরে সরে যাবে ?

এখানে, $P = 5N,\ Q = 3N,\ R = 3N$ এবং $AB = 10\ c.m.$

লব্ধির সরণ, $CD = \frac{3 \times 10}{5-3} = 15\ c.m.$

অতএব, লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু 15 c.m. দূরে সরে যাবে ।



CQ

প্রশ্ন–৩: P ও Q দুটি বল যেখানে $P > Q$ [য. বো. '১৯]

(ক) যদি P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকে এবং $\sqrt{2}P = \sqrt{2}Q = R$ হয় তবে, P, Q, এবং R, P এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

(খ) যদি উদ্দিপকে উল্লেখিত বল গুলো সমবিন্দুগামী হয়, এবং উহাদের লব্ধি, অন্তর্ভুক্ত কোণকে সমত্রিখণ্ডিত করে, তবে বল দুইটির মধ্যবর্তী কোণ ও লব্ধি নির্ণয় কর।

(গ) উদ্দিপকে উল্লেখিত বলদ্বয়ের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম লব্ধি যথাক্রমে F ও G হয় এবং উহারা পরস্পর একটি বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়াশীল হয় তবে বল দুটির লব্ধিকে F, G ও $\frac{\alpha}{2}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

$$\sqrt{F^2 sin^2\frac{\alpha}{2} + G^2 cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

CQ

(ক) যদি P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকে এবং $\sqrt{2}P = \sqrt{2}Q = R$ হয় তবে, P, Q, এবং R, P এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

দেয়া আছে,

P, Q, R বল ত্রয় সাম্যবস্থা সৃষ্টি করে এবং $\sqrt{2}P = \sqrt{2}Q = R$

$\sqrt{2}P = \sqrt{2}Q$

বা, $P = Q$

$\sqrt{2}Q = R$

বা, $R = \sqrt{2}P$

P,Q এর লব্ধি R এবং P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ α হলে,

$P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha = R^2$

বা, $p^2 + P^2 + 2.P.P\ \cos\alpha = \left(\sqrt{2}P\right)^2$ $[\because P = Q]$

বা, $2\,p^2 + 2p^2.\cos\alpha = 2P^2$

বা, $2p^2\cos\alpha = 0$

বা, $\cos\alpha = 0$

বা, $\alpha = 90°$

CQ

(ক) যদি P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকে এবং $\sqrt{2}P = \sqrt{2}Q = R$ হয় তবে, P, Q, এবং R, P এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

R ও P এর লব্ধি Q এবং R ও P এর মধ্যবর্তী কোণ β হলে,

$0 \le \theta \le 180°$

$R^2 + P^2 + 2R.P\cos\beta = Q^2$

বা, $2P^2 + P^2 + 2.\sqrt{2}P.P\cos\beta = P^2$

বা, $2\sqrt{2}P^2\cos\beta = -2P^2$

বা, $\sqrt{2}\cos\beta = -1$

বা, $\cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

বা, $cos\,\beta = \cos(180° - 45°)$

$\therefore \beta = 135°$

∴ P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ 90° এবং R ও P এর মধ্যবর্তী কোণ 135°

CQ

P ও Q দুটি বল যেখানে $P > Q$ [য. বো. '১৯]

(খ) যদি উদ্দিপকে উল্লেখিত বল গুলো সমবিন্দুগামী হয়, এবং উহাদের লব্ধি, অন্তর্ভুক্ত কোণকে সমত্রিখন্ডিত করে, তবে বল দুইটির মধ্যবর্তী কোণ ও লব্ধি নির্ণয় কর।

এখানে, প্রদত্ত বল P ও Q যেখানে $P > Q$. মনে করি, বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ $= 3\alpha$।

তাহলে লব্ধি R, বল P এর সাথে α কোণ উৎপন্ন করে।

R বরাবর বল গুলোর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

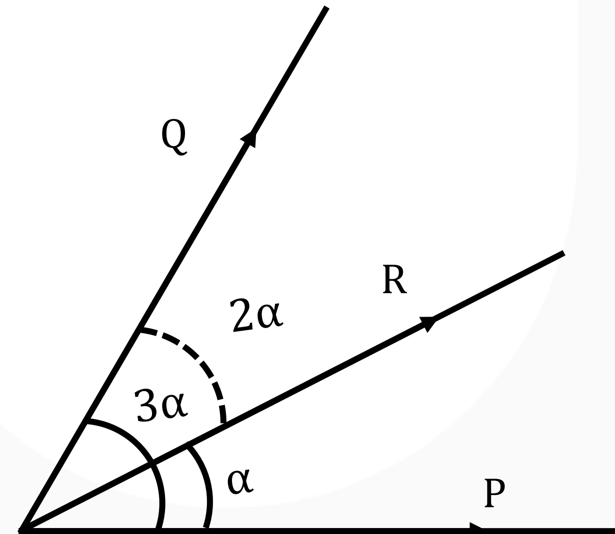
$$R\cos 0° = Q\cos 2\alpha + P\cos(-\alpha)$$

$\therefore R = Q(2\cos^2\alpha - 1) + P\cos\alpha$ ....(1)

এবং $R\sin 0° = Q\sin 2\alpha + P\sin(-\alpha)$

বা, $0 = Q(2\sin\alpha\cos\alpha) - P\sin\alpha$

বা, $2Q\cos\alpha - P = 0$



CQ

P ও Q দুটি বল যেখানে $P > Q$ [য. বো. '১৯]

(খ) যদি উদ্দিপকে উল্লেখিত বল গুলো সমবিন্দুগামী হয়, এবং উহাদের লব্ধি, অন্তর্ভুক্ত কোণকে সমত্রিখন্ডিত করে, তবে বল দুইটির মধ্যবর্তী কোণ ও লব্ধি নির্ণয় কর।

বা, $\cos\alpha = \frac{P}{2Q}$

$\therefore \alpha = \cos^{-1}\frac{P}{2Q}$

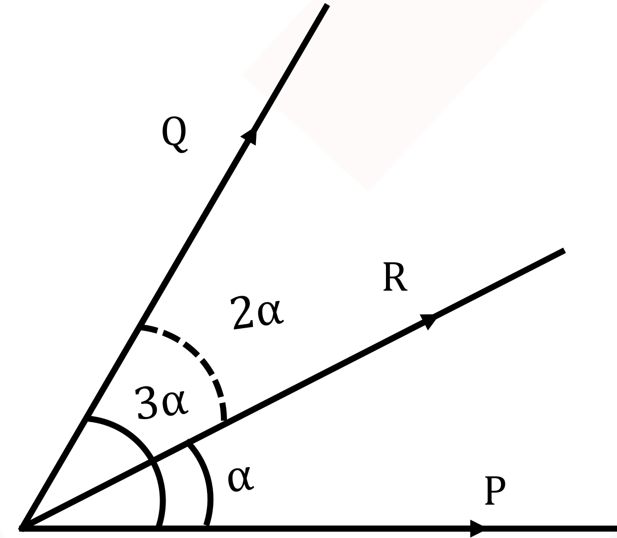
বা, $3\alpha = 3\cos^{-1}\frac{P}{2Q}$

সমীকরণ (1) হতে পাই,

$$R = 2Q\left(\frac{P^2}{4Q^2}\right) - Q + P\left(\frac{P}{2Q}\right)$$

$$= \frac{P^2}{2Q} - Q + \frac{P^2}{2Q} = \frac{P^2}{Q} - Q = \frac{P^2-Q^2}{Q}$$

$\therefore$ বল দুইটির অন্তর্গত কোণ $3\cos^{-1}\frac{P}{2Q}$ এবং লব্ধির মান $\frac{P^2-Q^2}{Q}$



CQ

P ও Q দুটি বল যেখানে $P > Q$ [য. বো. '১৯]

(গ) উদ্দিপকে উল্লেখিত বলদ্বয়ের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম লব্ধি যথাক্রমে F ও G হয় এবং উহারা পরস্পর একটি বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়াশীল হয় তবে বল দুটির লব্ধিকে F, G ও $\frac{\alpha}{2}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

ধরি, বলদ্বয় P ও Q; $(P > Q)$

শর্তমতে, $F = P + Q$.........(1)

এবং, $G = p - Q$.........(2)

আমরা পাই,

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$$
$$= \frac{1}{2}\{2(P^2 + Q^2) + 4PQ\cos\alpha\}$$
$$= \frac{1}{2}\{(P+Q)^2 + (P-Q)^2\} + \frac{1}{2}\{(P+Q)^2 - (P-Q)^2\}\cos\alpha$$

$[2(a^2 + b^2) = (a+b)^2 + (a-b)^2]$ $[4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2]$

CQ

P ও Q দুটি বল যেখানে $P > Q$ [য. বো. '১৯]

(গ) উদ্দিপকে উল্লেখিত বলদ্বয়ের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম লব্ধি যথাক্রমে F ও G হয় এবং উহারা পরস্পর একটি বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়াশীল হয় তবে বল দুটির লব্ধিকে F, G ও $\frac{\alpha}{2}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

$$= \frac{1}{2}(F^2 + G^2) + \frac{1}{2}(F^2 - G^2)\cos\alpha$$

$$= \frac{1}{2}F^2 + \frac{1}{2}G^2 + \frac{1}{2}F^2\cos\alpha - \frac{1}{2}G^2\cos\alpha$$

$$= \frac{1}{2}F^2(1 + \cos\alpha) + \frac{1}{2}G^2(1 - \cos\alpha)$$

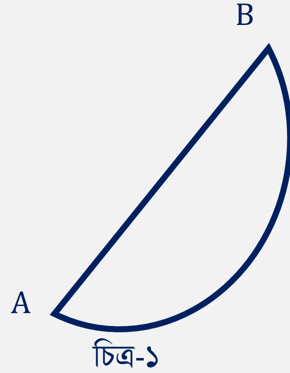
$$= \frac{1}{2}F^2.2\cos^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}G^2.2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$= F^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + G^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

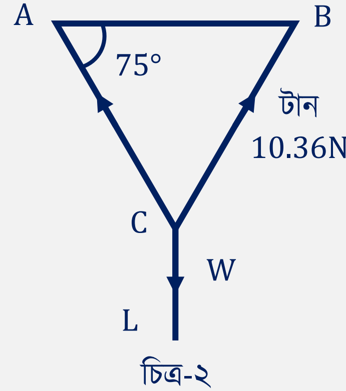
$\therefore$ লব্ধি, $R = \sqrt{F^2\, cos^2\frac{\alpha}{2} + G^2\, sin^2\frac{\alpha}{2}}$

ইহাই F, G ও $\frac{\alpha}{2}$ এর মাধ্যমে প্রকাশিত রুপ।

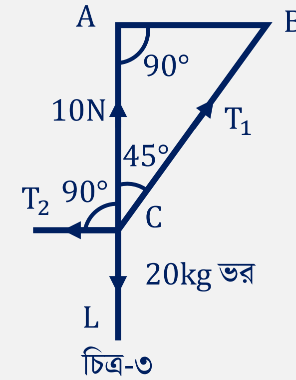
CQ



চিত্র-১



চিত্র-২



চিত্র-৩

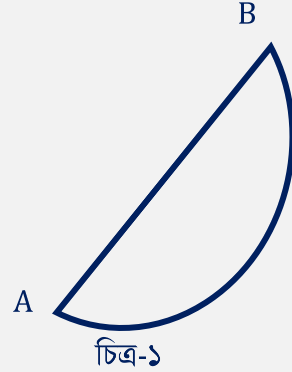
প্রতিটি চিত্রে A ও B বিন্দুতে হালকা মসৃন দড়ির দুই প্রান্ত বাঁধা যার ভেতর দিয়ে বিভিন্ন ওজন অবাধে গড়িয়ে চলতে পারে। [কু. বো. '১৯]

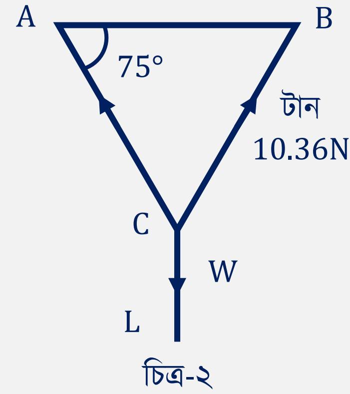
(ক) ১ নং চিত্রের ক্ষেত্রে দড়ির ভিতর দিয়ে একটি ওজন অবাধে ছেড়ে দিলে কোথায় কিভাবে ঝুলবে চিত্র অঙ্কনপূর্বক দেখাও।

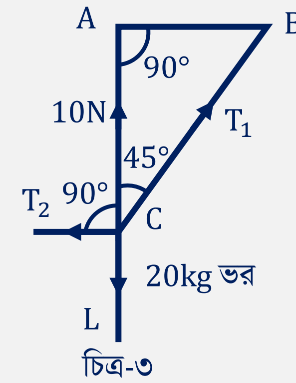
(খ) ২ নং চিত্রের ক্ষেত্রে W ওজন সাম্যঅবস্থায় থাকলে W এর মান কত নিউটন নির্ণয় কর।

(গ) ৩ নং চিত্রে C বিন্দুতে 20 kg ভরকে সাম্যঅবস্থায় ঝুলানোর জন্য T_1 এবং T_2 এর মান কত হওয়া প্রয়োজন তা নিউটন এককে নির্ণয় কর।

CQ



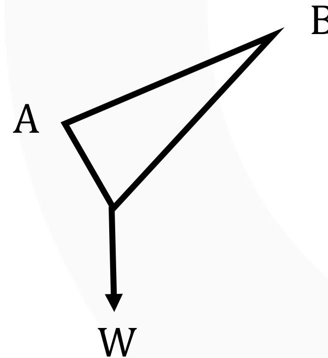




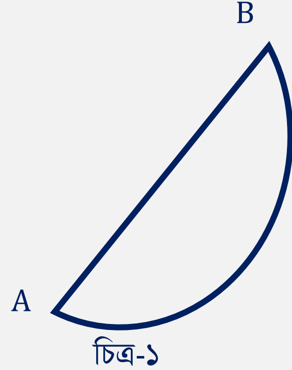
প্রতিটি চিত্রে A ও B বিন্দুতে হালকা মসৃন দড়ির দুই প্রান্ত বাঁধা যার ভেতর দিয়ে বিভিন্ন ওজন অবাধে গড়িয়ে চলতে পারে। [কু. বো. '১৯]

ক. 1 নং চিত্রের ক্ষেত্রে দড়ির ভিতর দিয়ে একটি ওজন অবাধে ছেড়ে দিলে কোথায় কিভাবে ঝুলবে চিত্র অঙ্কনপূর্বক দেখাও।

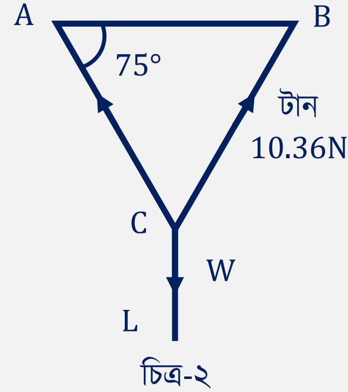
১নং চিত্রে দড়ির ভিতর দিয়ে W ওজন অবাধে ছেড়ে দিলে সেটা A এর দিকে ঝুলে থাকবে



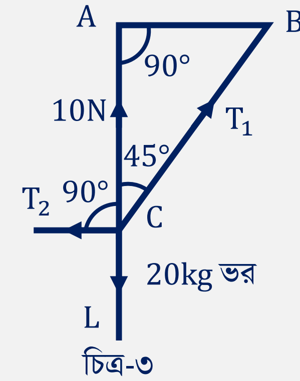
CQ



চিত্র-১



চিত্র-২



চিত্র-৩

প্রতিটি চিত্রে A ও B বিন্দুতে হালকা মসৃন দড়ির দুই প্রান্ত বাঁধা যার ভেতর দিয়ে বিভিন্ন ওজন অবাধে গড়িয়ে চলতে পারে। [কু. বো. '১৯]

খ. 2 নং চিত্রের ক্ষেত্রে W ওজন সাম্যঅবস্থায় থাকলে W এর মান কত নিউটন নির্ণয় কর।

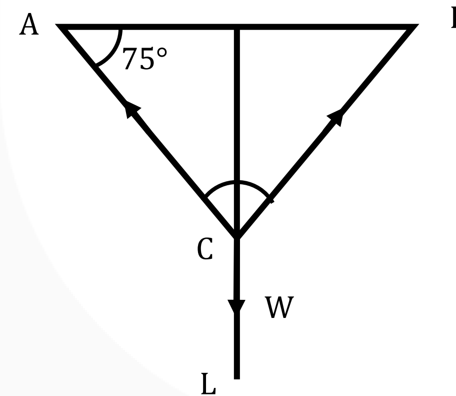
এখানে AC=BC হওয়ায় $\angle ABC = \angle BAC = 75°$

অতএব $\angle ACB = 180^0 - (75^0 \times 2) = 30°.$

CD লম্ব AB হলে $\angle ACD = \angle BCD = 15°.$

এখনে বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে ।

লামির উপপাদ্য অনুসারে , $\frac{W}{\sin \angle ACB} = \frac{10.36}{\sin \angle ACL}$

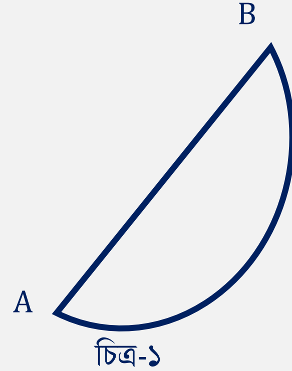


$x + x + 30 = 180$

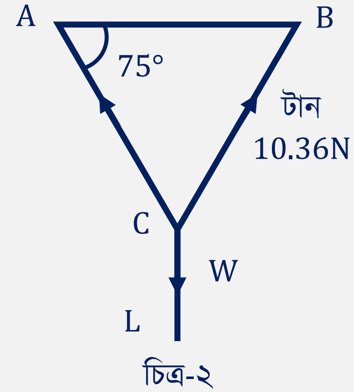
$\Rightarrow 2x = 150$

$\Rightarrow x = 75$

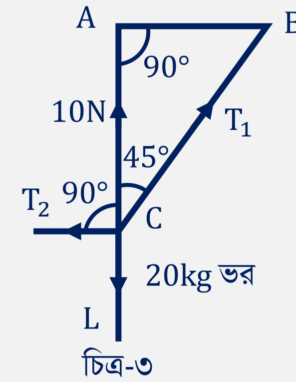
CQ



চিত্র-১



চিত্র-২



চিত্র-৩

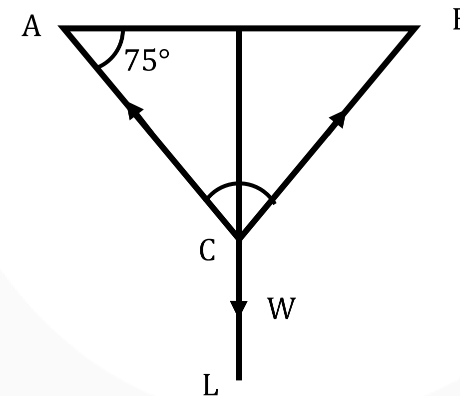
প্রতিটি চিত্রে A ও B বিন্দুতে হালকা মসৃন দড়ির দুই প্রান্ত বাঁধা যার ভেতর দিয়ে বিভিন্ন ওজন অবাধে গড়িয়ে চলতে পারে। [কু. বো. '১৯]

খ. 2 নং চিত্রের ক্ষেত্রে W ওজন সাম্যঅবস্থায় থাকলে W এর মান কত নিউটন নির্ণয় কর।

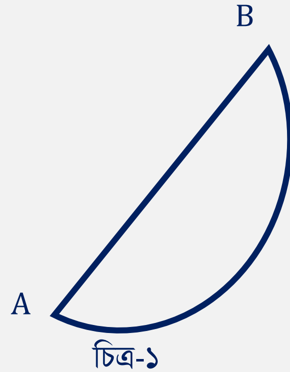
বা, $\frac{W}{sin30^0} = \frac{10.36}{\sin(180^0 - 15^0)}$

বা, $\frac{W}{\frac{1}{2}} = \frac{10.36}{sin165^0}$

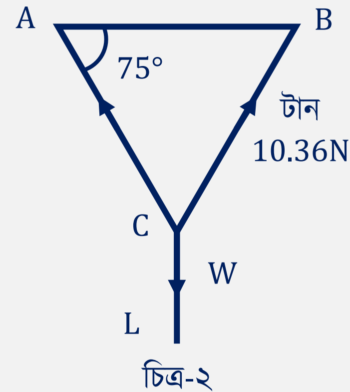
$\therefore W = 20.01\ N$



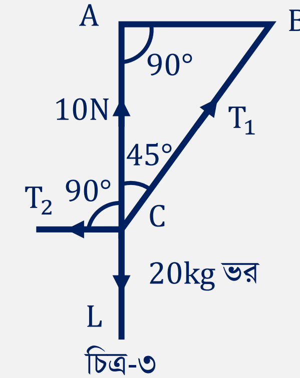
CQ



চিত্র-১



চিত্র-২



চিত্র-৩

প্রতিটি চিত্রে A ও B বিন্দুতে হালকা মসৃণ দড়ির দুই প্রান্ত বাঁধা যার ভেতর দিয়ে বিভিন্ন ওজন অবাধে গড়িয়ে চলতে পারে। [কু. বো. '১৯]

গ. ৩ নং চিত্রে C বিন্দুতে 20 kg ভরকে সাম্যঅবস্থায় ঝুলানোর জন্য $\boldsymbol{T_1}$ এবং $\mathbf{T_2}$ এর মান কত হওয়া প্রয়োজন তা নিউটন এককে নির্ণয় কর।

CA বরাবর বলের পরিমাণ 10N

CL বরাবর বলের পরিমাণ $(20 \times 9.8) = 196N$

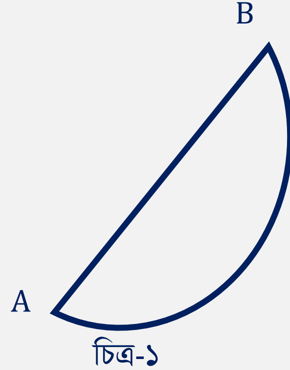
C বিন্দুতে যে বরাবর T_2 বল প্রয়োগ করা হয়েছে সে বরাবর বলের লম্বাংশ সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

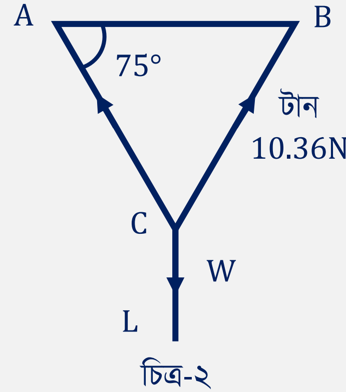
$$T_2 \cos^0 + 196\, cos90^0 + \boldsymbol{T_1} \cos\{90^0 + (180^0 - 45^0)\} + 10cos270^0 = 0$$

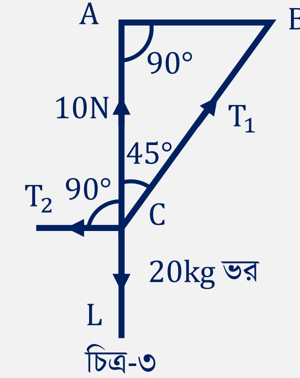
বা, $T_2 + 0 + \boldsymbol{T_1} cos225^0 + 0 = 0$

বা, $T_2 - \frac{\boldsymbol{T_1}}{\sqrt{2}} = 0$

CQ







প্রতিটি চিত্রে A ও B বিন্দুতে হালকা মসৃন দড়ির দুই প্রান্ত বাঁধা যার ভেতর দিয়ে বিভিন্ন ওজন অবাধে গড়িয়ে চলতে পারে। [কু. বো. '১৯]

গ. ৩ নং চিত্রে C বিন্দুতে 20 kg ভরকে সাম্যঅবস্থায় ঝুলানোর জন্য T_1 এবং T_2 এর মান কত হওয়া প্রয়োজন তা নিউটন এককে নির্ণয় কর।

$\therefore T_2 = \frac{T_1}{\sqrt{3}}$........................(1)

আবার, $T_2 \sin^0 + 196 \sin 90^0 + T_1 \sin\{90^0 + (180^0 - 45^0)\} + 10 \cos 270^0 = 0$

বা, $0 + 196 \times 1 + T_1 sin225^0 - 10 = 0$

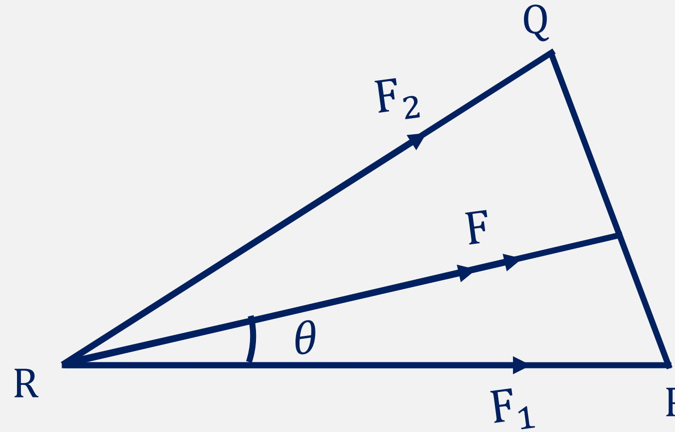
বা, $186 - \frac{T_1}{\sqrt{2}} = 0$ $\therefore T_1 = 186\sqrt{2}$

(1) নং হতে পাই, $T_2 = \frac{186\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 186$ নির্ণেয় মান : $T_1 = 186\sqrt{2}N, \quad T_2 = 186N$

CQ

দৃশ্যকল্প-১: 16N ও 12N দুটি সমমুখী সমান্তরাল বল একটি কঠিন বস্তুর ওপর যথাক্রমে L ও M বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে।

দৃশ্যকল্প-২:



$\frac{CB}{CA} \rightarrow sin$

[চ. বো. '১৯]

(ক) কোন বিন্দুতে 1, 2 এবং $\sqrt{3}$ একক বলত্রয় ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। বল গুলোর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো।

(খ) দৃশ্যকল্প-২ এ $F_1 \propto \cos P$, $F_2 \propto \cos Q$ এবং $F_1 . F_2$ এর লব্ধি F হলে দেখাও যে, $R - \theta = \frac{1}{2}(R + Q - P)$

(গ) দৃশ্যকল্প-১ হতে বলদ্বয় অবস্থান বিনিময় করলে LM বরাবর তাদের লব্ধির স্বরণ নির্ণয় করো।

CQ

(ক) কোন বিন্দুতে 1, 2 এবং $\sqrt{3}$ একক বলত্রয় ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। বল গুলোর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো।

1, 2 এবং $\sqrt{3}$ একক বলত্রয় ভারসাম্য সৃষ্টি করে।

1, 2 একক বলদ্বয়ের লব্ধি $\sqrt{3}$ একক

$\therefore 1^2 + 2^2 + 2.1.2\cos\alpha = (\sqrt{3})^2$

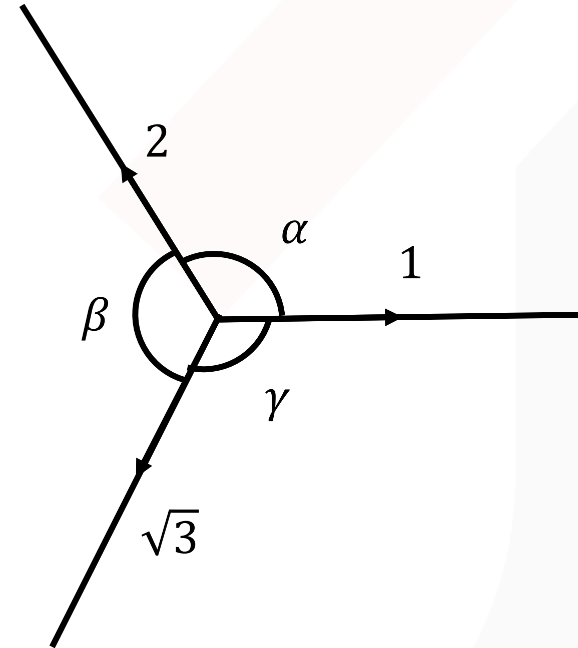
বা, $5 + 4\cos\alpha = 3$

বা, $4\cos\alpha = -2$

বা, $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$

বা, $\cos\alpha = \cos 120°$

বা, $\alpha = 120°$



CQ

(ক) কোন বিন্দুতে 1, 2 এবং $\sqrt{3}$ একক বলত্রয় ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে। বল গুলোর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো।

আবার, 2,$\sqrt{3}$ একক বলদ্বয়ের লব্ধি 1 একক।

$\therefore 2^2 + (\sqrt{3})^2 + 2.2.\sqrt{3}\cos\beta = 1$

বা, $7 + 4\sqrt{3}\cos\beta = 1$

বা, $4\sqrt{3}\cos\beta = -6$

বা, $\cos\beta = \frac{-6}{4\sqrt{3}}$

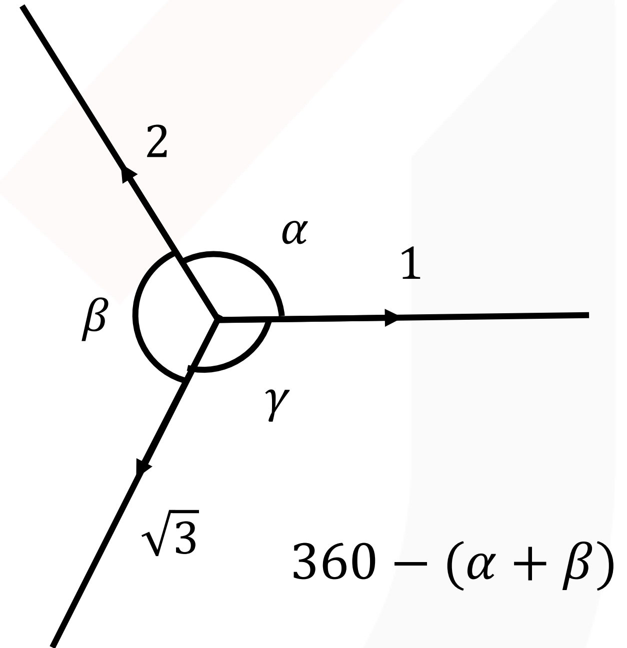
বা, $\cos\beta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

বা, $\cos\beta = cos\,150\,°$

বা, $\beta = 150°$

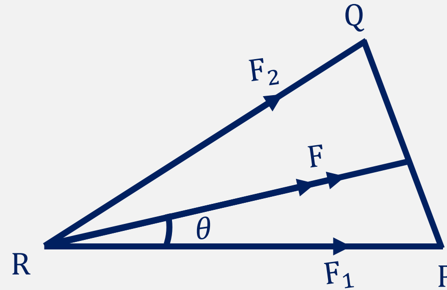
$\therefore \gamma = 360° - 120° - 150° = 90°$

$\therefore$ বলগুলোর মধ্যবর্তী কোণ গুলো হলোঃ $120°,\ 150°,\ 90°$



CQ

দৃশ্যকল্প-২:



[চ. বো. '১৯]

(খ) দৃশ্যকল্প-২ এ $F_1 \propto \cos P$, $F_2 \propto \cos Q$ এবং $F_1 . F_2$ এর লব্ধি F হলে দেখাও যে, $R - \theta = \frac{1}{2}(R + Q - P)$

দেয়া আছে,

$F_1 \propto \cos P$

বা, $F_1 = k \cos P$

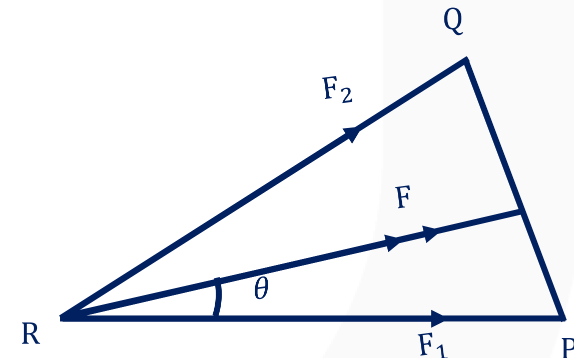
এবং $F_2 \propto \cos Q$

বা, $F_2 = k \cos Q$

F_1 ও F_2 এর লব্ধি F হলে,

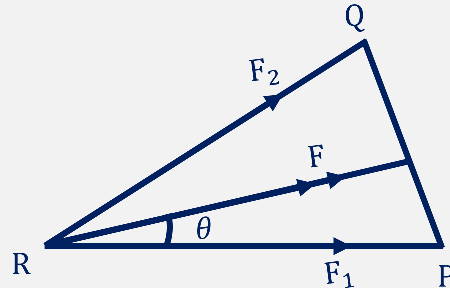
$\therefore F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 . F_2 . \cos R$

$= k^2 \cos^2 P + k^2 \cos^2 Q + 2. k \cos P . k \cos Q . \cos R$



CQ

দৃশ্যকল্প-২:



[চ. বো. '১৯]

(খ) দৃশ্যকল্প-২ এ $F_1 \propto \cos P$, $F_2 \propto \cos Q$ এবং $F_1 . F_2$ এর লব্ধি F হলে দেখাও যে, $R - \theta = \frac{1}{2}(R + Q - P)$

$= K^2(\cos^2 P + \cos^2 Q + 2.\cos P.\cos Q.\cos R)$

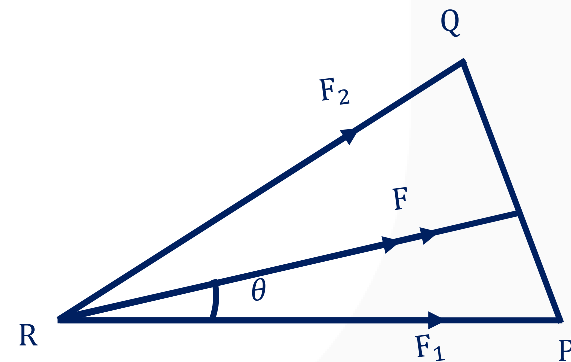
বা, $F^2 = k^2 \sin^2 R$

$[\because \cos^2 P + \cos^2 Q + \cos^2 R + 2.\cos P.\cos Q.\cos R = 1]$

বা, $F = k \sin R$

F_1 ও F_2 এর মধ্যবর্তী কোণ θ

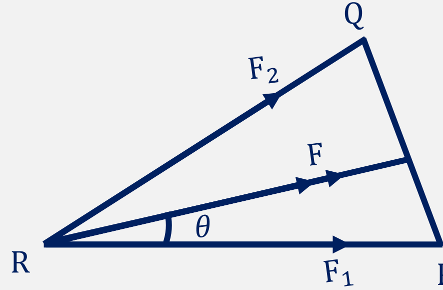
$\therefore F_2$ ও F এর মধ্যবর্তী কোণ $R - \theta$



ত্রিভুজের sine সূত্রানুসারে , $\frac{F_1}{\sin(R-\theta)} = \frac{F}{\sin R}$

CQ

দৃশ্যকল্প-২:



[চ. বো. ’১৯]

(খ) দৃশ্যকল্প-২ এ $F_1 \propto \cos P$, $F_2 \propto \cos Q$ এবং $F_1.F_2$ এর লব্ধি F হলে দেখাও যে, $R - \theta = \frac{1}{2}(R + Q - P)$

বা, $\frac{k\cos P}{\sin(R-\theta)} = \frac{k\sin R}{\sin R}$

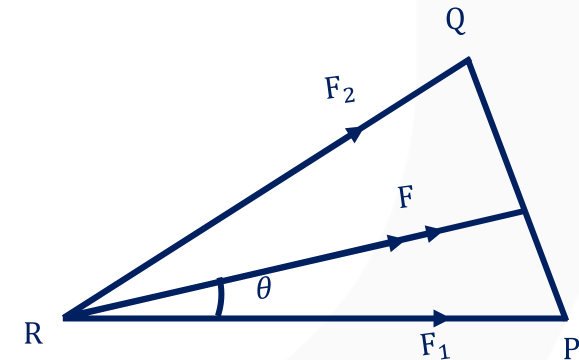
বা, $\frac{\cos P}{\sin(R-\theta)} = 1$

বা, $\sin(R - \theta) = \cos P$

বা, $\sin(R - \theta) = \sin(\frac{\pi}{2} - P)$

বা, $R - \theta = \frac{\pi}{2} - P = \frac{P+Q+R}{2} - P = \frac{P+Q+R-2P}{2} = \frac{Q+R-P}{2}$

$\therefore R - \theta = \frac{1}{2}(R + Q - P)$ (দেখানো হলো)



CQ

দৃশ্যকল্প-১:

16N ও 12N দুটি সমমুখী সমান্তরাল বল একটি কঠিন বস্তুর ওপর যথাক্রমে L ও M বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে।

[চ. বো. '১৯]

(গ) দৃশ্যকল্প-১ হতে বলদ্বয় অবস্থান বিনিময় করলে LM বরাবর তাদের লব্ধির স্বরণ নির্ণয় করো।

L বিন্দুতে 16N বল এবং M বিন্দুতে12N বলের লব্ধি N বিন্দুতে,

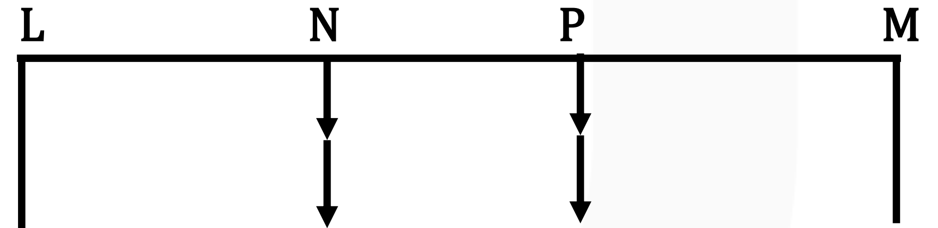
$\therefore 16N.LN = 12\,MN$

বা, $\frac{MN}{LN} = \frac{16}{12}$

বা, $\frac{MN+LN}{\mathrm{LN}} = \frac{16+12}{12}$

বা, $\frac{ML}{LN} = \frac{7}{3}$

বা, $LN = \frac{3ML}{7}$



CQ

দৃশ্যকল্প-১:

16N ও 12N দুটি সমমুখী সমান্তরাল বল একটি কঠিন বস্তুর ওপর যথাক্রমে L ও M বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে। [চ. বো. '১৯]

(গ) দৃশ্যকল্প-১ হতে বলদ্বয় অবস্থান বিনিময় করলে LM বরাবর তাদের লব্ধির স্বরণ নির্ণয় করো।

আবার, L বিন্দুতে 12N এবং M বিন্দুতে 16N বলের লব্ধি P বিন্দুতে

$\therefore 12PL = 16PM$

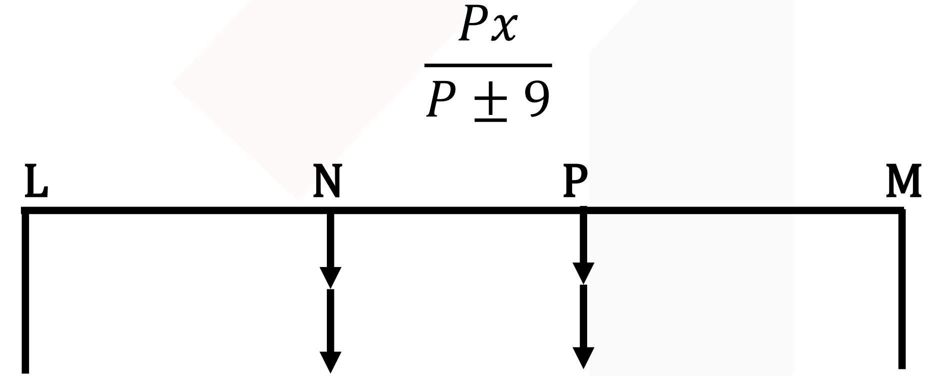
বা, $\frac{PM}{PL} = \frac{12}{16}$

বা, $\frac{PM+PL}{PL} = \frac{12+16}{16}$

বা, $\frac{LM}{PL} = \frac{28}{16}$

বা, $\frac{LM}{PL} = \frac{7}{4}$

$\frac{Px}{P \pm 9}$



CQ

দৃশ্যকল্প-১:

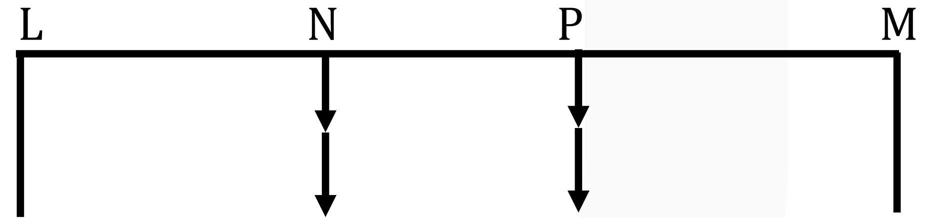
16N ও 12N দুটি সমমুখী সমান্তরাল বল একটি কঠিন বস্তুর ওপর যথাক্রমে L ও M বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে। [চ. বো. '১৯]

(গ) দৃশ্যকল্প-১ হতে বলদ্বয় অবস্থান বিনিময় করলে LM বরাবর তাদের লব্ধির স্বরণ নির্ণয় করো।

বা, $PL = \frac{4LM}{7}$

লব্ধি সরন $= PL - LN$

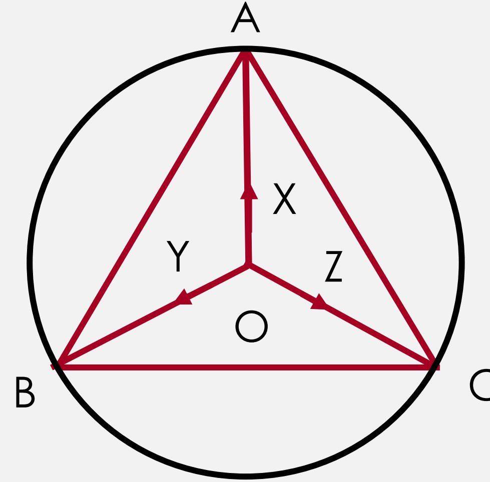
$= \frac{4LM}{7} - \frac{3LM}{7} = \frac{LM}{7}$



∴ লব্ধি LM বরাবর $\frac{1}{7}$LM একক দূরে সরে যাবে।

CQ

O হলো বৃত্তটির কেন্দ্র।



[সি. বো. '১৯]

(ক) S মানের দুইটি সমান বল পরস্পর 120 ডিগ্রি কোণে ক্রিয়ারত হলে, এদের লব্ধির মান নির্ণয় কর।

(খ) X, Y, Z বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকলে দেখাও যে, $X : Y : Z = a\cos A : b\cos B : c\cos C$.

(গ) যদি X, Y, Z মানের বলত্রয় যথাক্রমে A, B, C বিন্দুতে সদৃশ সমান্তরালভাবে ক্রিয়া করে, তবে এদের লব্ধি O বিন্দুগামী হয়। দেখাও যে, $X\ cosec\ 2A = Y\ cosec\ 2B = Z\ cosec\ 2C$.

CQ

(ক) S মানের দুইটি সমান বল পরস্পর 120 ডিগ্রি কোণে ক্রিয়ারত হলে, এদের লব্ধির মান নির্ণয় কর।

এখানে সমান বলদ্বয় S, যাদের অন্তর্গত কোণ 120°

$$\therefore \text{বলদ্বয়ের লব্ধির মান} = \sqrt{S^2 + S^2 + 2.S.S.\cos 120^\circ}$$

$$= \sqrt{2S^2 + 2S^2\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

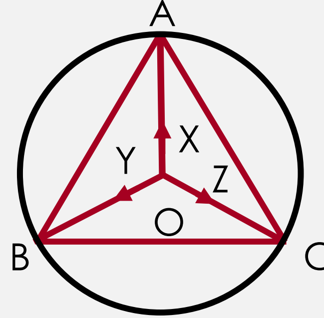
$$= \sqrt{2S^2 - S^2}$$

$$= \sqrt{S^2} = S$$

নির্ণেয় লব্ধির মান S.

CQ

O হলো বৃত্তটির কেন্দ্র।



[সি. বো. '১৯]

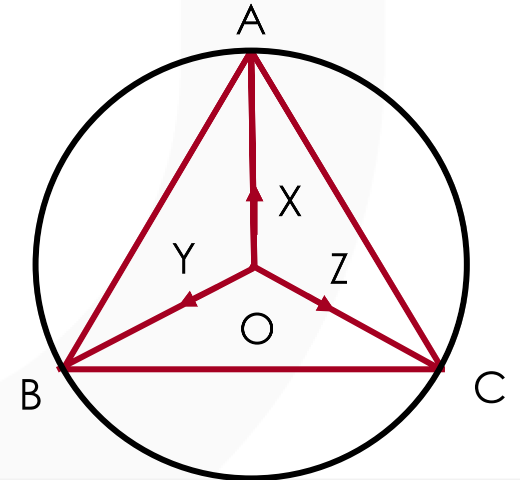
(খ) X, Y, Z বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকলে দেখাও যে, $X : Y : Z = a\cos A : b\cos B : c\cos C$.

এখানে, OA, OB, OC বরাবর ক্রিয়ারতও বলত্রয় যথাক্রমে X, Y, Z সাম্যাবস্থায় আছে। লামির উপপাদ্য অনুযায়ী,

$$\frac{X}{\sin BOC} = \frac{Y}{\sin AOC} = \frac{Z}{\sin AOB}$$

বা, $\frac{X}{\sin 2A} = \frac{Y}{\sin 2B} = \frac{Z}{\sin 2C}$ [∵ কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

বা, $\frac{X}{2\sin A\cos A} = \frac{Y}{2\sin B\cos B} = \frac{Z}{2\sin C\cos C}$



CQ

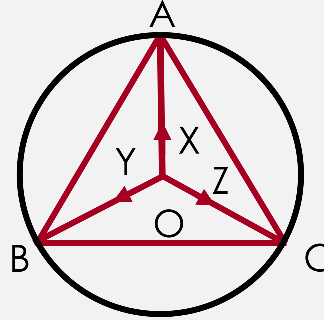
বা, $\frac{X}{\frac{a}{k}\cos A} = \frac{Y}{\frac{b}{k}\cos B} = \frac{Z}{\frac{c}{k}\cos C}$

[$\triangle ABC$ এ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = K$ (ধরি)]

বা, $\frac{X}{a\cos A} = \frac{Y}{b\cos B} = \frac{Z}{c\cos C}$ $\therefore X:Y:Z = a\cos A : b\cos B : c\cos C$. (দেখানো হলো)

CQ

O হলো বৃত্তটির কেন্দ্র।



[সি. বো. '১৯]

(গ) যদি X, Y, Z মানের বলত্রয় যথাক্রমে A, B, C বিন্দুতে সদৃশ সমান্তরালভাবে ক্রিয়া করে, তবে এদের লব্ধি O বিন্দুগামী হয়। দেখাও যে,

$X \text{ cosec } 2A = Y \text{ cosec } 2B = Z \text{ cosec } 2C.$

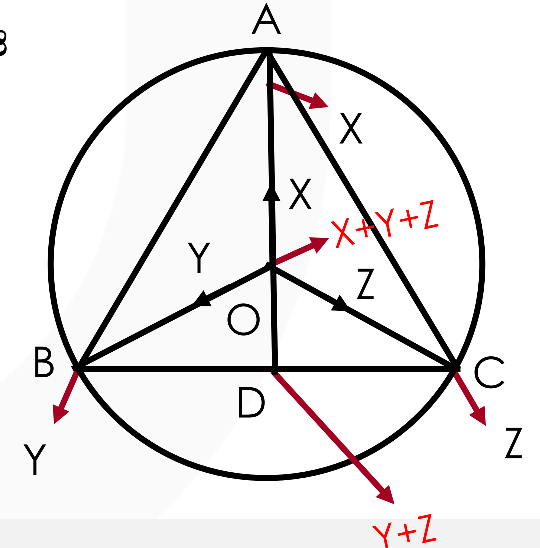
ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O। A এবং O যোগ করি যেন তা BC রেখার উপর D বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত হয়।

যেহেতু X, Y, Z সদৃশ সমান্তরাল বল তিনটির লব্ধি 'O' বিন্দুগামী এবং বল X, A বিন্দুগামী। সেহেতু B ও C বিন্দুগামী ক্রিয়াশীল Y ও Z বলের লব্ধি Y+Z অবশ্যই D বিন্দুগামী হবে।

$\therefore Y.BD = Z.CD$

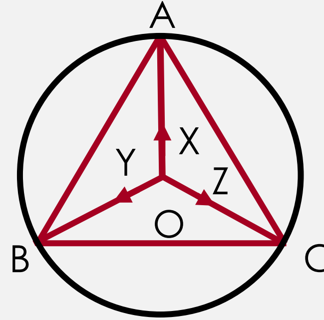
বা, $\frac{Y}{Z} = \frac{CD}{BD}$ ....(1)

$\triangle COD$ এ $\frac{CD}{\sin \angle COD} = \frac{OC}{\sin \angle CDO}$



CQ

O হলো বৃত্তটির কেন্দ্র।



[সি. বো. '১৯]

(গ) যদি X, Y, Z মানের বলত্রয় যথাক্রমে A, B, C বিন্দুতে সদৃশ সমান্তরালভাবে ক্রিয়া করে, তবে এদের লব্ধি O বিন্দুগামী হয়। দেখাও যে,

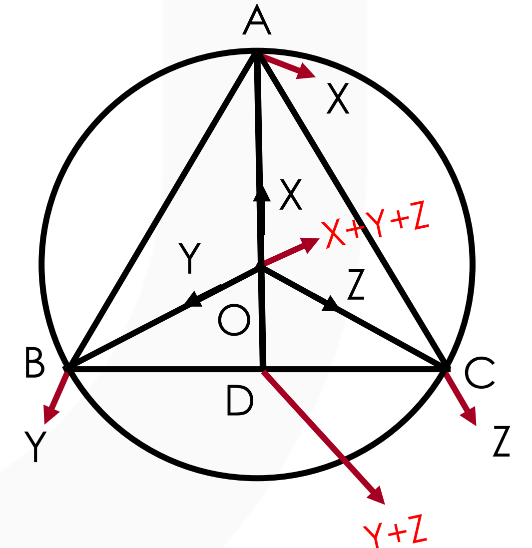
$X \text{ cosec } 2A = Y \text{ cosec } 2B = Z \text{ cosec } 2C$.

বা, $\frac{CD}{\sin \angle COD} = \frac{OC}{\sin(\pi - \angle BDO)}$ [$\because \angle BDO + \angle CDO = \pi$]

বা, $\frac{CD}{\sin \angle COD} = \frac{OB}{\sin \angle BDO}$.......(2) [$\because OB = OC$]

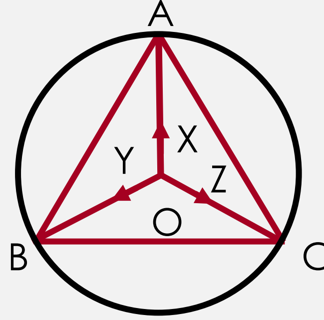
$\therefore$ ∠BOD এ $\frac{BD}{\sin \angle BOD} = \frac{OB}{\sin \angle BDO}$......(3)

(2) ও (3) নং হতে পাই, $\frac{BD}{\sin \angle BOD} = \frac{CD}{\sin \angle COD}$



CQ

O হলো বৃত্তটির কেন্দ্র।



[সি. বো. '১৯]

(গ) যদি X, Y, Z মানের বলত্রয় যথাক্রমে A, B, C বিন্দুতে সদৃশ সমান্তরালভাবে ক্রিয়া করে, তবে এদের লব্ধি O বিন্দুগামী হয়। দেখাও যে,

$X \ cosec \ 2A = Y \ cosec \ 2B = Z \ cosec \ 2C.$

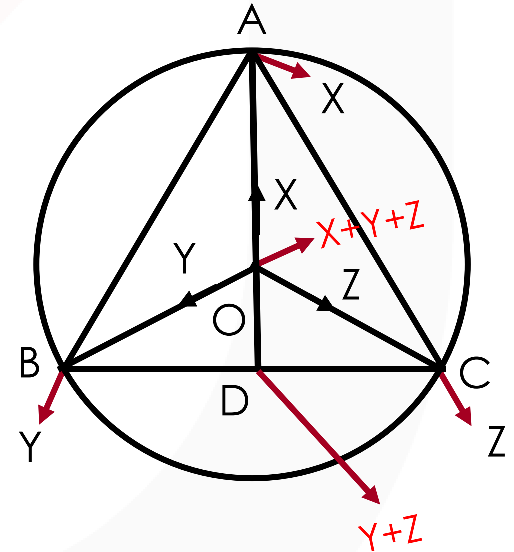
বা, $\frac{CD}{BD} = \frac{\sin \angle COD}{\sin \angle BOD}$

বা, $\frac{CD}{BD} = \frac{\sin(\pi - \angle AOC)}{\sin(\pi - \angle AOB)}$

$= \frac{\sin \angle AOC}{\sin \angle AOB}$

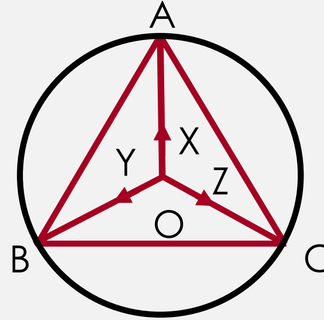
$= \frac{\sin 2B}{\sin 2C}$ [কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

$= \frac{\frac{1}{cosec 2B}}{\frac{1}{cosec 2C}} = \frac{cosec \ 2C}{cosec \ 2B}$......(4)



CQ

O হলো বৃত্তটির কেন্দ্র।



[সি. বো. '১৯]

(গ) যদি X, Y, Z মানের বলত্রয় যথাক্রমে A, B, C বিন্দুতে সদৃশ সমান্তরালভাবে ক্রিয়া করে, তবে এদের লব্ধি O বিন্দুগামী হয়। দেখাও যে,

$X\ cosec\ 2A = Y\ cosec\ 2B = Z\ cosec\ 2C.$

সমীকরণ (1) ও (4) হতে পাই,

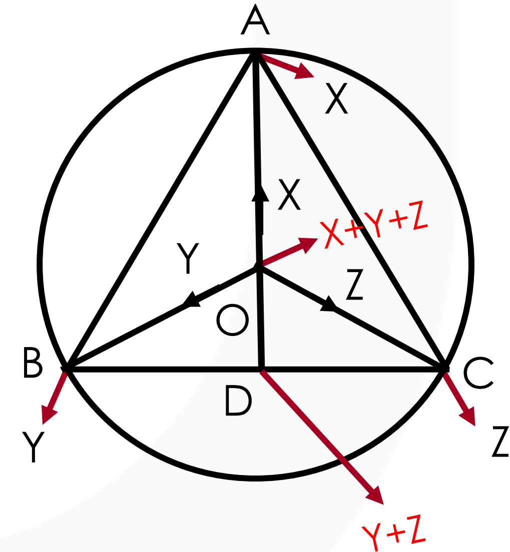
$$\frac{Y}{Z} = \frac{cosec\ 2C}{cosec\ 2B}$$

$\therefore Y\ cosec\ 2B = Z\ cosec\ 2C$ ....(5)

অনুরূপভাবে, $Z\ cosec\ 2C = X\ cosec\ 2A$.........(6)

এখন, সমীকরণ (5) ও (6) হতে পাই,

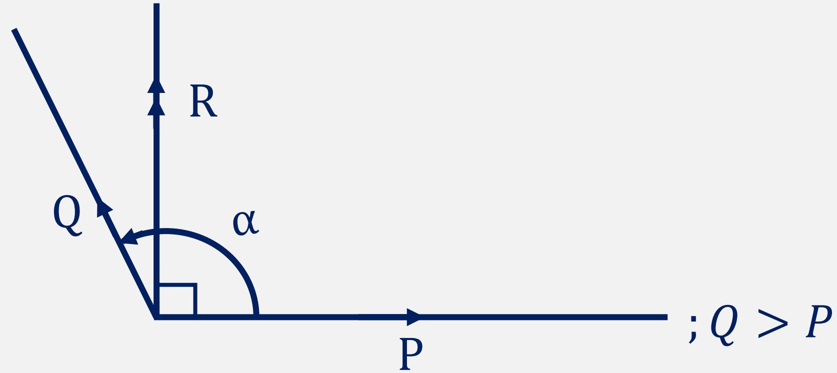
$X\ cosec\ 2A = Y\ cosec\ 2B = Z\ cosec\ 2C.$ (দেখানো হলো)



CQ

[দি. বো. '১৯]

দৃশ্যকল্প-১:



দৃশ্যকল্প-২:

17 সেন্টি-মিটার দীর্ঘ একটি সুতার প্রান্ত দয় একই আনুভূমিক রেখায় 13 সেন্টিমিটার দূরে অবস্থিত দুইটি বিন্দুতে আবদ্ধ আছে। সুতাটির এক প্রান্ত হতে 5 সেন্টিমিটার দূরে তার সাথে 3 কেজি ওজনের একটি বস্তু সংযুক্ত করা হলো।

(ক) P ও Q বলদ্বয় সমান হলে, R বল α কে সমদ্বিখণ্ডিত করে- প্রমাণ কর।

(খ) R=15N এবং P ও Q বলদ্বয়ের বৃহত্তম লব্ধি 25N হলে, বলদ্বয় নির্ণয় কর।

(গ) দৃশ্যকল্প-২ অনুযায়ী সুতাটির প্রত্যেক অংশের টান নির্ণয় কর।

CQ

(ক) P ও Q বলদ্বয় সমান হলে, R বল α কে সমদ্বিখণ্ডিত করে- প্রমাণ কর।

P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ α এবং P ও R এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে,

আমরা জানি,

যার সাথে Angel সে থাকে single

$$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$$

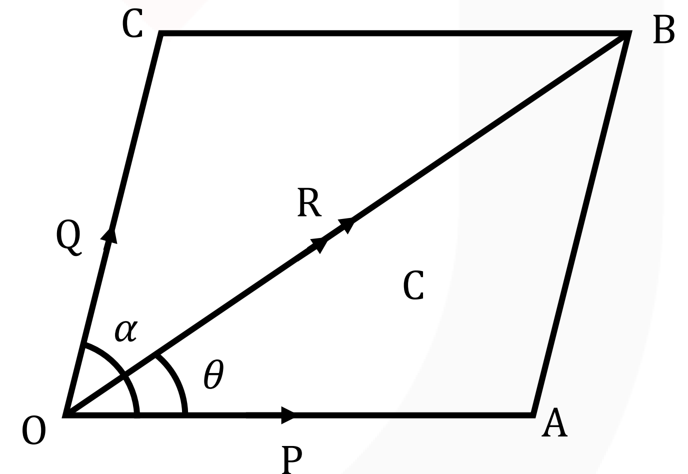
$$= \frac{P\ \sin\alpha}{P+P\cos\alpha}\ [\because P = Q]A$$

$$= \frac{\sin\alpha}{(1+\cos\alpha)} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

বা, $\tan\theta = \tan\frac{\alpha}{2}$

বা, $\theta = \frac{\alpha}{2}$

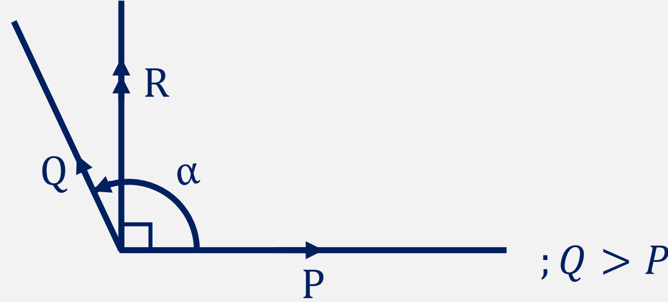
অর্থাৎ, R বল α কে সমদ্বিখণ্ডিত করে। (প্রমাণিত)



CQ

দৃশ্যকল্প-১:

[দি. বো. '১৯]



(খ) R=15N এবং P ও Q বলদ্বয়ের বৃহত্তম লব্ধি 25N হলে, বলদ্বয় নির্ণয় কর।

P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ α

দেয়া আছে, $P + Q = 25 ......(i)$

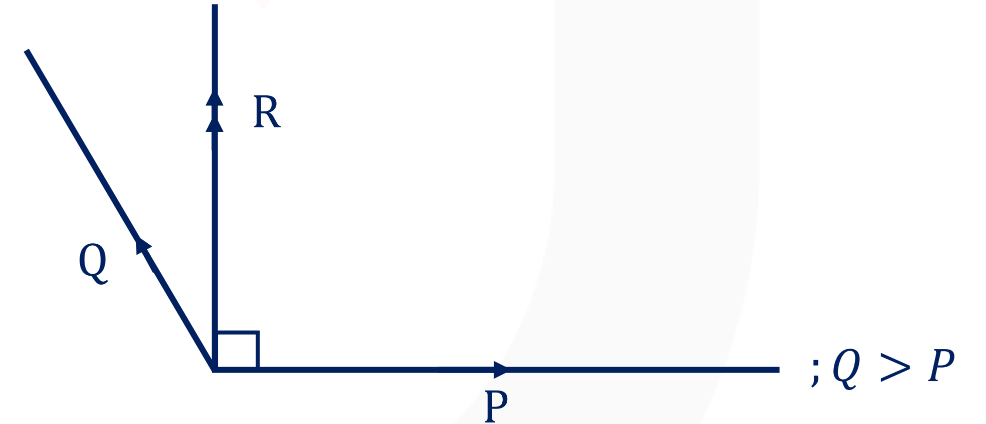
এবং R=15

এখানে, $\tan 90° = \frac{Q \sin \alpha}{P+Q \cos\alpha}$

বা, $\frac{1}{0} = \frac{Q \sin\alpha}{P+Q \cos \alpha}$

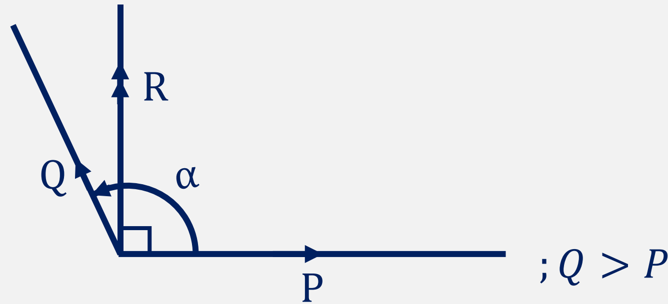
বা, $P + Q \cos \alpha = 0$

$\therefore \cos \alpha = -\frac{P}{Q}$



CQ

দৃশ্যকল্প-১:



[দি. বো. '১৯]

(খ) R=15N এবং P ও Q বলদ্বয়ের বৃহত্তম লব্ধি 25N হলে, বলদ্বয় নির্ণয় কর।

এবং $R^2 = P^2 + Q^2 + 2\,PQ\cos\alpha$

বা, $15^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\left(-\frac{P}{Q}\right)$

বা, $225 = P^2 + Q^2 - 2P^2$

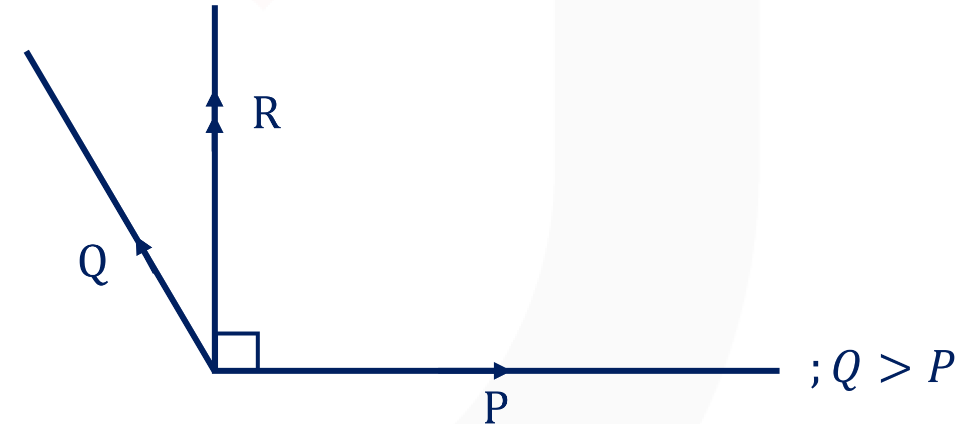
বা, $P^2 - Q^2 = 225$

বা, $(Q+P)(Q-P) = 225$

বা, $25(Q-P) = 225$ [(i)নং হতে]

$\therefore Q - P = 9$............(ii)

(i)+(ii) হতে, $2P = 16 \;\therefore P = 8$



নির্ণেয় বলদ্বয় 17N ও 8N.

CQ

দৃশ্যকল্প-২: [দি. বো. '১৯]

17 সেন্টি-মিটার দীর্ঘ একটি সুতার প্রান্ত দয় একই আনুভূমিক রেখায় 13 সেন্টিমিটার দূরে অবস্থিত দুইটি বিন্দুতে আবদ্ধ আছে। সুতাটির এক প্রান্ত হতে 5 সেন্টিমিটার দূরে তার সাথে 3 কেজি ওজনের একটি বস্তু সংযুক্ত করা হলো।

(গ) দৃশ্যকল্প-২ অনুযায়ী সুতাটির প্রত্যেক অংশের টান নির্ণয় কর।

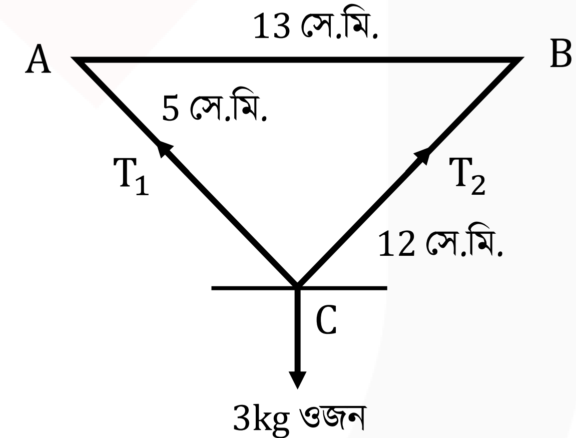
A ও B প্রান্তে 17 সে. মি. দৈর্ঘের সুতা বাধা আছে।

C বিন্দুতে ৩ কেজি ওজন ঝুলানো আছে।

AB= 13 সে.মি., AC=5 সে.মি., BC= 17-5 = 12 সে.মি.

ধরি, CA অংশের টান T_1 এবং CB অংশের টান T_2

∴ বলত্রয় ভারসাম্য সৃষ্টি করে।



লামির সূত্রানুসারে, $\frac{T_1}{\sin(90°+B)} = \frac{T_2}{\sin(90°+A)} = \frac{3kg}{\sin C}$

বা, $\frac{T_1}{\sin B} = \frac{T_2}{\sin A} = \frac{3kg}{\sin 90°}$ [ABC সমকোণী ত্রিভুজে $C = 90°$]

CQ

দৃশ্যকল্প-২: [দি. বো. '১৯]

17 সেন্টি-মিটার দীর্ঘ একটি সুতার প্রান্ত দয় একই আনুভূমিক রেখায় 13 সেন্টিমিটার দূরে অবস্থিত দুইটি বিন্দুতে আবদ্ধ আছে। সুতাটির এক প্রান্ত হতে 5 সেন্টিমিটার দূরে তার সাথে 3 কেজি ওজনের একটি বস্তু সংযুক্ত করা হলো।

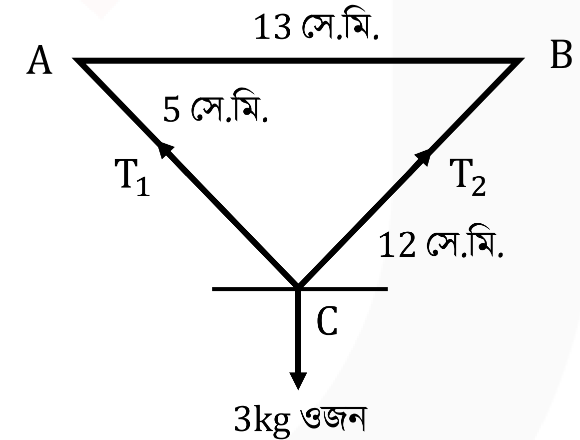
(গ) দৃশ্যকল্প-২ অনুযায়ী সুতাটির প্রত্যেক অংশের টান নির্ণয় কর।

$$\therefore \; T_1 = 3\,kg \times \sin B \;\; [\because \sin 90° = 1]$$

$$= 3\,kg \times \frac{5}{13} = \frac{15kg}{13}$$

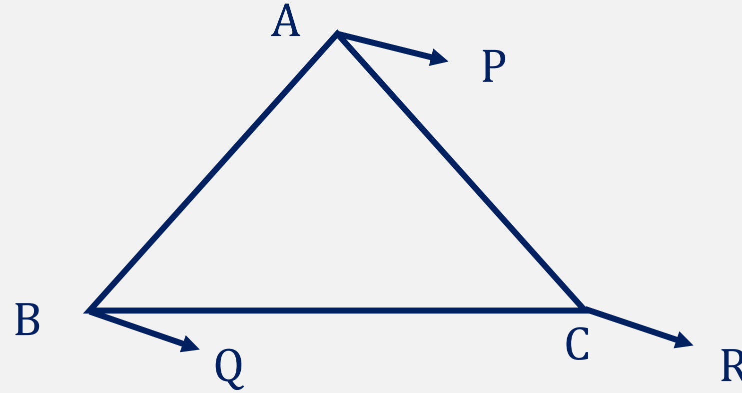
$$T_2 = 3\,kg \times \sin A$$

$$= 3\,kg \times \frac{12}{13} = \frac{16kg}{13}$$



টানদ্বয় $\frac{15}{13}$ কেজি ওজন এবং $\frac{16}{13}$ কেজি ওজন।

CQ



P,Q,R বলত্রয় সমান্তরালভাবে ক্রিয়ারত।

[ঢা. য. সি. দি. বো. '১৯]

(ক) 60 ডিগ্রি কোণে ক্রিয়ারত দুটি সমান বলের লব্ধি কত ?

(খ) বলত্রয়ের লব্ধি ΔABC এর অন্ত:কেন্দ্রগামী হলে দেখাও যে, $P:Q:R = \sin A:\sin B:\sin C$

(গ) বলত্রয়ের লব্ধি ΔABC এর ভরকেন্দ্রগামী হলে, P,Q এবং R বল এর মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করো.

CQ

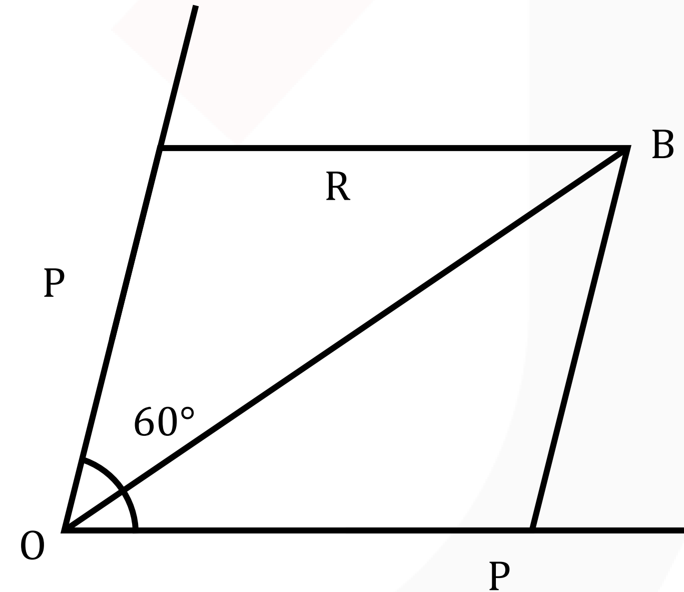
(ক) 60 ডিগ্রি কোণে ক্রিয়ারত দুটি সমান বলের লব্ধি কত ?

মনে করি , P একক মানের দুইটি সমান বলে O বিন্দুতে পরস্পর 60°কোনে ক্রিয়ারত। এই বলদুটির লব্ধি R একক হলে বলের সামান্তরিক সূত্রানুসারে আমরা পাই,

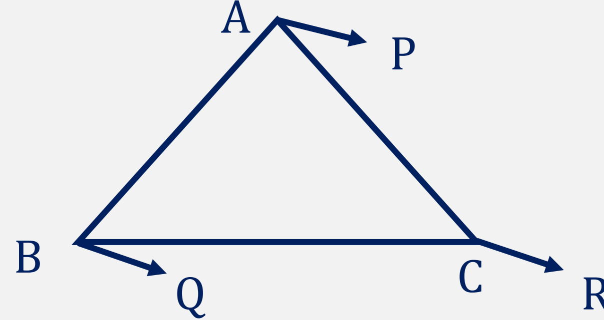
$$R^2 = p^2 + P^2 + 2.P.P\ \cos 60^0$$

বা, $R = \sqrt{2P^2 + 2P^2 . \frac{1}{2}}$

বা, $R = \sqrt{2P^2 + P^2} = \sqrt{3P^2} = \sqrt{3}P$ একক



CQ

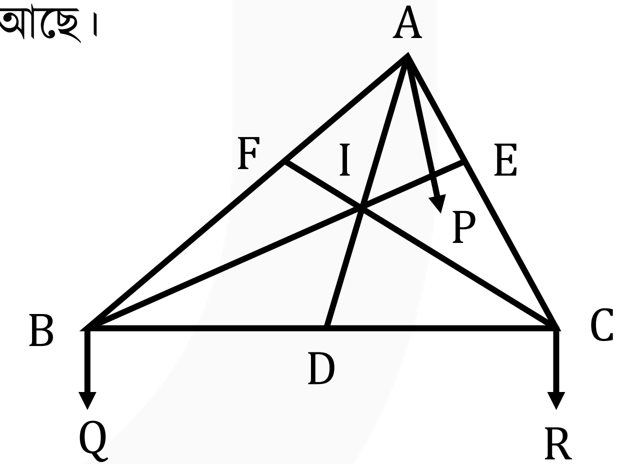


P,Q,R বলত্রয় সমান্তরালভাবে ক্রিয়ারত।

[ঢা. য. সি. দি. বো. '১৯]

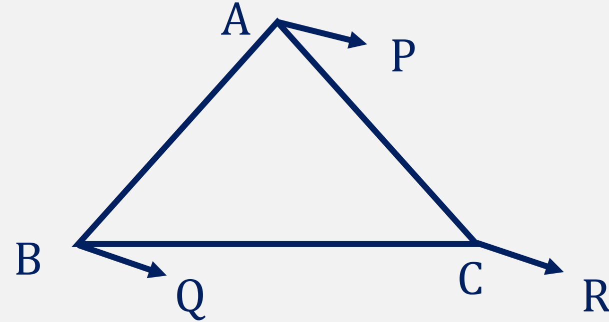
(খ) বলত্রয়ের লব্ধি ΔABC এর অন্ত:কেন্দ্রগামী হলে দেখাও যে, $P:Q:R = \sin A:\sin B:\sin C$

ABC ত্রিভুজ এর A,B,C বিন্দুতে যথাক্রমে P,Q,R মানের তিনটি সমমুখি সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত আছে।



A,B,C কোনগুলো অন্ত:দ্বিখন্ডক তিনটি পরস্পর I বিন্দুতে ছেদ করেছে । তাহলে, I হলো ABC ত্রিভূজের অন্তকেন্দ্র এখন B ও C বিন্দুতে ক্রিয়ারত Q ও R বলের লব্ধি (Q+R) বলটি BC রেখাস্ত D বিন্দুতে ক্রিয়া করবে। আবার বল তিনটির লব্ধি অন্তকেন্দ্র I কেন্দ্রগামি ।সুতরাং I বিন্দু AD রেখার উপর অবস্থান করবে। অর্থাৎ AD রেখা A কোণ কে সমদ্বিখণ্ডিত করবে ।

CQ



P,Q,R বলত্রয় সমান্তরালভাবে ক্রিয়ারত। [ঢা. য. সি. দি. বো. '১৯]

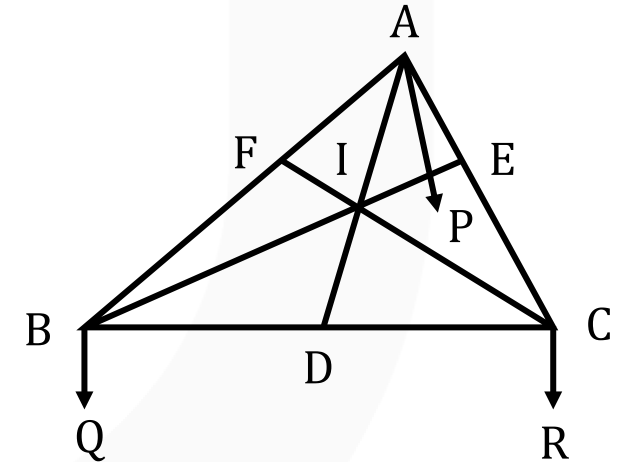
(খ) বলত্রয়ের লব্ধি ΔABC এর অন্ত:কেন্দ্রগামী হলে দেখাও যে, $P:Q:R = \sin A : \sin B : \sin C$

$\therefore \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ ……………………….....(i)

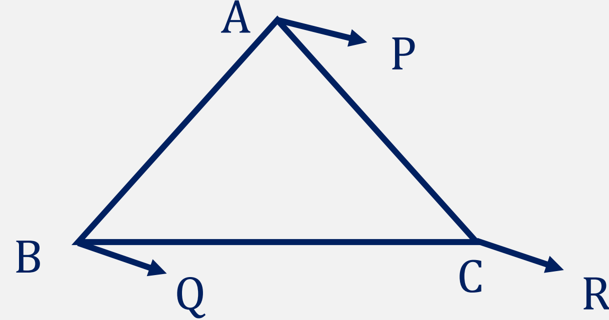
কিন্তু লব্ধি D বিন্দুগামি হাওয়ায় , Q. BD = R.CD

বা, $\frac{BD}{CD} = \frac{R}{Q}$..........................(ii)

(i)ও (ii) হতে পাই, $\frac{R}{Q} = \frac{AB}{AC}$ বা, $\frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}$



CQ



P,Q,R বলত্রয় সমান্তরালভাবে ক্রিয়ারত।

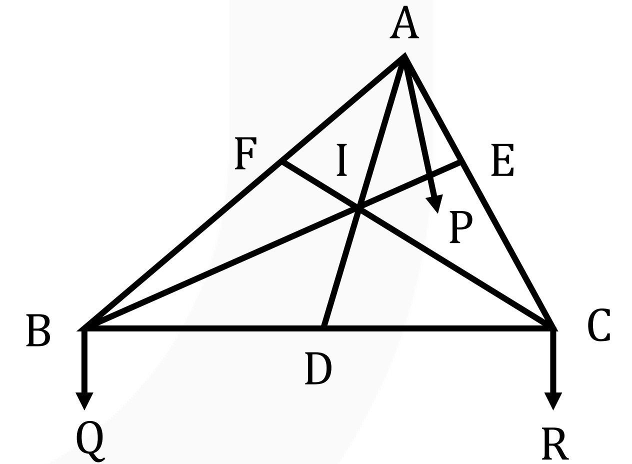
[ঢা. য. সি. দি. বো. '১৯]

(খ) বলত্রয়ের লব্ধি ΔABC এর অন্ত:কেন্দ্রগামী হলে দেখাও যে, $P:Q:R = \sin A:\sin B:\sin C$

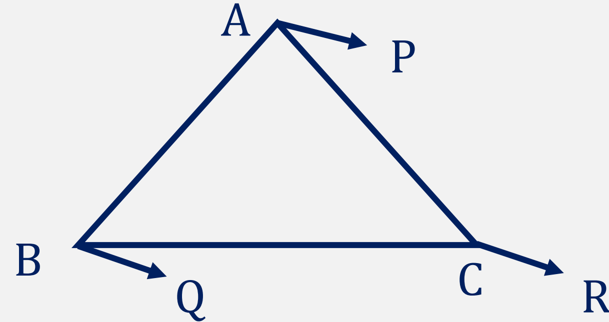
অনুরূপ ভাবে প্রমাণ করা যায় যে , $\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC}$

$\therefore \frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}$

বা, $\frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c}$ ....(iii)



CQ



P,Q,R বলত্রয় সমান্তরালভাবে ক্রিয়ারত। [ঢা. য. সি. দি. বো. '১৯]

(খ) বলত্রয়ের লব্ধি ΔABC এর অন্ত:কেন্দ্রগামী হলে দেখাও যে, $P: Q: R = \sin A: \sin B: \sin C$

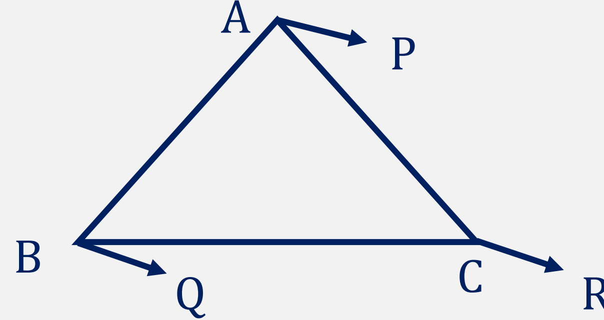
আবার ত্রিভুজ ABC হতে সাইন সূত্রের সাহায্যে পাই,

$\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{SinC}$ ....(iv)

(iii) ও (iv) হতে পাই , $\frac{P}{SinA} = \frac{Q}{SinB} = \frac{R}{SinC}$

:. P : Q : R = Sin A : sin B : sinC (দেখানো হলো)

CQ



P,Q,R বলত্রয় সমান্তরালভাবে ক্রিয়ারত। [ঢা. য. সি. দি. বো. '১৯]

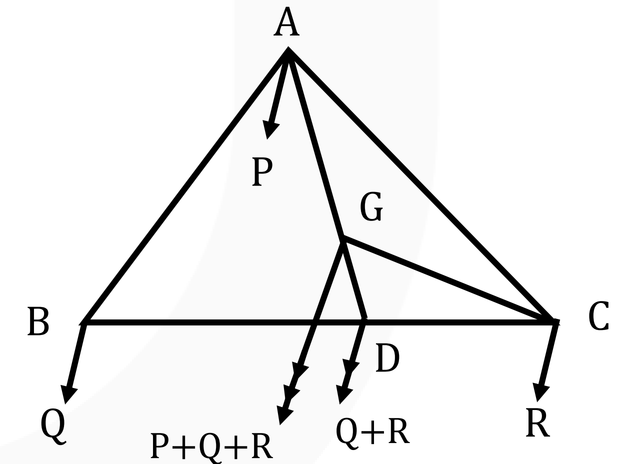
(গ) বলত্রয়ের লব্ধি ΔABC এর ভরকেন্দ্রগামী হলে, P,Q এবং R বল এর মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করো.

মনে করি , ABC ত্রিভূজের A,B,C বিন্দু তিনটি কৌণিক বিন্দুতে P,Q,R সমমুখি সমান্তরাল বলগুলি ক্রিয়াশীল । এদের লব্ধি এই ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র এ ক্রিয়ারত ।যেহেতু A বিন্দুতে P বল এবং G বিন্দুতে লব্ধি বল R+P+Q ক্রিয়াশীল সুতরাং , B ও C বিন্দুতে ক্রিয়ারত Q ও R সমান্তরাল বল গুলোর লব্ধি BC ও AGD - এর ছেদ বিন্দু D তে ক্রিয়া করবে

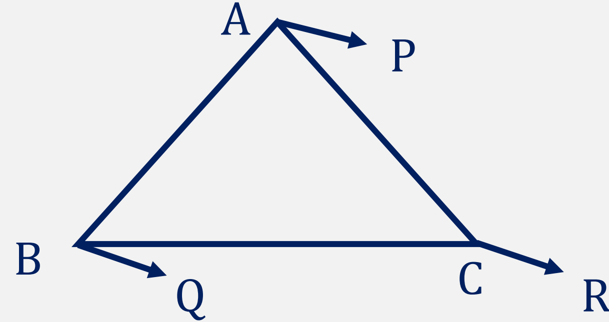
$\therefore Q.BD = R.CD$..............(i)

যেহেতু AD মধ্যমা

$\therefore BD = CD$..................(ii)



CQ



P,Q,R বলত্রয় সমান্তরালভাবে ক্রিয়ারত।

[ঢা. য. সি. দি. বো. '১৯]

(গ) বলত্রয়ের লব্ধি ΔABC এর ভরকেন্দ্রগামী হলে, P,Q এবং R বল এর মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করো.

(i)÷ (ii) করে পাই,

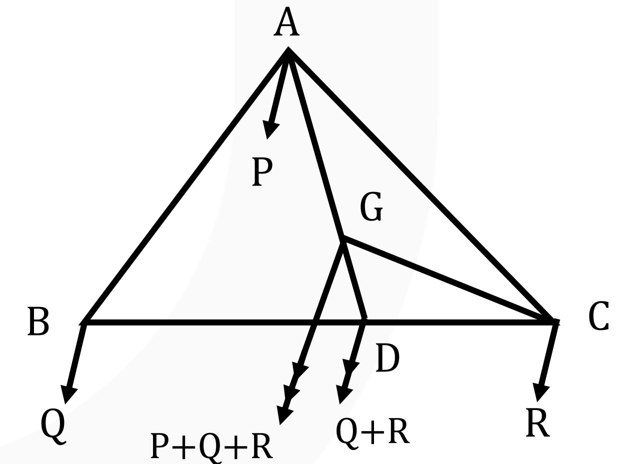
$Q = R$.......... iii

অনুরূপ ভাবে প্রমাণ করা যায় যে ,

$P = Q$ iv

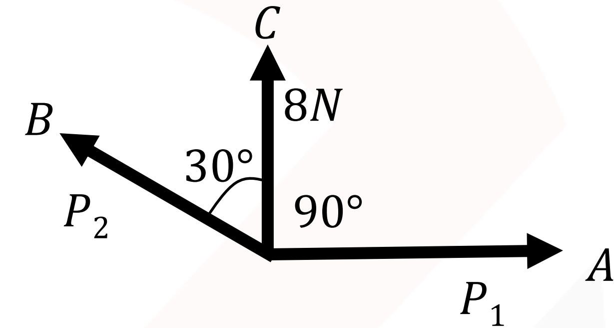
∴ (iii) ও (iv) হতে পাই, $P=Q=R$

এটিই P ,Q ও R বলের মধ্যে নির্ণয় সম্পর্ক।



CQ

(১০) একটি বল ও অপর দুটি বলের মধ্যবর্তী কোণের অনুপাত P_2 =?



8N বলের অংশদ্বয় P_1 ও P_2 হলে, P_1 এর মান নিচের কোনটি?

(ক) $4\sqrt{3}$ (খ) $8\sqrt{3}$ (গ) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ (ঘ) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ ✓

SYSTEM-1

$$\frac{P_1}{\sin 30°} = \frac{P_2}{\sin 90°} = \frac{8}{\sin(90°+120°)}$$

$$\frac{P_1}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\therefore P_1 = \frac{8\times\frac{1}{2}\times 2}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

SYSTEM-2

$$P_1 \cos 0° + P_2 \cos 120° = 8 \cos 90°$$

$$\Rightarrow P_1 + P_2\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2P_1 - P_2 = 0$$

$$\Rightarrow 2P_1 = P_2$$

$$P_1 \sin 0° + P_2 \sin 120° = 8 \sin 90°$$

$$\Rightarrow 0 + P_2\frac{\sqrt{3}}{2} = 8 \Rightarrow \sqrt{3}P_2 = 16 \Rightarrow P_2 = \frac{16}{\sqrt{3}}$$

DOWNLOAD THE APP

10 MINUTE SCHOOL

MCQ

(১) দুইটি সমান বলের লব্ধির বর্গ তাদের গুণফলের দ্বিগুণ হলে বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ -

(ক) 0°

(খ) 90° ✓

(গ) 135°

(ঘ) 180°

Solve: $\left(\sqrt{P^2 + P^2 + 2.P.P.\cos\alpha}\right)^2 = 2P^2$

$\Rightarrow 2P^2 + 2P^2\cos\alpha = 2p^2$

$\Rightarrow 2P^2(1 + \cos\alpha) = 2P^2$

$\Rightarrow \cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \alpha = 90°$

MCQ

(২) 12N ও 16N সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয় A ও B বিন্দুতে এবং লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল, যেখানে AB = 14 m. BC এর মান কত মিটার?

(ক) 42

(খ) $\frac{49}{2}$

(গ) 8

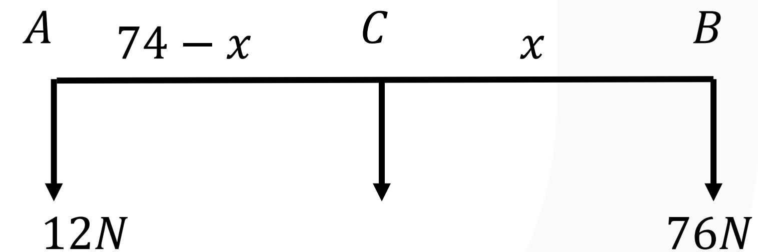
(ঘ) 6 ✔

Solve:

$$\therefore \frac{12}{X} = \frac{16}{14-X} \Rightarrow \frac{3}{X} = \frac{4}{14X}$$

$$\Rightarrow 16x = 168 - 12X$$

$$\Rightarrow x = 6$$



DOWNLOAD THE APP

MCQ

10 MINUTE SCHOOL

(৩) 3 একক দূরত্বে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত 6 এবং 3 একক মানের সমান্তরাল বলদ্বয়-

i. সদৃশ হলে, লব্ধির মান 9 একক

ii. বিসদৃশ হলে, লব্ধির মান 3 একক

iii. সদৃশ এবং লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়ারত হলে AC = 1 একক

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

Solve: (i) সদৃশ হলে লব্ধি $= 6 + 3 = 9$

(ii) বিসদৃশ হলে লব্ধি $= 6 - 3 = 3$

(ii)

$\therefore \frac{6}{3-X} = \frac{3}{X} \Rightarrow 6x = 9 - 3X \Rightarrow x = 1$

MCQ

(8) 3N ও 4N মানের দুটি বল লম্বভাবে ক্রিয়া করলে লব্ধির মান কত?

(ক) 2N (খ) 3N (গ) 5N ✓ (ঘ) 7N

Solve: লব্ধি $= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5N$

MCQ

(৫) $\sqrt{3}$ একক দুটি সমান বল $120°$ কোণে এক বিন্দুতে ক্রিয়াশীল হলে তাদের লব্ধির মান কত?

(ক) $\sqrt{3}$ (খ) 3 (গ) $2\sqrt{3}$ (ঘ) $4\sqrt{3}$

Solve: লব্ধি $= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 + 2 . \sqrt{3} . \sqrt{3} . \cos 120°} = \sqrt{3}$

$\sqrt{3}$ একক

$P = Q = \sqrt{3}$

$\alpha = 120°$

MCQ

(৬) একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি বল P ও 2P. লব্ধি R, P বলের উপর লম্ব হলে তাদের অন্তর্গত কোণ কত?

(ক) 30° (খ) 60° (গ) 90° (ঘ) 120° ✔

Solve: $\tan 90° = \frac{2P\sin\alpha}{P + 2P\cos\alpha} \Rightarrow P + 2P\cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 120°$

$$tan90° = \frac{2Psin\alpha}{P+2Pcos\alpha}$$

$$cot90° = \frac{P+2P\ cos\alpha}{2P\ sin\alpha}$$

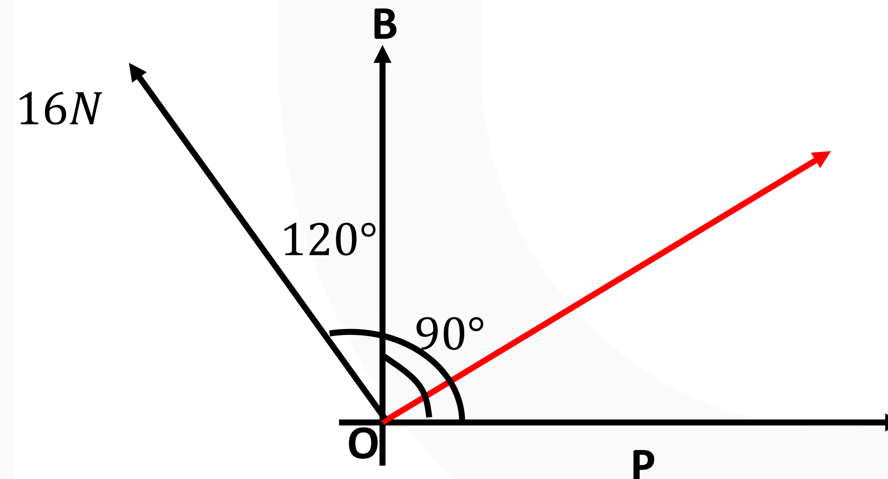
$$P + 2Pcos\alpha = 0$$

MCQ

(৭) কোনো বিন্দুতে 120° কোণে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের বৃহত্তম বলটি 16N. এবং ক্ষুদ্রতম বলটি লব্ধির সাথে সমকোণ উৎপন্ন করে। ক্ষুদ্রতম বলের মান কত?

(ক) $\sqrt{3}$ (খ) 3 (গ) 8 ✔ (ঘ) $8\sqrt{3}$

Solve: $\tan 90^\circ = \dfrac{16\sin 120}{P + 16\cos 120} \Rightarrow P + 16\cos 120 = 0 \Rightarrow P = 8N$



MCQ

(৮) P এবং Q বল দুইটি পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করলে লব্ধি 5N এবং একই দিকে ক্রিয়া করলে লব্ধি 7N -

i. $P = 6N$

ii. $Q = 7N$

iii. বলদুটির মধ্যবর্তী কোণ যথাক্রমে 180° ও 0°

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

$$P > Q$$
$$P - Q = 5$$
$$P + Q = 7$$
$$Q = 1$$
$$P = 6$$

MCQ

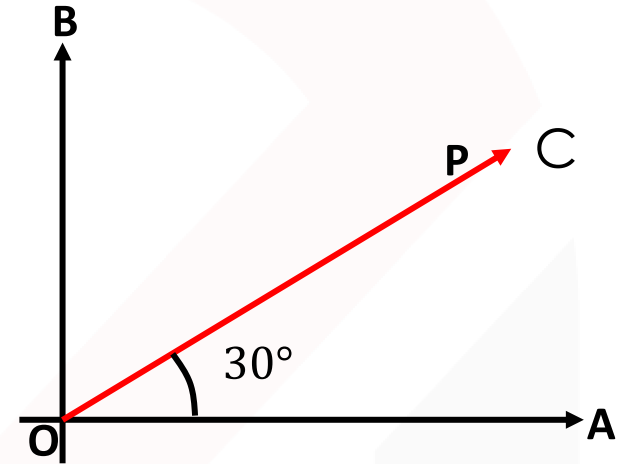
(৯)

i. OA বরাবর P এর লম্বাংশ $= \frac{\sqrt{3}P}{2}$

ii. OB বরাবর P এর লম্বাংশ $= \frac{P}{2}$

iii. OC বরাবর P এর লম্বাংশ $= P$

MCQ
HW



নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

Solve: (i) OA বরাবর উপাংশ $= P\cos 30° = \frac{\sqrt{3}P}{2}$

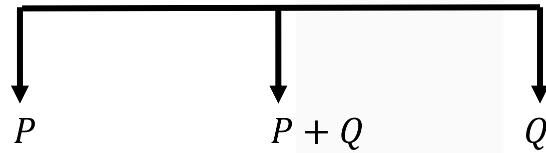
(ii) OB বরাবর উপাংশ $= P\sin 30° = \frac{P}{2}$

(ii) OC বরাবর উপাংশ $= P\cos 0° = P$

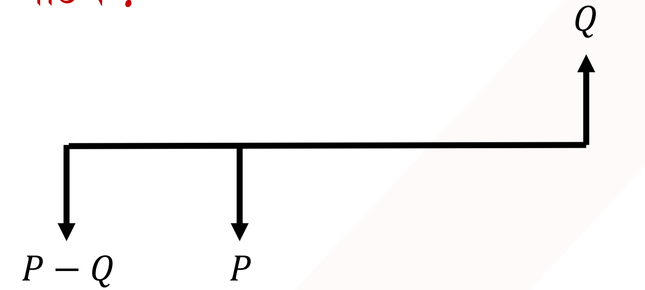
MCQ

(১০) P ও Q দুটি সমান্তরাল বল এবং $P < Q$ হলে নিচের কোনটি সঠিক?

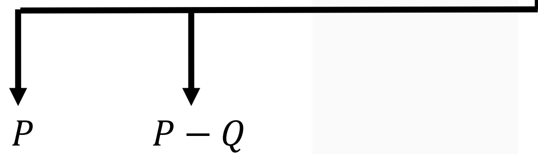
(ক)



(খ)

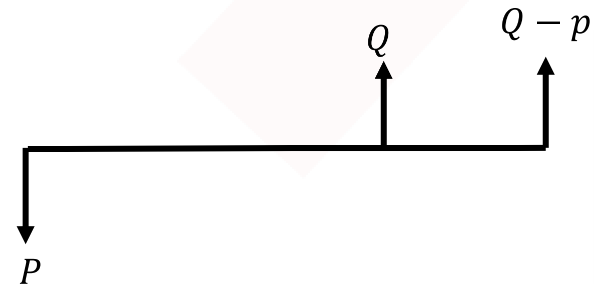


(গ)





(ঘ)



MCQ

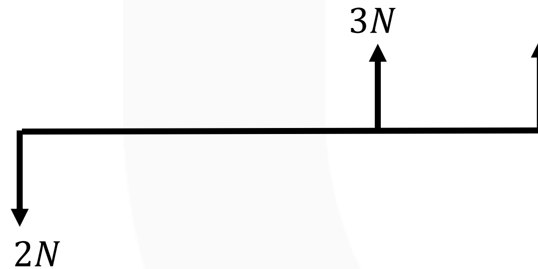
(১১) 2N ও 3N মানের দুইটি বল পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে। এদের লব্ধি কোন দিকে ক্রিয়া করে?

(ক) 3N বলের ক্রিয়ারেখার সাথে লম্ব বরাবর

(খ) 3N বলের ক্রিয়ারেখা বরাবর

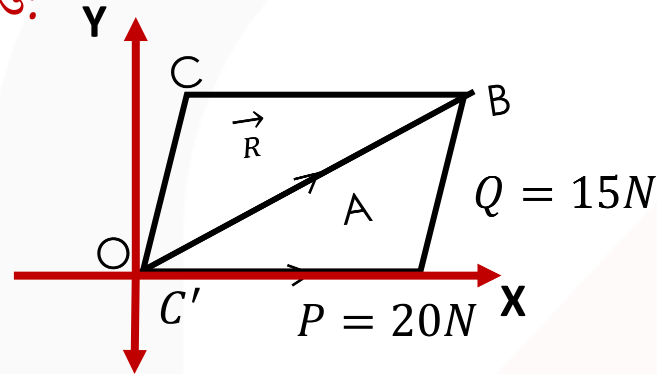
(গ) 2N বলের ক্রিয়ারেখা বরাবর

(ঘ) 2N বলের ক্রিয়ারেখার সাথে লম্ব বরাবর



MCQ

■ নিচের উদ্দীপক হতে ১২ ও ১৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



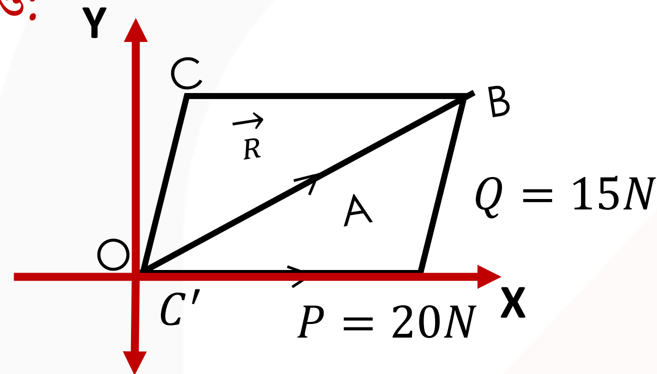
(১২) R এর মান কত?

(ক) 775 (খ) 35 (গ) $5\sqrt{37}$ (ঘ) 25

Solve: লব্ধি $= \sqrt{20^2 + 15^2 + 2\,.20.15.\cos 60^\circ} = 5\sqrt{37}$

MCQ

■ নিচের উদ্দীপক হতে ১২ ও ১৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



$15\, sin60°$
$15 cos30°$

(১৩) OY বরাবর Q এর লম্বাংশ =?

(ক) 0 (খ) $\frac{15}{2}$ (গ) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ (ঘ) 15

Solve: OY বরাবর Q এর লম্বাংশ $= 15\cos 30° = \frac{15\sqrt{3}}{2}$

MCQ

(১৪) সমবিন্দু দুটি বলের লব্ধি বৃহত্তম হয় যখন বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ-

(ক) 0° ✔ (খ) 45° (গ) 90° (ঘ) 180°

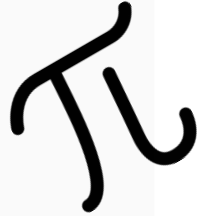
MCQ

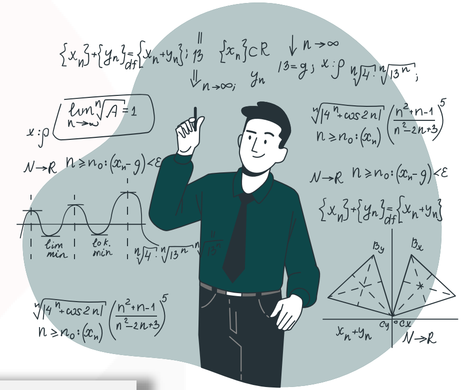
(১৫) P ও Q দুইটি সমান ও সমান্তরাল বল বিপরীত দিকে ক্রিয়াশীল হলে তাদের লব্ধি কত?

(ক) P + Q (খ) Q – P (গ) P – Q (ঘ) 0

Solve: সমান ও বিপরীতমুখী







Higher Math 1st & 2nd Paper

QNA Lecture : 01

Instructor : Sajan Chakraborty





QNA

1. মান নির্ণয় কর : dy/dx, যখন $x^a y^b = (x-y)^{a+b}$

$$x^a y^b = (x-y)^{a+b}$$

$$\Rightarrow \ln(x^a . y^b) = \ln(x.y)^{a+b}$$

$$\Rightarrow \ln x^a + li\ y^b = (a+b)\ln(x-y)$$

$$\Rightarrow alnx + blny - (a+b)\ln(x-y) = 0$$

[Ans.]

QNA

1. মান নির্ণয় কর : dy/dx, যখন $x^a y^b = (x-y)^{a+b}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{fx}{fy}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{a.\frac{1}{x} + 0 - (a+b).\frac{1}{x-y}.(1-0)}{0 + b.\frac{a}{y} - (a+h).\frac{1}{n.y}(0-1)}$$

$$= -\frac{\frac{a}{x} - \frac{a+b}{x-y}}{\frac{b}{y} + \frac{a+b}{x-y}}$$

$$= -\frac{\frac{ax - ay - ax - bx}{x(x-y)}}{\frac{bx - by - ay - by}{y(x-y)}}$$

$$= -\frac{(ay+bx)}{x(x-y)} \times \frac{y(x-y)}{bx+ay}$$

$$= \frac{y}{x}$$

[Ans.]

QNA

2. 1. যদি $y = tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ হয়, তবে dy/dx এর মান বের কর।

ধরি, $x = \tan\theta$

$\therefore\ \theta = \tan^{-1} x$

$$y = \frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}-1}{\tan\theta}$$

$$= \frac{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}{\tan\theta}$$

$$= \frac{\sec\theta - 1}{\tan\theta}$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos\theta} - 1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{1-\cos\theta}{\cos\theta} \times \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

QNA

2. 1. যদি $y = tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ হয়, তবে dy/dx এর মান বের কর।

$$\Rightarrow y = \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow y = \tan\frac{\theta}{2}$$

$$= \tan\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}x\right)$$

পেরে যাবা



QNA

3. 1 লিটার (1000 ঘন সে.মি.) তরল ধারণ সমতা সম্পন্ন দুই প্রান্তে আবদ্ধ একটি ঘাড়া বৃত্তাকার সিলন্ডার প্রয়োজন। সিলন্ডারটির উচ্চতা ও ব্যাসার্ধ কিরুপ হলে সর্বাপেক্ষা কম ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট টিন দিয়ে তা নির্মাণ করা সম্ভব?

1 লিটার তরল ধারণ সমতা সম্পন্ন দুই প্রান্তে আবদ্ধ একটি ঘাড়া বৃত্তাকার সিলন্ডার প্রয়োজন। h, r সর্বপেক্ষা কম টিন বানাতে পারবে

সিলিন্ডারের আয়তন, $v = \pi r^2 h$

সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল, $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

$= 2\pi(r^2 + rh)$ ... ... (i)

$v = 1L = 1000\ cm^3$

$\Rightarrow \theta r^2 h = 1000 cm^3$

$\Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$ ... ... (ii)

QNA

3. 1 লিটার (1000 ঘন সে.মি.) তরল ধারণ সমতা সম্পন্ন দুই প্রান্তে আবদ্ধ একটি খাড়া বৃত্তাকার সিলন্ডার প্রয়োজন। সিলন্ডারটির উচ্চতা ও ব্যাসার্ধ কিরুপ হলে সর্বাপেক্ষা কম ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট টিন দিয়ে তা নির্মাণ করা সম্ভব?

(i) নং এ বসিয়ে,

$$A = 2\pi\left(r^2 + r.\frac{1000}{\pi r^2}\right)$$

$$A = 2\pi r^2 + 2000r^{-1}$$

$$\Rightarrow A(r) = 2\pi r^2 + 2000r^{-1}$$

$$\therefore\ A(r) = 4\pi r^2 + 2000r^{-2} = 4\pi r - 2000r^{-2}$$

$$\Rightarrow A^{11}(r) = 4\pi + 4000r^{-3}$$

QNA

3. 1 লিটার (1000 ঘন সে.মি.) তরল ধারণ সমতা সম্পন্ন দুই প্রান্তে আবদ্ধ একটি ঘাড়া বৃত্তাকার সিলন্ডার প্রয়োজন। সিলন্ডারটির উচ্চতা ও ব্যাসার্ধ কিরুপ হলে সর্বাপেক্ষা কম ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট টিন দিয়ে তা নির্মাণ করা সম্ভব?

গুরু ও লগু মানের জন্য,

$$A'(r) = 0$$

$$\Rightarrow 4\pi = 2000r^{-3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^3} = \frac{4\pi}{2000}$$

$$\Rightarrow r^3 = \frac{2000}{4\pi}$$

$$r = \left(\frac{1000}{2\pi}\right)^{1/3} = 5.42$$

$$A'(5.42) = 4\pi + 4000.(5.42)^{-3}$$

$$= 37.68 > 0$$

$$r = 5.542$$

লঘুমান পাওনা

QNA

3. 1 লিটার (1000 ঘন সে.মি.) তরল ধারণ সমতা সম্পন্ন দুই প্রান্তে আবদ্ধ একটি খাড়া বৃত্তাকার সিলিন্ডার প্রয়োজন। সিলিন্ডারটির উচ্চতা ও ব্যাসার্ধ কিরূপ হলে সর্বাপেক্ষা কম ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট টিন দিয়ে তা নির্মাণ করা সম্ভব?

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

$$= \frac{1000}{\pi (5.42)^2}$$

$$= 10.83$$

কমপক্ষে ব্যাসার্ধ $= 5.42\ cm$

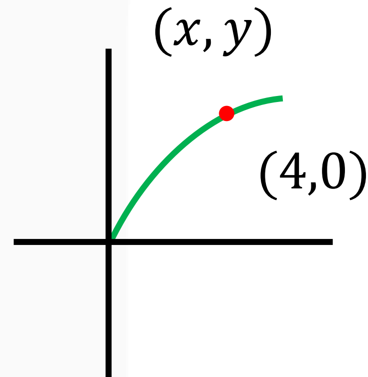
উচ্চতা $= 10.83\ cm$

[Ans.]

QNA

4. $y = \sqrt{x}$ **গ্রাফে (x,y) বিন্দুর মান নির্ণয় কর যা (4.0) বিন্দুর নিকটতম।**

$$y = \sqrt{x}$$



নিকটতম → লঘুমান

$$D = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2}$$

লঘুমান বের করব

QNA

5. $\tan^{-1}\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$

$$y = \tan^{-1}\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$$

ধরি,

$$x = \tan\theta$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1} x$$

$$\therefore y = \tan^{-1}\left(\frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}(\tan 3\theta)$$

[Ans.]

QNA

6. $f(x) = 3x^2 - 2x + 4, -1 \leq x \leq 2$ **ফাংশনটি কোণ ব্যবধিতে বৃদ্ধি পায়, কোন ব্যবধিতে হ্রাস পায় তা নির্ণয় কর।**

$f(x) = 6x - 2$

$f''(x) = 6$

$-1 \leq x \leq \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} \leq x \leq 2$

$-\frac{b}{2a} = c - \underline{b^2}$

$0.333, 3.665$

$\frac{1}{3}$

QNA

7. $\lim\limits_{x \to \infty}\{\ln 2x - 1) - \ln(x + 5)\}$

$$\lim_{x \to \infty} \ln\frac{2x - 1}{x + 5}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \ln\left(\frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{5}{x}}\right)$$

$$= \ln 2$$

[Ans.]

QNA

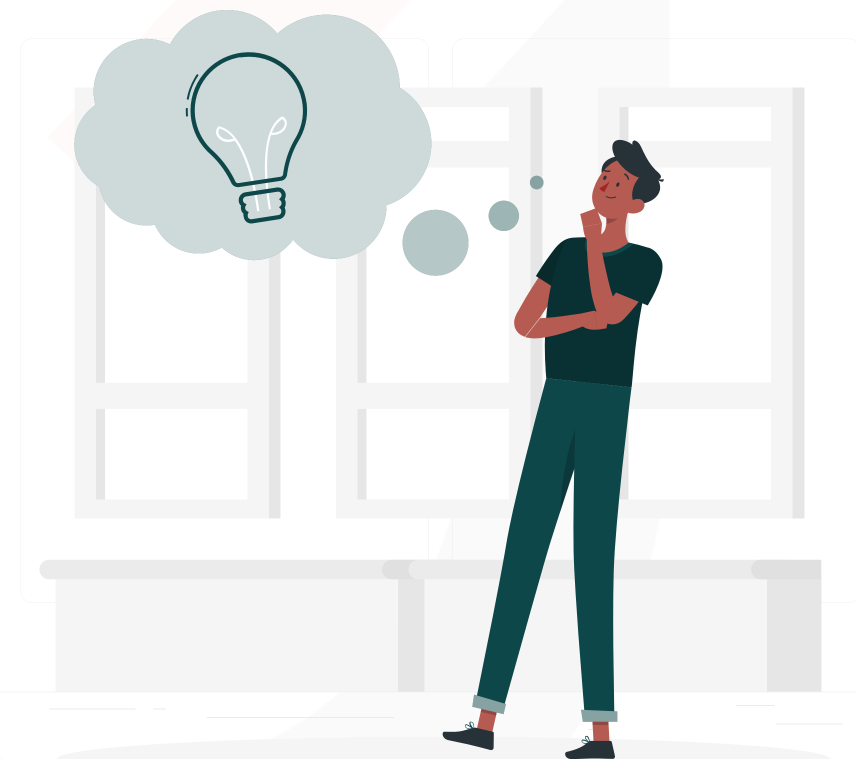
8. $$\lim_{x \to 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}$$

$$= \frac{-a \sin x + b \sin bx}{2x}$$

$$= \frac{-a^2 \cos ax + b^2 \cos bx}{2}$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2}$$ [Ans.]



QNA

8. $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2}{x^2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-y} - 2}{x^2}$$

$$= \frac{e^x - e^{-y} - 0}{2x^2}$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$= \frac{1 + 1}{2}$$

$$= 1$$ **[Ans.]**

QNA

9. $f(x) = \sin x$ হলে $\lim_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{f(x)}{f(\frac{\pi}{2}.x)} - f(x)}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

$f(x) = \sin x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{f(x)}{f(\frac{\pi}{2}.x)} - f(x)}{x^3}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}.x\right)} - \sin x}{x^3}$$

$$\underset{x \to 0}{lt} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

[Ans.]

DOWNLOAD THE APP

10 MINUTE SCHOOL





Higher Math 1st & 2nd Paper

QNA Lecture : 02

Instructor : Sajan Chakraborty





QNA

1. A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স হলে এবং $A^3 - 2A^2 + 3A + 5I = 0$ হলে , $A^{-1} = ?$

$$A^3 - 2A^2 + 3A + 5I = 0$$

বা, $A.A.A.A^{-1} - 2A.A.A^{-1} + 3.A.A^1 + 5.I.A^{-1} = 0.A^{-1}$

বা, $A^2I - 2AI + 3I + 5A^{-1} = 0$

বা, $A^2 - 2A + 3I + 5A^{-1} = 0$

বা, $5A^{-1} = 2A - 3I - A^2$

বা, $A^{-1} = \frac{1}{5}(2A - 3I - A^2)$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{5}(2A - 3I - A^2)$

[Ans.]

QNA

2. K এর কোন মানের জন্য $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & k^2 \\ 1 & k^2 & k^4 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির মান শুন্য হবে না ?

(ক) 1=k

(খ) k=−1

(গ) k=3

(ঘ) k=0

এখানে, MCQ shortcut করার জন্য Basic main.



QNA

3. $A = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$ এর মান হবে –

i) $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$

ii) $\begin{vmatrix} \alpha_1 + c\alpha_2 & \alpha_2 & -\alpha_3 \\ \beta_1 - c\beta_2 & -\beta_2 & \beta_2 \\ \gamma_1 + c\gamma_2 & \gamma_2 & -\gamma_3 \end{vmatrix}$

iii) $-\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ -\alpha_3 & \beta_3 & -\gamma_3 \\ \alpha_2 & -\beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$

নিচের কোনটি সঠিক ?

ক) i　　খ) ii　　গ) i ও iii　　ঘ) i ,ii ও iii ✔

Solve:

$\beta_1 + (-c\beta_2) = \beta_1 - c\beta_2$ (Twist)

QNA

4. $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $PQ = I_3$ হলে $Q =$?

$PQ=I_3$

বা, $P^{-1}(PQ)= P^{-1}I_3$

বা, $(P^{-1}P)Q= P^{-1}I_3$

বা, $IQ = P^4$

$\therefore Q=P^{-1}$

[Ans.]

এখানে ক্যালকুলেশনটি কীভাবে করেছে?

সহজভাবে,

$PQ=I_3$

বা, $P^{-1}PQ= P^{-1}I$

বা, $IQ=P^{-1}$

$\therefore Q=P^{-1}$

QNA

5. বিস্তার না করে প্রমাণ কর: $\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} a & 1 & (b+c) \\ b & 1 & (c+a) \\ c & 1 & (a+b) \end{vmatrix} = 0$

$$L.H.S = \begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a & abc & abc(b+c) \\ b & abc & abc(c+a) \\ c & abc & abc(a+b) \end{vmatrix}$$ [১ম, ২য় ,৩য় সারিতে a,b,c সন্নিবিষ্ট করে।]

$$= \frac{1}{abc}.abc.abc\begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix}$$ [২য় অংশ প্রমাণিত]

QNA

5. বিস্তার না করে প্রমাণ কর: $\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} a & 1 & (b+c) \\ b & 1 & (c+a) \\ c & 1 & (a+b) \end{vmatrix} = 0$

$$= abc \begin{vmatrix} a & 1 & a+b+c \\ b & 1 & a+b+c \\ c & 1 & a+b+c \end{vmatrix} \quad [c_3' = c_3 + c_1]$$

$$= abc.(a+b+c) \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

[দুটি কলাম same হলে নির্ণায়কের মান ০]

[Ans.]

QNA

6. লম্বাংশ উপপাদ্যে কোনটার সাথে লভ্যাংশ নিব এটা কীভাবে বুঝবো?

মন চায়/সুবিধাজনক

[Ans.]

স্থিতিবিদ্যার জন্যঃ

i) Lecture → Basic আলোচনা

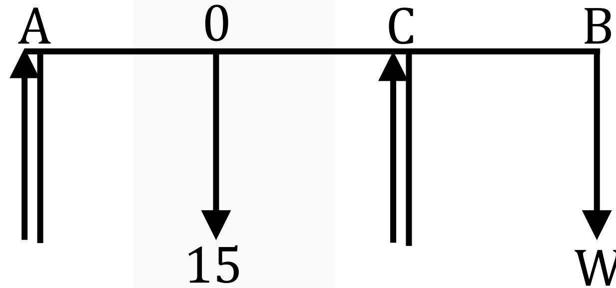
ii) Maths গুলো + Example এর math

iii) Test Paper Board Question solve



QNA

7. 4 মিটার দীর্ঘ এবং 15 কেজি ওজনের একটি সমরূপ AB তক্তা দুটি অবলম্বন এর উপর আনুভূমিকভাবে স্থির আছে। একটি অবলম্বন A প্রান্তে এবং B প্রান্ত হতে 0.5 মিটার/50 সেমি ভিতরে অবস্থিত । একটি বালক তক্তাটিকে না উল্টিয়ে এর উপর দিয়ে B প্রান্তে পৌঁছতে সক্ষম হলে বালকটির ওজন কত?



AB সুষম তক্তার ওজন এর মধ্যবিন্দু O তে নিম্নদিকে ক্রিয়াশীল । অবলম্বন দুটি A ও C তে অবস্থিত ।
যেখানে,

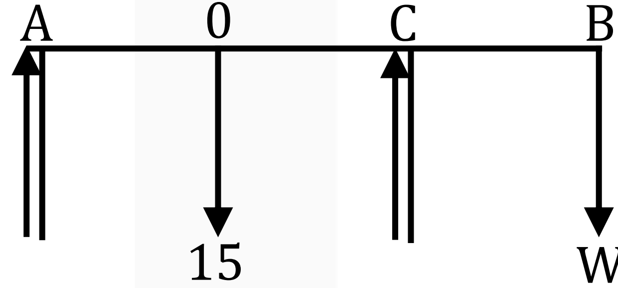
$BC = 0.5$ মিটার $= \frac{1}{2}$ মিটার

$OA = OB = \frac{4}{2} = 2$ মিটার

এবং $OC = OB - BC = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ মিটার

QNA

7. 4 মিটার দীর্ঘ এবং 15 কেজি ওজনের একটি সমরূপ AB তক্তা দুটি অবলম্বন এর উপর আনুভূমিকভাবে স্থির আছে। একটি অবলম্বন A প্রান্তে এবং B প্রান্ত হতে 0.5 মিটার/50 সেমি ভিতরে অবস্থিত । একটি বালক তক্তাটিকে না উল্টিয়ে এর উপর দিয়ে B প্রান্তে পৌঁছতে সক্ষম হলে বালকটির ওজন কত?



ধরি,

বালকটির ওজন = W , যা B বিন্দুতে কার্যকর । সাম্যাবস্থার জন্য O এবং B তে কার্যকর ওজনদ্বয়ের লব্ধি (15+W) , C বিন্দুতে ক্রিয়া করবে।

$\therefore 15 \times OC = W \times BC$

বা, $15 \times \frac{3}{2} = W \times \frac{1}{2}$

$\therefore$ বালকটির ওজন , W = 45 কেজি **[Ans.]**

QNA

8. $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AC}$ বল দুটির লব্ধি ΔABC এর পরিকেন্দ্রগামী হলে, প্রমাণ কর যে ত্রিভুজটি সমকোণী বা সমদ্বিবাহু হবে ?

বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দিগুণ।

$\therefore \angle AOB = 2C$

$OAB + OBA + AOB = 180°$

$2OAB = 180° 2C$

$OAB = 90 - C$

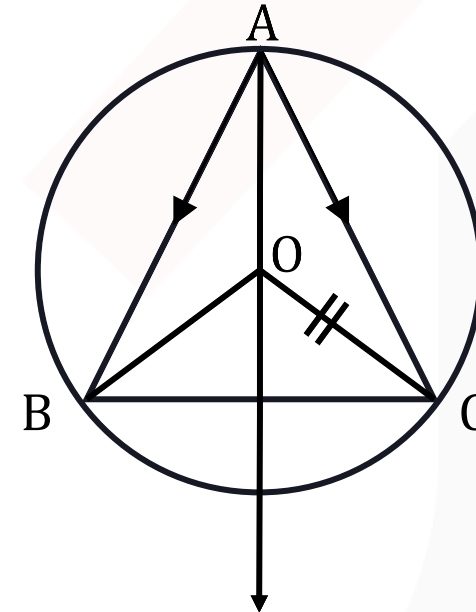
একইভাবে,

$$OAC = 90 - B$$

বা, $\frac{AB}{\sin OAC} = \frac{AC}{\sin OAB}$

বা, $\frac{AB}{\sin(90-B)} = \frac{AC}{\sin(90-C)}$

বা, $\frac{AB}{\cos B} = \frac{AC}{\cos C}$



QNA

8. $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AC}$ বল দুটির লব্ধি ΔABC এর পরিকেন্দ্রগামী হলে, প্রমাণ কর যে ত্রিভুজটি সমকোণী বা সমদ্বিবাহু হবে ?

আবার,

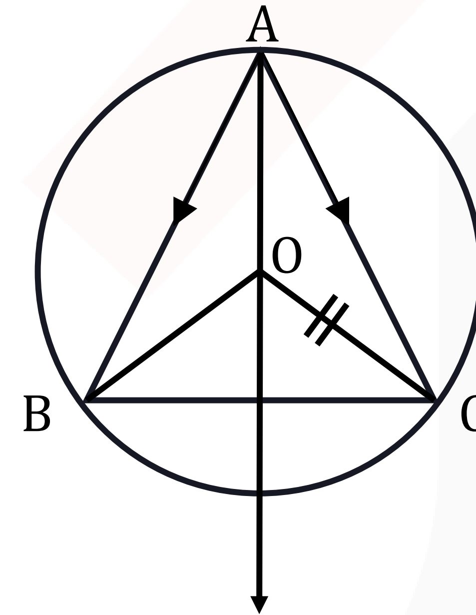
ত্রিকোণমিতিক অনুসারে পাই, $\frac{AB}{AC} = \frac{\sin C}{\sin B}$

বা, $\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\cos B}{\cos C}$

বা, $2\sin B\cos B = 2\sin C\cos C$

বা, $\sin 2B = \sin 2C$

$\therefore B = C$



অতএব , Δ ABC সমদ্বিবাহু।

[Ans.]

QNA

8. $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AC}$ বল দুটির লব্ধি ΔABC এর পরিকেন্দ্রগামী হলে, প্রমাণ কর যে ত্রিভুজটি সমকোণী বা সমদ্বিবাহু হবে ?

সমকোণীর ক্ষেত্রে,

$\sin 2B = \sin(180 - 2C)$

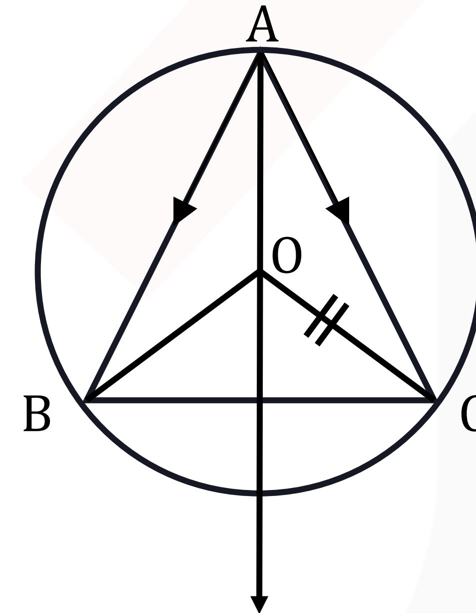
বা, $2B = \sin 180 \cdot 2C$

বা, $B = 90 - C$

বা, $B + C = 90°$

A এর মান তাহলে 90°

[Ans.]



10 MINUTE SCHOOL

উচ্চতর গনিত ২য় পত্র

সেট-১

Solve

10 MINUTE SCHOOL

উচ্চতর গনিত ২য় পত্র

সেট-২

Solve

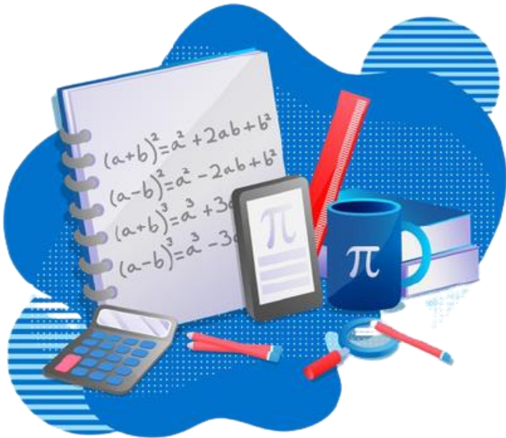




উচ্চতর গনিত ২য় পত্র

সেট-১

Solve





CQ

প্রশ্ন-১ ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 4\\ 0 & 5 & 6\end{bmatrix};\begin{vmatrix}u & v & w\\ u^2 & v^2 & w^2\\ u^3 & v^3 & w^3\end{vmatrix}=0\ (u\neq 0, v\neq 0, w\neq 0).$$

ক. $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}$ হলে $=(BC)^T$ নির্ণয় কর।

খ. প্রমাণ কর যে, $u=v=w$ ।

গ. A^{-1} এর মান নির্ণয় কর।

CQ

প্রশ্ন-১ ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}; \begin{vmatrix} u & v & w \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{vmatrix} = 0\ (u \neq 0, v \neq 0, w \neq 0).$$

ক. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ হলে $= (BC)^T$ নির্ণয় কর।

দেওয়া আছে,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5+14 & 6+16 \\ 15+28 & 18+32 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

CQ

প্রশ্ন-১ ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}; \begin{vmatrix} u & v & w \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{vmatrix} = 0\ (u \neq 0, v \neq 0, w \neq 0).$$

ক. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ হলে $= (BC)^T$ নির্ণয় কর।

$$\therefore (BC)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{bmatrix}$$

Answer

CQ

প্রশ্ন-১ ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}; \begin{vmatrix} u & v & w \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{vmatrix} = 0 \ (u \neq 0, v \neq 0, w \neq 0).$$

খ. প্রমাণ কর যে, $u = v = w$ ।

দেওয়া আছে, $\begin{vmatrix} u & v & w \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{vmatrix} = 0$

বা, uvw $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & v & w \\ u^2 & v^2 & w^2 \end{vmatrix} = 0$

বা, uvw $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ u - v & v - w & w \\ u^2 - v^2 & v^2 - w^2 & w^2 \end{vmatrix} = 0;$

$\begin{vmatrix} c'_1 = c_1 + c_2 \\ c' = c_2 + c_3 \end{vmatrix}$

CQ

প্রশ্ন-১ ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}; \begin{vmatrix} u & v & w \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{vmatrix} = 0\ (u \neq 0, v \neq 0, w \neq 0).$$

খ. প্রমাণ কর যে, $u = v = w$ ।

বা, uvw $\begin{vmatrix} u - v & v - w & w \\ u^2 - v^2 & v^2 - w^2 & w^2 \end{vmatrix} = 0$

বা, uvw $(u - v)(v - w) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ u + v & v + w \end{vmatrix} = 0$

বা, $uvw(u - v)(v - w)(v + w - u - v) = 0$

বা, uvw $(u - v)(v - w)(w - u) = 0$

বা, $(u - v)(v - w)(w - u) = 0$

CQ

প্রশ্ন-১ ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}; \begin{vmatrix} u & v & w \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{vmatrix} = 0 \ (u \neq 0, v \neq 0, w \neq 0).$$

খ. প্রমাণ কর যে, $u = v = w$ ।

$\therefore (u - v) = 0$

$\therefore u = v$

অথবা, $(v - w) = 0$

$\therefore v = w$

অথবা, $(w - u) = 0$

$\therefore w = u$

$\therefore u = v = w$ (প্রমাণিত)

CQ

প্রশ্ন-১

ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}; \begin{vmatrix} u & v & w \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{vmatrix} = 0\ (u \neq 0, v \neq 0, w \neq 0).$$

গ. A^{-1} এর মান নির্ণয় কর।

দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 1(0-20) - 2(18-0) + 0(15-0)$$

$$= -20 - 36$$

$$= -56$$

CQ

প্রশ্ন-১

ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}; \begin{vmatrix} u & v & w \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{vmatrix} = 0\ (u \neq 0, v \neq 0, w \neq 0).$$

গ. A^{-1} এর মান নির্ণয় কর।

$|A|$ সহগুণকগুলি,

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -20 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -18, \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 15$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -12, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 6 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -4, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

CQ

প্রশ্ন-১ ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}; \begin{vmatrix} u & v & w \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{vmatrix} = 0\ (u \neq 0, v \neq 0, w \neq 0).$$

গ. A^{-1} এর মান নির্ণয় কর।

$$\text{Adj}\ (A) = \begin{bmatrix} -20 & -18 & 15 \\ -12 & 6 & -5 \\ 8 & -4 & -6 \end{bmatrix}^{T}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ \text{Adj}\ (A)$$

$$= \frac{1}{-56}\begin{bmatrix} -20 & -18 & 15 \\ -12 & 6 & -5 \\ 8 & -4 & -6 \end{bmatrix}^{T} = \frac{1}{-56}\begin{bmatrix} -20 & -12 & 8 \\ -18 & 6 & -4 \\ 15 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

Answer

CQ

প্রশ্ন-২

নিচে একটি ফাস্ট ফুডের দোকানে শুক্র, শনি ও রবিবারে ২ লিটার পরিমাপের বিক্রীত কোমল পানীয়ের বোতলের সংখ্যা দেওয়া হলোঃ

সকাল	পেপসি	কোকাকোলা	স্প্রাইট
শুক্র	5	6	5
শনি	3	3	2
রবি	0	1	2

বিকাল	পেপসি	কোকাকোলা	স্প্রাইট
শুক্র	9	8	9
শনি	6	5	6
রবি	2	1	1

প্রতি ২ লিটার পেপসি, কোকাকোলা ও স্প্রাইটে লাভ হয় যথাক্রমে 4, 5 ও 4 টাকা।

ক. উপরের তথ্যগুলিকে ম্যাট্রিক্স আকারে প্রকাশ কর।

খ. শুক্র, শনি ও রবিবারে মোট কত লাভ হয় তা ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে নির্ণয় কর।

গ. চার সপ্তাহে শুক্র, শনি ও রবিবারে সকালের তুলনায় বিকালে মোট কত বেশি লাভ হয় তা ম্যাট্রিক্সে প্রকাশ কর।

CQ

প্রশ্ন-২

নিচে একটি ফাস্ট ফুডের দোকানে শুক্র, শনি ও রবিবারে ২ লিটার পরিমাপের বিক্রীত কোমল পানীয়ের বোতলের সংখ্যা দেওয়া হলোঃ

সকাল	পেপসি	কোকাকোলা	স্প্রাইট
শুক্র	5	6	5
শনি	3	3	2
রবি	0	1	2

বিকাল	পেপসি	কোকাকোলা	স্প্রাইট
শুক্র	9	8	9
শনি	6	5	6
রবি	2	1	1

প্রতি ২ লিটার পেপসি, কোকাকোলা ও স্প্রাইটে লাভ হয় যথাক্রমে 4, 5 ও 4 টাকা।

ক. উপরের তথ্যগুলিকে ম্যাট্রিক্স আকারে প্রকাশ কর।

সকলে বিক্রীত বোতল সংখ্যা ম্যাট্রিক্স, $M = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

লাভ ম্যাট্রিক্স, $P = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

CQ

প্রশ্ন-২

নিচে একটি ফাস্ট ফুডের দোকানে শুক্র, শনি ও রবিবারে ২ লিটার পরিমাপের বিক্রীত কোমল পানীয়ের বোতলের সংখ্যা দেওয়া হলোঃ

সকাল	পেপসি	কোকাকোলা	স্প্রাইট
শুক্র	5	6	5
শনি	3	3	2
রবি	0	1	2

বিকাল	পেপসি	কোকাকোলা	স্প্রাইট
শুক্র	9	8	9
শনি	6	5	6
রবি	2	1	1

প্রতি ২ লিটার পেপসি, কোকাকোলা ও স্প্রাইটে লাভ হয় যথাক্রমে $4, 5$ ও 4 টাকা।

ক. উপরের তথ্যগুলিকে ম্যাট্রিক্স আকারে প্রকাশ কর।

বিকলে বিক্রীত বোতল সংখ্যা ম্যাট্রিক্স, $A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

CQ

প্রশ্ন-২
নিচে একটি ফাস্ট ফুডের দোকানে শুক্র, শনি ও রবিবারে ২ লিটার পরিমাপের বিক্রীত কোমল পানীয়ের বোতলের সংখ্যা দেওয়া হলোঃ

সকাল	পেপসি	কোকাকোলা	স্প্রাইট
শুক্র	5	6	5
শনি	3	3	2
রবি	0	1	2

বিকাল	পেপসি	কোকাকোলা	স্প্রাইট
শুক্র	9	8	9
শনি	6	5	6
রবি	2	1	1

প্রতি ২ লিটার পেপসি, কোকাকোলা ও স্প্রাইটে লাভ হয় যথাক্রমে 4, 5 ও 4 টাকা।

খ. শুক্র, শনি ও রবিবারে মোট কত লাভ হয় তা ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে নির্ণয় কর।

সকালের লাভ ম্যাট্রিক্স, $= M.P = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.4 + 6.5 + 5.4 \\ 3.4 + 3.5 + 2.4 \\ 0.4 + 1.5 + 2.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 \\ 35 \\ 13 \end{bmatrix}$

DOWNLOAD THE APP

CQ

10 MINUTE SCHOOL

প্রশ্ন-২

নিচে একটি ফাস্ট ফুডের দোকানে শুক্র, শনি ও রবিবারে ২ লিটার পরিমাপের বিক্রীত কোমল পানীয়ের বোতলের সংখ্যা দেওয়া হলোঃ

সকাল	পেপসি	কোকাকোলা	স্প্রাইট
শুক্র	5	6	5
শনি	3	3	2
রবি	0	1	2

বিকাল	পেপসি	কোকাকোলা	স্প্রাইট
শুক্র	9	8	9
শনি	6	5	6
রবি	2	1	1

প্রতি ২ লিটার পেপসি, কোকাকোলা ও স্প্রাইটে লাভ হয় যথাক্রমে $4, 5$ ও 4 টাকা।

খ. শুক্র, শনি ও রবিবারে মোট কত লাভ হয় তা ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে নির্ণয় কর।

বিকালের লাভ ম্যাট্রিক্স, $= A.P = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.4 + 8.5 + 9.4 \\ 6.4 + 5.5 + 6.4 \\ 2.4 + 1.5 + 1.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 112 \\ 73 \\ 17 \end{bmatrix}$

CQ

প্রশ্ন-২

নিচে একটি ফাস্ট ফুডের দোকানে শুক্র, শনি ও রবিবারে ২ লিটার পরিমাপের বিক্রীত কোমল পানীয়ের বোতলের সংখ্যা দেওয়া হলোঃ

সকাল	পেপসি	কোকাকোলা	স্প্রাইট
শুক্র	5	6	5
শনি	3	3	2
রবি	0	1	2

বিকাল	পেপসি	কোকাকোলা	স্প্রাইট
শুক্র	9	8	9
শনি	6	5	6
রবি	2	1	1

প্রতি ২ লিটার পেপসি, কোকাকোলা ও স্প্রাইটে লাভ হয় যথাক্রমে $4, 5$ ও 4 টাকা।

খ. শুক্র, শনি ও রবিবারে মোট কত লাভ হয় তা ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে নির্ণয় কর।

মোট লাভ $= M.P + A.P = \begin{bmatrix} 70 \\ 35 \\ 13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 112 \\ 73 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 182 \\ 108 \\ 30 \end{bmatrix}$

CQ

প্রশ্ন-২

নিচে একটি ফাস্ট ফুডের দোকানে শুক্র, শনি ও রবিবারে ২ লিটার পরিমাপের বিক্রীত কোমল পানীয়ের বোতলের সংখ্যা দেওয়া হলোঃ

সকাল	পেপসি	কোকাকোলা	স্প্রাইট
শুক্র	5	6	5
শনি	3	3	2
রবি	0	1	2

বিকাল	পেপসি	কোকাকোলা	স্প্রাইট
শুক্র	9	8	9
শনি	6	5	6
রবি	2	1	1

প্রতি ২ লিটার পেপসি, কোকাকোলা ও স্প্রাইটে লাভ হয় যথাক্রমে $4, 5$ ও 4 টাকা।

গ. চার সপ্তাহে শুক্র, শনি ও রবিবারে সকালের তুলনায় বিকালে মোট কত বেশি লাভ হয় তা ম্যাট্রিক্সে প্রকাশ কর।

সকালের লাভ ম্যাট্রিক্স, $= 4 \times M.P = 4 \begin{bmatrix} 70 \\ 35 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 280 \\ 140 \\ 52 \end{bmatrix}$

CQ

প্রশ্ন-২

নিচে একটি ফাস্ট ফুডের দোকানে শুক্র, শনি ও রবিবারে ২ লিটার পরিমাপের বিক্রীত কোমল পানীয়ের বোতলের সংখ্যা দেওয়া হলোঃ

সকাল	পেপসি	কোকাকোলা	স্প্রাইট
শুক্র	5	6	5
শনি	3	3	2
রবি	0	1	2

বিকাল	পেপসি	কোকাকোলা	স্প্রাইট
শুক্র	9	8	9
শনি	6	5	6
রবি	2	1	1

প্রতি ২ লিটার পেপসি, কোকাকোলা ও স্প্রাইটে লাভ হয় যথাক্রমে $4, 5$ ও 4 টাকা।

গ. চার সপ্তাহে শুক্র, শনি ও রবিবারে সকালের তুলনায় বিকালে মোট কত বেশি লাভ হয় তা ম্যাট্রিক্সে প্রকাশ কর।

বিকালের লাভ ম্যাট্রিক্স, $= 4 \times A.P = 4\begin{bmatrix}112\\73\\17\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}448\\292\\68\end{bmatrix}$

CQ

প্রশ্ন-২
নিচে একটি ফাস্ট ফুডের দোকানে শুক্র, শনি ও রবিবারে ২ লিটার পরিমাপের বিক্রীত কোমল পানীয়ের বোতলের সংখ্যা দেওয়া হলোঃ

সকাল	পেপসি	কোকাকোলা	স্প্রাইট
শুক্র	5	6	5
শনি	3	3	2
রবি	0	1	2

বিকাল	পেপসি	কোকাকোলা	স্প্রাইট
শুক্র	9	8	9
শনি	6	5	6
রবি	2	1	1

প্রতি ২ লিটার পেপসি, কোকাকোলা ও স্প্রাইটে লাভ হয় যথাক্রমে 4, 5 ও 4 টাকা।

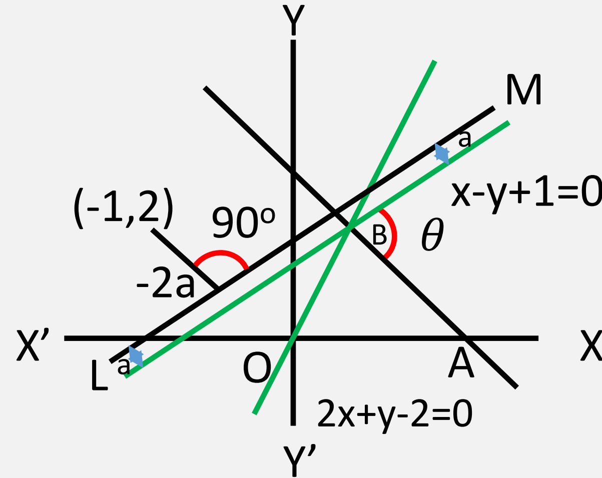
গ. চার সপ্তাহে শুক্র, শনি ও রবিবারে সকালের তুলনায় বিকালে মোট কত বেশি লাভ হয় তা ম্যাট্রিক্সে প্রকাশ কর।

চার সপ্তাহে সকালের তুলনায় বিকালে মোট কতবেশী লাভ $= 4P_a - 4P_s = \begin{bmatrix} 448 \\ 292 \\ 68 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 280 \\ 140 \\ 52 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 448-280 \\ 292-140 \\ 68-52 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 168 \\ 152 \\ 16 \end{bmatrix}$ **Answer**

CQ

প্রশ্ন-৩

দি. বো. '১৯



ক. θ এর মান বের কর।

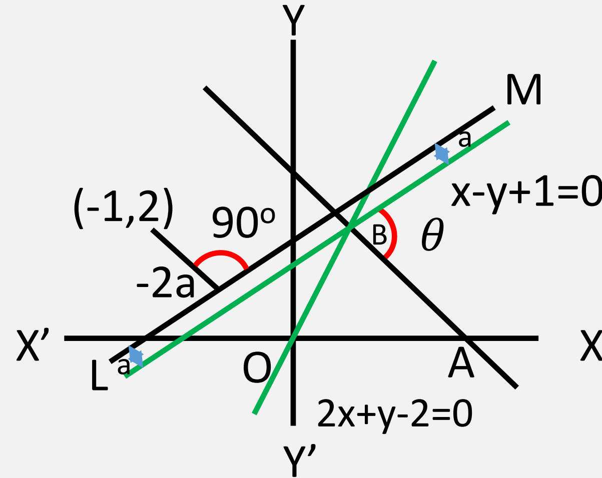
খ. OB রেখার সমীকরণ ও ΔOAB এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর ।

গ. LM রেখার সমীকরণ $3x - 3y + 5 = 0$ এর সঠিকতা গাণিতিকভাবে যাচাই কর ।

CQ

প্রশ্ন-৩

দি. বো. '১৯



ক. θ এর মান বের কর।

প্রদত্ত সরলরেখা, $x - y + 1 = 0 \dots \dots \dots (1)$

এবং $2x + y - 2 = 0 \dots \dots \dots (2)$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ

(1) নং হতে পাই, $y = x + 1$

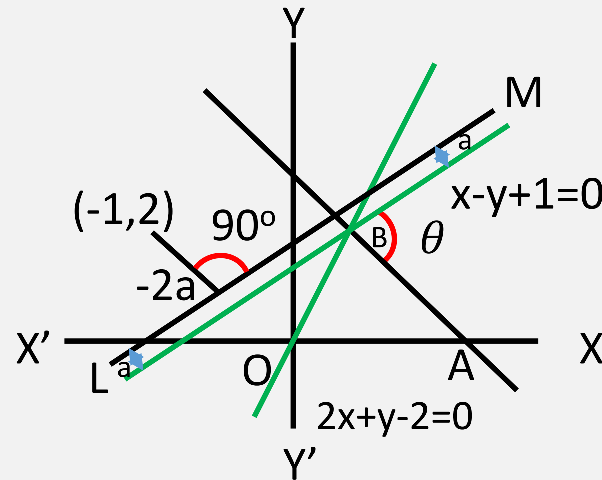
$\therefore$ ঢাল, $m_1 = 1$

(2) নং হতে পাই, $y = -2x - 2$

$\therefore$ ঢাল, $m_2 = -2$

প্রশ্ন-৩

দি. বো. '১৯



ক. θ এর মান বের কর।

আমরা জানি,

$$\tan\theta = \pm\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$

$$= \pm\frac{1-(-2)}{1+1(-2)}$$

$$= \pm\frac{1+2}{1-2}$$

বা, $\tan\theta = \pm\frac{3}{-1} = \pm3$

$\therefore \theta = \tan^{-1}(\pm3)$

যেহেতু θ প্রথম চতুর্ভাগে, সুতরাং $\theta = \tan^{-1}(3)$

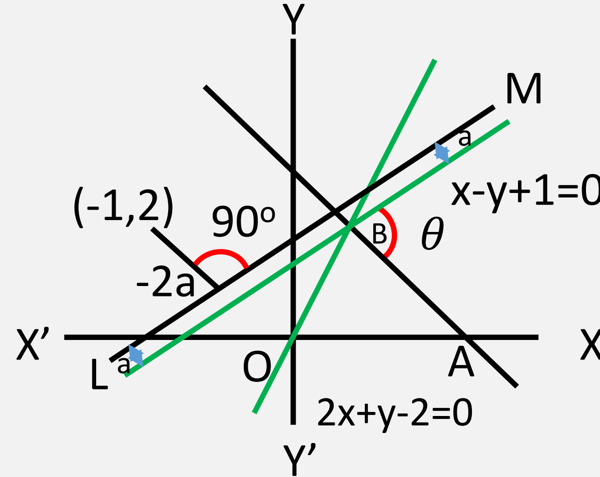
DOWNLOAD THE APP

CQ

10 MINUTE SCHOOL

প্রশ্ন-৩

দি. বো. '১৯



খ. OB রেখার সমীকরণ ও ΔOAB এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর ।

দেওয়া আছে, $x - y + 1 = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$

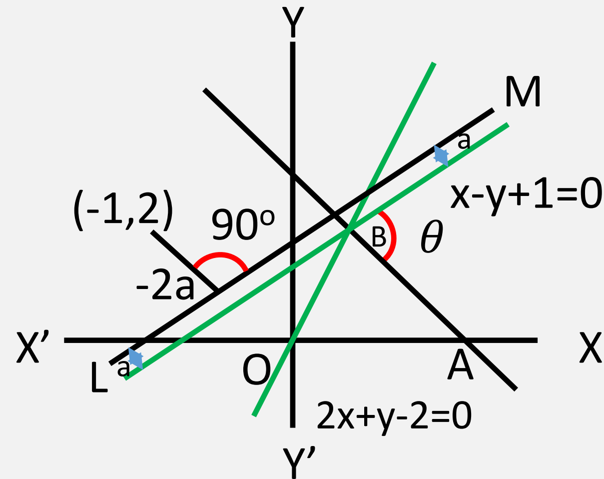
এবং $2x + y - 2 = 0 \ldots\ldots\ldots (2)$

(1) নং (2) নং রেখা পরস্পর B বিন্দুতে ছেদ করেছে।

(1) নং (2) নং হতে বজ্রগুণের সাহায্যে পাই,

প্রশ্ন-৩

দি. বো. '১৯



খ. OB রেখার সমীকরণ ও ΔOAB এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর ।

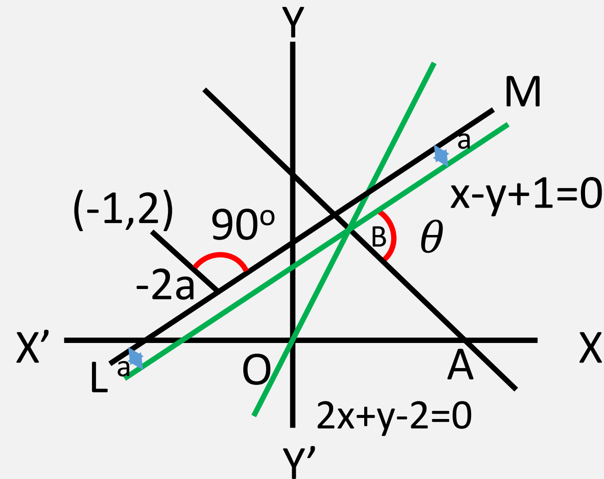
$$\frac{x}{2-1}=\frac{y}{2+2}=\frac{1}{1+2}$$

বা, $\frac{x}{1}=\frac{y}{4}=\frac{1}{3}$

$$\therefore x=\frac{1}{3}, y=\frac{1}{4}$$

প্রশ্ন-৩

দি. বো. '১৯



খ. OB রেখার সমীকরণ ও ΔOAB এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর ।

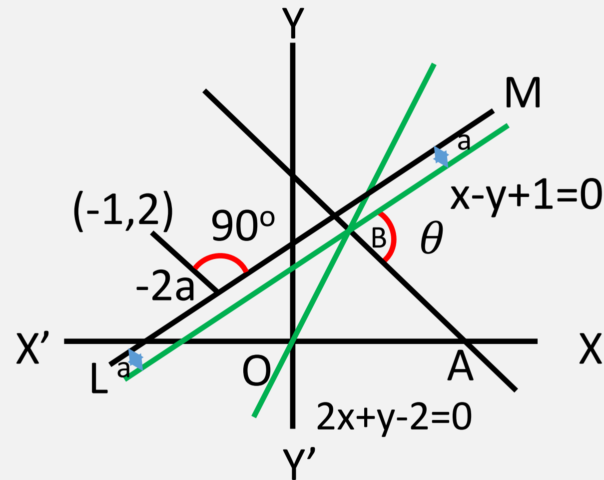
$\therefore B$ বিন্দুর স্থনাঙ্ক $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

এখন, $O(0,0)$ এবং $B\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

CQ

প্রশ্ন-৩

দি. বো. '১৯



খ. OB রেখার সমীকরণ ও ΔOAB এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর ।

$$\frac{x-0}{0-\frac{1}{3}} = \frac{y-0}{0-\frac{4}{3}}$$

বা, $\frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{4}{3}}$

বা, $3x = \frac{3y}{4}$

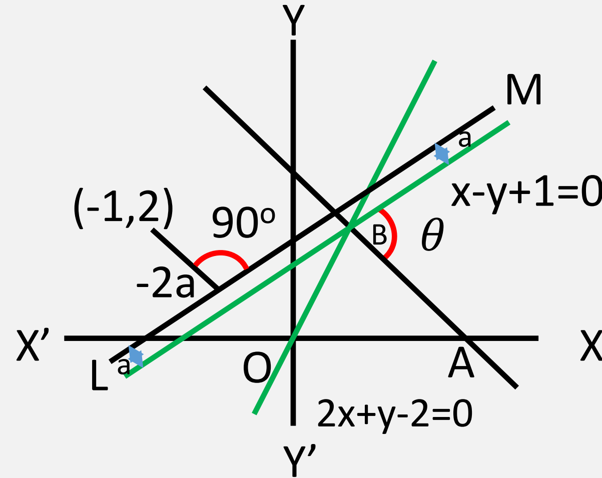
বা, $4x = y$

$\therefore$ OB রেখার সমীকরণ, $4x - y = 0$

$\therefore 4x - y = 0$

প্রশ্ন-৩

দি. বো. '১৯



খ. OB রেখার সমীকরণ ও ΔOAB এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর ।

আবার, (2) নং রেখাটি x অক্ষকে ছেদ করে বলে, $y = 0$

$\therefore 2x + 0 - 2 = 0$

বা, $2x = 2$

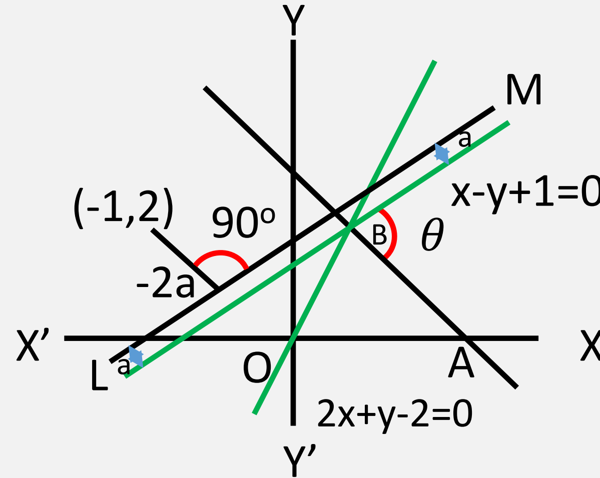
$\therefore x = 1$

$\therefore A$ বিন্দুর স্থানাংক $(1, 0)$

CQ

প্রশ্ন-৩

দি. বো. '১৯



খ. OB রেখার সমীকরণ ও ΔOAB এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর ।

$O(0,0), A(1,0)$ ও $B\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ বিন্দু দ্বারা গঠিত ত্রিভুজ, ΔOAB এর

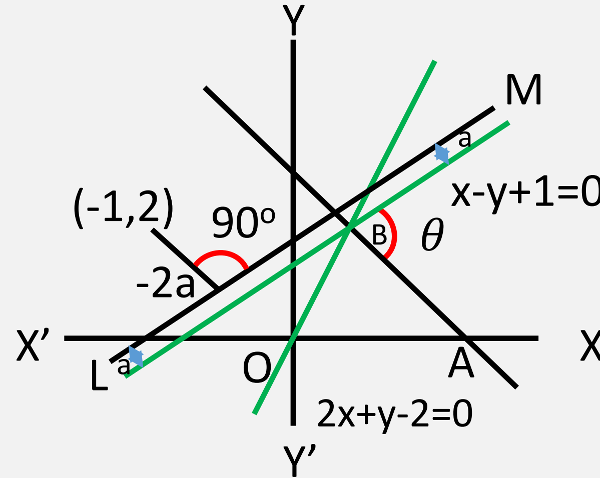
ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times 1\left(\frac{4}{3} - 0\right) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

ΔOAB এর ক্ষেত্রফল $\frac{2}{3}$ বর্গ একক

CQ

প্রশ্ন-৩

দি. বো. '১৯



গ. LM রেখার সমীকরণ $3x - 3y + 5 = 0$ এর সঠিকতা গাণিতিকভাবে যাচাই কর ।

এখানে, $x - y + 1 = 0 \dots \dots \dots (1)$

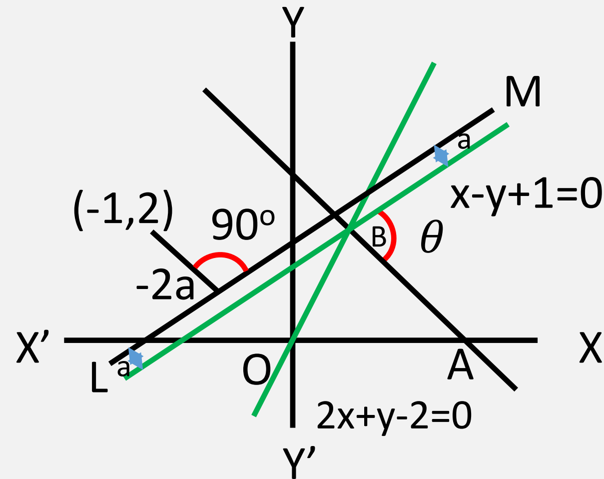
LN রেখা (1)নং রেখার সমান্তরাল হলে,

LM রেখার সমীকরণ, $x - y + k = 0 \dots \dots \dots (2)$

(1) ও (2)নং রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= a$ একক

প্রশ্ন-৩

দি. বো. '১৯



গ. LM রেখার সমীকরণ $3x - 3y + 5 = 0$ এর সঠিকতা গাণিতিকভাবে যাচাই কর ।

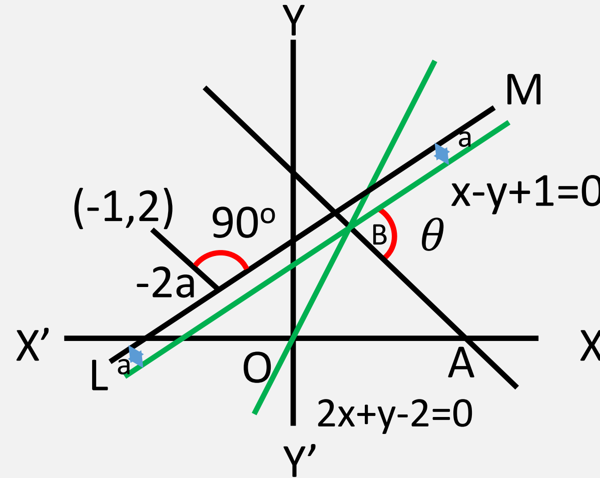
$$\therefore \left|\frac{k-1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\right| = a$$

বা, $\frac{k-1}{\sqrt{2}} = a$

বা, $k = \sqrt{2}a + 1$

প্রশ্ন-৩

দি. বো. ‘১৯



গ. LM রেখার সমীকরণ $3x - 3y + 5 = 0$ এর সঠিকতা গাণিতিকভাবে যাচাই কর ।

আবার, $(-1, 2)$বিন্দু হতে (2)নং রেখার লম্ব দূরত্ব $= 2a$ একক

$\therefore \left|\frac{-1-2-k}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\right| = -2\text{a}$

বা, $\frac{\text{k}-3}{\sqrt{2}} = -2\text{a}$

বা, $k - 3 = -2\sqrt{2}\text{a}$

বা, $k = -2\sqrt{2}\text{a} + 3$

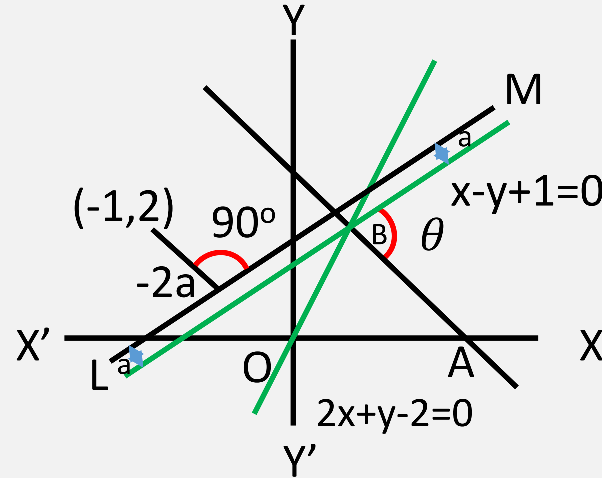
$\therefore \sqrt{2}\text{a} + 1 = -2\sqrt{2}\text{a} + 3$

বা,$\sqrt{2}\text{a} + 2\sqrt{2}\text{a} = 3 - 1$

CQ

প্রশ্ন-৩

দি. বো. '১৯



গ. LM রেখার সমীকরণ $3x - 3y + 5 = 0$ এর সঠিকতা গাণিতিকভাবে যাচাই কর ।

বা, $\sqrt{2}(a + 2a) = 2$

বা, $3a = \sqrt{2}$

বা, $a = \frac{\sqrt{2}}{3}$

$\therefore k = \sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{3} + 1$

বা, $k = \frac{2}{3} + 1$

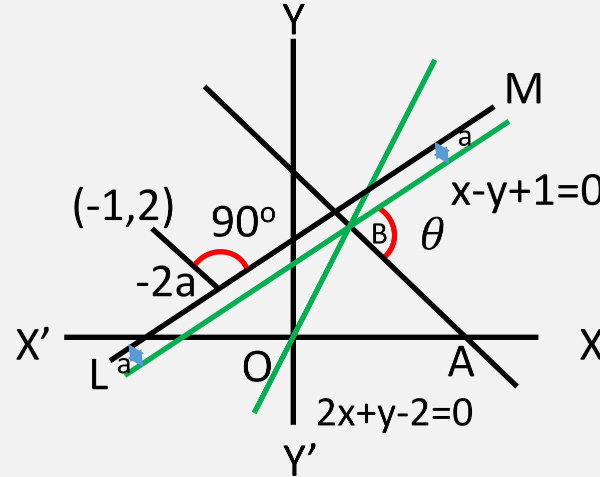
বা, $k = \frac{2+3}{3}$

বা, $k = \frac{5}{3}$

CQ

প্রশ্ন-৩

দি. বো. '১৯



গ. LM রেখার সমীকরণ $3x - 3y + 5 = 0$ এর সঠিকতা গাণিতিকভাবে যাচাই কর ।

k এর মান (২) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$x - y + \frac{5}{3} = 0$$

বা, $3x - 3y + 5 = 0$

নির্ণয়ে LM রেখার সমীকরণ, $3x - 3y + 5 = 0$, যা প্রদত্ত সমীকরণ

সুতরাং LM রেখার সমীকরণ, $3x - 3y + 5 = 0$ সঠিক।

CQ

প্রশ্ন-৪ ABC ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু $A(3,2), B(5,4)$ ও $C(2,2)$

ক. বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু নির্ণয় কর।

খ. A বিন্দু হতে BC এর উপর অঙ্কিত মধ্যমার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

গ. বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু সংযোজন করে উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং এই ত্রিভুজ ও ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অনুপাত নির্ণয় কর।

CQ

প্রশ্ন-৪ ABC ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু $A(3,2), B(5,4)$ ও $C(2,2)$

ক. বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু নির্ণয় কর।

প্রান্ত বিন্দুত্রয় $A(3,2), B(5,4)$ ও $C(2,2)$

$\therefore AB$ এর মধ্যবিন্দু $\text{D} = \left(\frac{3+5}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = (4,3)$

BC এর মধ্যবিন্দু $E = \left(\frac{5+2}{2}, \frac{4+2}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, 3\right)$

এবং CA এর মধ্যবিন্দু $F = \left(\frac{2+3}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 2\right)$

প্রশ্ন-৪ ABC ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু $A(3,2), B(5,4)$ ও $C(2,2)$

খ. A বিন্দু হতে BC এর উপর অঙ্কিত মধ্যমার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

$A(3,2)$ বিন্দু হতে BC এর উপর অঙ্কিত মধ্যমার দৈর্ঘ্য

$= A(3,2)$ বিন্দু হতে BC এর মধ্যবিন্দু $E\left(\frac{7}{2},3\right)$ এর দুরুত্ব

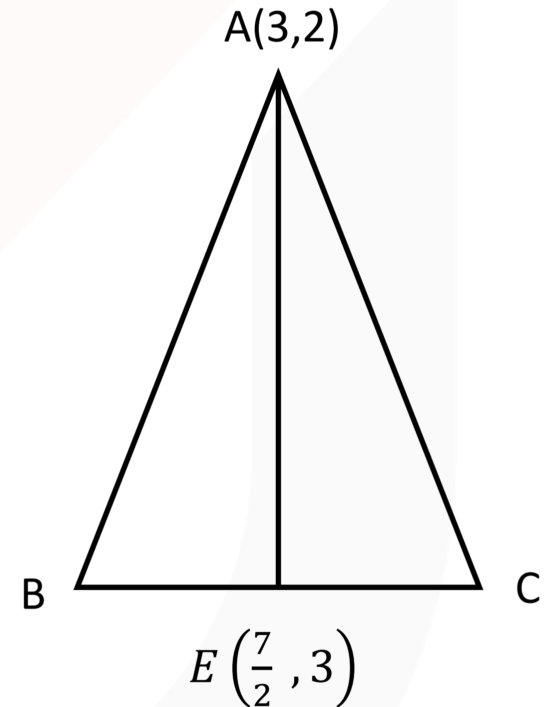
$= \sqrt{\left(3-\frac{7}{2}\right)^2 + (2-3)^2}$

$= \sqrt{\left(3-\frac{7}{2}\right)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{\frac{1}{4}+1}$

$= \sqrt{\frac{5}{4}}$

$= \frac{\sqrt{5}}{2}$



প্রশ্ন-৪ ABC ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু $A(3,2), B(5,4)$ ও $C(2,2)$

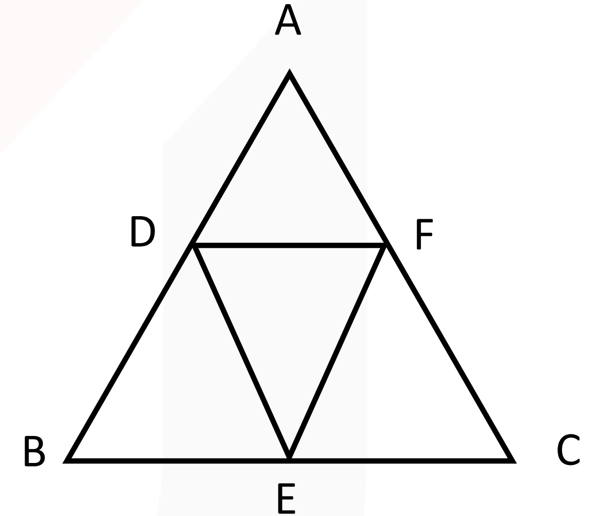
গ. বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু সংযোজন করে উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং এই ত্রিভুজ ও ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অনুপাত নির্ণয় কর।

বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু হচ্ছে, $D(4,3)$, $E\left(\frac{7}{2},3\right)$, $F\left(\frac{5}{2},2\right)$

$D(4,3)$, $E\left(\frac{7}{2},3\right)$, ও $F\left(\frac{5}{2},2\right)$ বিন্দু দ্বারা গঠিত

$$\text{ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ \frac{7}{2} & 3 & 1 \\ \frac{5}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ বর্গ একক}$$ **Answer**



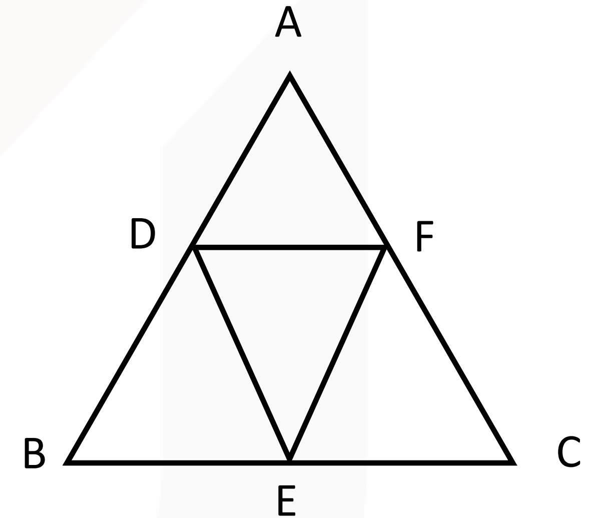
$r_1' = r_1 - r_2$

$r_2' = r_2 - r_3$

CQ

প্রশ্ন-৪ ABC ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু $A(3,2), B(5,4)$ ও $C(2,2)$

গ. বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু সংযোজন করে উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং এই ত্রিভুজ ও ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অনুপাত নির্ণয় কর।



$r_1' = r_1 - r_2$

$r_2' = r_2 - r_3$

আবার, ΔABC এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$r_2' = r_2 - r_1$

$r_3 = r_3 - r_2$

$$= \frac{1}{2}(-4+6)$$

$$\therefore \Delta ABC : \Delta DEF = 1 : \frac{1}{4} = 4 : 1$$ **Answer**

CQ

প্রশ্ন-৫

সোনার বাংলা কলেজ

$$f(x) = x + \sqrt{1 + x^2} \ldots\ldots\ldots (i)$$

$$y = 4e^x + 9e^{-x} \ldots\ldots\ldots (ii)$$

ক. $x^\circ \cos 3x^\circ$ কে x এর সাপেক্ষে এর অন্তরীকরণ কর।

খ. উদ্দীপক (ii) অবলম্বনে প্রমাণ কর যে, y এর লঘুমান $= 12$

গ. দৃশ্যকল্প-১ হতে $y = \{f(x)\}^m$ হলে দেখাও যে, $(1 + x^2)y_2 + xy_1 - m^2y = 0$

CQ

প্রশ্ন-৫ সোনার বাংলা কলেজ

$$f(x) = x + \sqrt{1 + x^2} \ldots\ldots\ldots (i)$$

$$y = 4e^{x} + 9e^{-x} \ldots\ldots\ldots (ii)$$

ক. $x^\circ \cos 3x^\circ$ কে x এর সাপেক্ষে এর অন্তরীকরণ কর।

ধরি, $y = x^\circ \cos 3x^\circ$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^\circ \cos 3x^\circ)$

$= \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi x}{180^\circ} \cos \frac{3\pi x}{180}\right)$ $\left[\because 180^\circ = \pi, 1^0 = \frac{\pi}{180}, x^0 = \frac{x\pi}{180}\right]$

$= \frac{\pi x}{180} \frac{d}{dx}\left(\cos \frac{\pi x}{60}\right) + \cos \frac{\pi x}{60} \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi x}{180}\right)$

$= \frac{\pi x}{180}\left(-\sin \frac{\pi x}{60}\right) \cdot \frac{\pi}{60} + \cos \frac{\pi x}{60} \frac{\pi}{180}$

$= \frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi x}{60} - \frac{\pi}{60} \cdot \frac{\pi x}{180} \sin \frac{\pi x}{60}$

নির্ণয় অন্তরজ $\frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi x}{60} - \frac{\pi}{60} \cdot \frac{\pi x}{180} \sin \frac{\pi x}{60}$

DOWNLOAD THE APP

CQ

10 MINUTE SCHOOL

প্রশ্ন-৫ সোনার বাংলা কলেজ

$$f(x) = x + \sqrt{1+x^2} \dots\dots\dots (i)$$

$$y = 4e^x + 9e^{-x} \dots\dots\dots (ii)$$

খ. উদ্দীপক অবলম্বনে প্রমাণ কর যে, y এর লঘুমান $= 12$

দেওয়া আছে,

$$y = 4e^x + 9e^{-x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 4e^x + 9e^{-x} \cdot (-1)$$

$$= 4e^x - 9e^{-x}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 4e^x + 9e^{-x}$$

ক্ষুদ্রতম ও বৃহত্তম মানের জন্য $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\therefore 4e^x - 9e^{-x} = 0$$

বা, $4e^x = 9e^{-x}$

বা, $4e^x = \frac{9}{e^x}$

CQ

প্রশ্ন-৫ সোনার বাংলা কলেজ

$$f(x) = x + \sqrt{1 + x^2} \dots\dots\dots (i)$$

$$y = 4e^{x} + 9e^{-x} \dots\dots\dots (ii)$$

খ. উদ্দীপক অবলম্বনে প্রমাণ কর যে, y এর লঘুমান $= 12$

বা, $e^{2x} = \frac{9}{4}$

বা, $(\mathrm{e}^{\mathrm{x}})^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

বা, $e^{x} = \frac{3}{2}$

$\therefore x = \ln\frac{3}{2}$

$x = \ln\frac{3}{2}$ এর জন্য, $\frac{d^2y}{dx^2} = 4e^{\ln\frac{3}{2}} + 9\frac{1}{e^{\ln\frac{3}{2}}}$

$= 4 \times \frac{3}{2} + 9 \times \frac{2}{3}$

$= 6 + 6 = 12 > 0$

CQ

প্রশ্ন-৫ সোনার বাংলা কলেজ

$$f(x) = x + \sqrt{1 + x^2} \ldots\ldots\ldots (i)$$

$$y = 4e^{x} + 9e^{-x} \ldots\ldots\ldots (ii)$$

খ. উদ্দীপক অবলম্বনে প্রমাণ কর যে, y এর লঘুমান $= 12$

$\therefore x = \ln\frac{3}{2}$ এর জন্য y এর ক্ষুদ্রতম মান বিদ্যমান।

ক্ষুদ্রতম মান $y = 4e^{\ln\frac{3}{2}} + 9\frac{1}{e^{\ln\frac{3}{2}}}$

$$= 4 \cdot \frac{3}{2} + 9 \cdot \frac{2}{3}$$

$$= 6 + 6$$

$$= 12$$

$\therefore y$ এর লঘুমান $= 12$ (প্রমাণিত)

CQ

প্রশ্ন-৫ সোনার বাংলা কলেজ

$$f(x) = x + \sqrt{1+x^2} \dots\dots\dots (i)$$

$$y = 4e^{x} + 9e^{-x} \dots\dots\dots (ii)$$

গ. দৃশ্যকল্প-১ হতে $y = \{f(x)\}^m$ হলে দেখাও যে, $(1+x^2)y_2 + xy_1 - m^2y = 0$

দেওয়া আছে, $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$

$\therefore \{f(x)\}^m = \left\{x + \sqrt{1+x^2}\right\}^m$

বা, $y = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^m$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^m$

বা, $y_1 = m\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{m-1} \times \frac{d}{dx}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

বা, $y_1 = \frac{m\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m}{x+\sqrt{1+x^2}} \times \left\{1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \times (0+2x)\right\}$

বা, $y_1 = \frac{my}{x+\sqrt{1+x^2}} \times \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

CQ

প্রশ্ন-৫ সোনার বাংলা কলেজ

$$f(x) = x + \sqrt{1 + x^2} \dots \dots \dots (i)$$

$$y = 4e^x + 9e^{-x} \dots \dots \dots (ii)$$

গ. দৃশ্যকল্প-১ হতে $y = \{f(x)\}^m$ হলে দেখাও যে, $(1 + x^2)y_2 + xy_1 - m^2y = 0$

বা, $y_1 = \frac{my}{x+\sqrt{1+x^2}} \times \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$

বা, $y_1 = \frac{my}{\sqrt{1+x^2}}$

বা, $(y_1)^2 = \frac{m^2y^2}{1+x^2}$ বর্গ করে

বা, $(1 + x^2)(y_1)^2 - m^2y^2 = 0$

বা, $(1 + x^2) \times 2y_1y_2 + (y_1)^2(0 + 2x) - \mathrm{m}^2 \times 2yy_1 = 0$ অন্তরীকরণ করে

$\therefore (1 + x^2)y_2 + xy_1 - m^2y = 0$ **Showed**

DOWNLOAD THE APP

CQ

10 MINUTE SCHOOL

প্রশ্ন-৬ $f(ax) = \sec ax$ সরকারি হাজী মুহাম্মদ মহসিন কলেজ

ক. x এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}\frac{2\sqrt{x}}{1-x} - \frac{x}{2}$ এর অন্তরজ বের কর।

খ. মূলনিয়মে x এর সাপেক্ষে $y = \frac{1}{f(2x)}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

গ. $y = \sqrt{a - \{f(x)\}^{-1}}$ হলে দেখাও যে, $2yy_2 + 2y_1^2 + y^2 = a$

DOWNLOAD THE APP

CQ

10 MINUTE SCHOOL

প্রশ্ন-৬ $f(ax) = \sec ax$ সরকারি হাজী মুহাম্মদ মহসিন কলেজ

ক. x এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}\frac{2\sqrt{x}}{1-x} - \frac{x}{2}$ এর অন্তরজ বের কর।

ধরি, $y = \tan^{-1}\frac{2\sqrt{x}}{1-x} - \frac{x}{2}$

বা, $y = \tan^{-1}\frac{2\sqrt{x}}{1-(\sqrt{x})^2} - \frac{x}{2}$

বা, $y = 2\tan^{-1}\sqrt{x} - \frac{x}{2}$

বা, $\frac{d}{dx}(y) = 2\cdot\frac{d}{dx}(\tan^{-1}\sqrt{x}) - \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right)$

বা, $\frac{dy}{dx} = 2\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}$

বা, $\frac{dy}{dx} = 2\cdot\frac{1}{1+x}\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} - \frac{1}{2}$

নির্ণয়ে অন্তরজ $= \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} - \frac{1}{2}$

CQ

প্রশ্ন-৬ $f(ax) = \sec ax$ সরকারি হাজী মুহাম্মদ মহসিন কলেজ

খ. মূলনিয়মে x এর সাপেক্ষে $y = \frac{1}{f(2x)}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

দেওয়া আছে, $f(ax) = \sec ax$

বা, $f(y) = \sec y$

বা, $f(x) = \sec x$

বা, $f(2x) = \sec 2x$

ধরি, $g(x) = y = \frac{1}{f(2x)}$

$\therefore g(x) = \frac{1}{\sec 2x} = \cos 2x$

$\therefore g(x+h) = \cos(2x+2h)$

CQ

প্রশ্ন-৬ $f(ax) = \sec ax$ সরকারি হাজী মুহাম্মদ মহসিন কলেজ

খ. মূলনিয়মে x এর সাপেক্ষে $y = \frac{1}{f(2x)}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

মূল নিয়মে সংজ্ঞানুসারে পাই,

$$\frac{d}{dx}g(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(2x+2h)-\cos(2x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{2x+2h+2x}{2}\cdot\sin\frac{2x-2x-2h}{2}}{h}$$

$$= 2\lim_{h\to 0}\sin(2x+h)\cdot\frac{\sin(-h)}{h}$$

$$= -2\lim_{h\to 0}\sin(2x+h)\cdot\frac{\sin h}{h}$$

$$= -2.\sin 2x\,.\,1$$

$$= -2\sin 2x$$

নির্ণেয় অন্তরজ $= -2\sin 2x$

CQ

প্রশ্ন-৬ $f(ax) = \sec ax$ সরকারি হাজী মুহাম্মদ মহসিন কলেজ

গ. $y = \sqrt{a - \{f(x)\}^{-1}}$ হলে দেখাও যে, $2yy_2 + 2y_1^2 + y^2 = a$

দেওয়া আছে, $f(ax) = \sec ax$

$\therefore f(x) = \sec x$

দেওয়া আছে, $y = \sqrt{a - \{f(x)\}^{-1}}$

বা, $y = \sqrt{a - \{\sec x\}^{-1}}$

বা, $y^2 = a - \{\sec x\}^{-1}$

বা, $y^2 = a - \frac{1}{\sec x}$

বা, $y^2 = a - \cos x$

বা, $\cos x = a - y^2 \ldots\ldots\ldots (i)$

CQ

প্রশ্ন-৬ $f(ax) = \sec ax$ সরকারি হাজী মুহাম্মদ মহসিন কলেজ

গ. $y = \sqrt{a - \{f(x)\}^{-1}}$ হলে দেখাও যে, $2yy_2 + 2y_1^2 + y^2 = a$

বা, $\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(a - \cos x)$ [x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে]

বা, $2y.y_1 = 0 + \sin x$

বা, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(2y.y_1) = \frac{d}{dx}\sin x$ [পুনরায় অন্তরীকরণ করে]

বা, $2\left(y\frac{d}{dx}y_1 + y_1\frac{d}{dx}y\right) = \cos x$

বা, $2.y.y_2 + 2y_1.y_1 = \cos x$

বা, $2yy_2 + 2y_1^2 = a - y^2$

$\therefore 2yy_2 + 2y_1^2 + y^2 = a$ ***Showed***

CQ

প্রশ্ন-৭ $f(x) = x$ এবং $g(x) = x^2 + 1$ ময়মনসিংহ গার্লস ক্যাডেট কলেজ

ক. $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ নির্ণয় কর।

খ. $\int_1^2 \frac{dx}{\{f(x)\}^2\sqrt{5-g(x)}}$ নির্ণয় কর।

গ. $g(x)$ ও $f(y) = 10$ বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

CQ

প্রশ্ন-৭ $f(x) = x$ এবং $g(x) = x^2 + 1$ ময়মনসিংহ গার্লস ক্যাডেট কলেজ

ক. $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ নির্ণয় কর।

দেওয়া আছে, $f(x) = x$ এবং $g(x) = x^2 + 1$

$$\therefore \int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{z} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln z + c$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c$$

ধরি,

$$x^2 + 1 = z$$

$$\therefore 2x\, dx = dz$$

CQ

প্রশ্ন-৭ $f(x) = x$ এবং $g(x) = x^2 + 1$ ময়মনসিংহ গার্লস ক্যাডেট কলেজ

খ. $\int_1^2 \frac{dx}{\{f(x)\}^2\sqrt{5-g(x)}}$ নির্ণয় কর।

দেওয়া আছে, $f(x) = x$ এবং $g(x) = x^2 + 1$

$$\int_1^2 \frac{dx}{\{f(x)\}^2\sqrt{5-g(x)}}$$

$$= \int_1^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{5-(x^2+1)}}$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos\theta d\theta}{(2\sin\theta)^2\sqrt{4-(2\sin\theta)^2}}$$

ধরি,

$x = 2\sin\theta$

$\therefore dx = 2\cos\theta\ d\theta$

x	1	2
θ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$

CQ

প্রশ্ন-৭ $f(x) = x$ এবং $g(x) = x^2 + 1$ ময়মনসিংহ গার্লস ক্যাডেট কলেজ

খ. $\int_1^2 \frac{dx}{\{f(x)\}^2\sqrt{5-g(x)}}$ নির্ণয় কর।

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos\theta\, d\theta}{4\sin^2\theta . 2\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cosec}^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}[-\cot\theta]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\cot\frac{\pi}{2} + \cot\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(0 + \sqrt{3})$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}$$

নির্ণেয় মান $\frac{\sqrt{3}}{4}$

প্রশ্ন-৭ $f(x) = x$ এবং $g(x) = x^2 + 1$ ময়মনসিংহ গার্লস ক্যাডেট কলেজ

গ. $g(x)$ ও $f(y) = 10$ বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর?

এখন, $y = x^2 + 1$ ও $y = 10$ বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের মধ্যেঃ

$$y = x^2 + 1 \ldots \ldots (1)$$

$$y = 10 \ldots \ldots \ldots .. (2)$$

নির্ণয় ক্ষেত্রফল $= 2\int_0^3 (10 - x^2 - 1)dx$

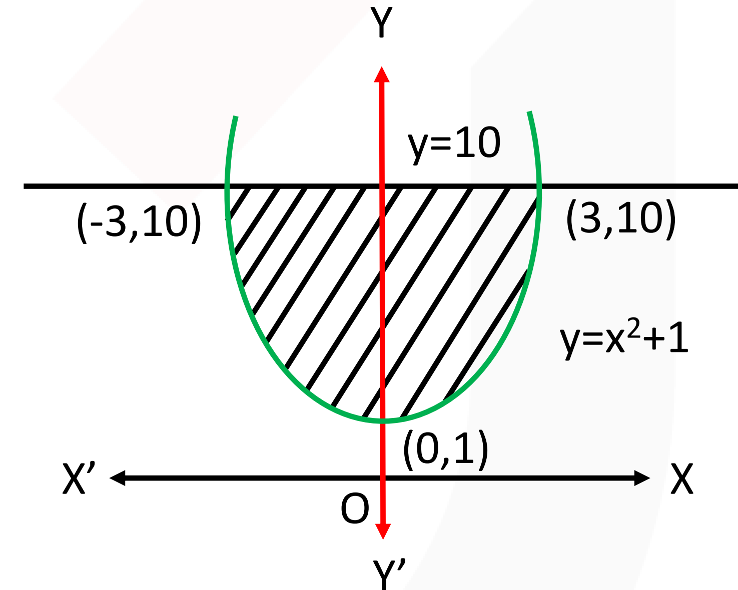
$$= 2\int_0^3 (9 - x^2)dx$$

$$= 2\left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_0^3$$

$$= 2\left(27 - \frac{27}{3}\right)$$

$$= 2 \times 18$$

$= 36$ বর্গ একক



CQ

প্রশ্ন-৮

সোনার বাংলা কলেজ

দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \frac{x+2}{(1-x)(x^2+4)}$

দৃশ্যকল্প-২: $9x^2 + 6y^2 - 144 = 0$

ক. $\int x \ln x \, dx$ নির্ণয় কর।

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে $\int f(x) \, dx$ নির্ণয় কর।

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

DOWNLOAD THE APP

CQ

10 MINUTE SCHOOL

প্রশ্ন-৮

সোনার বাংলা কলেজ

দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \frac{x+2}{(1-x)(x^2+4)}$

দৃশ্যকল্প-২: $9x^2 + 6y^2 - 144 = 0$

ক. $\int x \ln x \, dx$ নির্ণয় কর।

$\int x \ln x dx$

$= \ln x \int x dx - \int \left\{\frac{d}{dx} \ln x \int dx\right\} dx$

$= \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx$

$= \frac{x^2}{2} \ln - \frac{1}{2} \int x dx$

$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + c$

$= \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + c$

$\therefore \int x \ln x dx = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + c$

CQ

প্রশ্ন-৮

সোনার বাংলা কলেজ

দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \frac{x+2}{(1-x)(x^2+4)}$

দৃশ্যকল্প-২: $9x^2 + 6y^2 - 144 = 0$

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে $\int f(x)\, dx$ নির্ণয় কর।

মনে করি, $f(x) = \frac{x+2}{(1-x)(x^2+4)}$

$$= \frac{A}{1-x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

উভয় পক্ষকে $(1-x)(x^2+4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x + 2 = A(x^2+4) + (Bx + c)(1-x) \ldots\ldots\ldots (1)$$

এখন, (1)নং এ $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$$1 + 2 = A(1+4) + 0$$

বা, $3 = 5A$

$\therefore A = \frac{3}{5}$

CQ

প্রশ্ন-৮

সোনার বাংলা কলেজ

দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \frac{x+2}{(1-x)(x^2+4)}$

দৃশ্যকল্প-২: $9x^2 + 6y^2 - 144 = 0$

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে $\int f(x)\,dx$ নির্ণয় কর।

আবার, (1)নং এর উভয়পক্ষ হতে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$A - B = 0$$

বা, $A = B$

$\therefore B = \frac{3}{5}$

আবার, (1)নং এর উভয়পক্ষ হতে ধ্রুবক সমীকৃত করে পাই,

$$2 = 4A + C$$

বা, $3 = 4 \times \frac{3}{5} + C$

বা, $C = 2 - \frac{12}{5}$

$\therefore C = -\frac{2}{5}$

CQ

প্রশ্ন-৮

সোনার বাংলা কলেজ

দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \frac{x+2}{(1-x)(x^2+4)}$

দৃশ্যকল্প-২: $9x^2 + 6y^2 - 144 = 0$

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে $\int f(x)\,dx$ নির্ণয় কর।

$$\therefore \int \frac{x+2}{(1-x)(x^2+4)}dx$$

$$= \frac{3}{5}\int \frac{dx}{1-x} + \frac{3}{5}\int \frac{xdx}{x^2+4} - \frac{2}{5}\int \frac{dx}{x^2+4}$$

$$= -\frac{3}{5}\ln(1-x) + \frac{3}{10}\ln(x^2+4) - \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + c$$

$$= -\frac{3}{5}\ln(1-x) + \frac{3}{10}\ln(x^2+4) - \frac{1}{5}\tan^{-1}\frac{x}{2} + c$$

$$\therefore \int f(x)dx = -\frac{3}{5}\ln(1-x) + \frac{3}{10}\ln(x^2+4) - \frac{1}{5}\tan^{-1}\frac{x}{2} + c$$

CQ

প্রশ্ন-৮

সোনার বাংলা কলেজ

দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \frac{x+2}{(1-x)(x^2+4)}$

দৃশ্যকল্প-২: $9x^2 + 6y^2 - 144 = 0$

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

দেওয়া আছে, $9x^2 + 6y^2 - 144 = 0$

বা, $16y^2 = 144 - 9x^2$

বা, $y^2 = \frac{144-9x^2}{16}$

বা, $y^2 = \frac{9(16-x^2)}{16}$

বা, $y = \sqrt{\frac{9(16-x^2)}{16}}$

$\therefore y = \frac{3}{4}\sqrt{4^2 - x^2}$

প্রশ্ন-৮

সোনার বাংলা কলেজ

দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \frac{x+2}{(1-x)(x^2+4)}$

দৃশ্যকল্প-২: $9x^2 + 6y^2 - 144 = 0$

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

উপবৃত্তটি দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, $= 4\int_0^4 y\,dx$

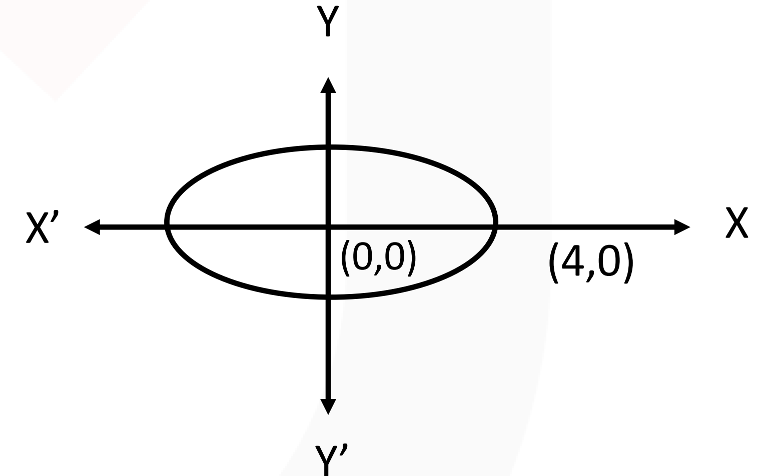
$$= 4\int_0^4 \frac{3}{4}\sqrt{4^2 - x^2}dx$$

$$= 4 \cdot \frac{3}{4}\int_0^4 \sqrt{4^2 - x^2}dx$$

$$= 3\int_0^4 \sqrt{4^2 - x^2}dx$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4^2 - 4^2\sin^2\theta} \cdot 4\cos\theta\,d\theta$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4^2(1 - \sin^2\theta)} \cdot 4\cos\theta\,d\theta$$



CQ

প্রশ্ন-৮

সোনার বাংলা কলেজ

দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \frac{x+2}{(1-x)(x^2+4)}$

দৃশ্যকল্প-২: $9x^2 + 6y^2 - 144 = 0$

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4.\cos\theta . 4\cos\theta \, d\theta$$
$$= 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta \, d\theta$$
$$= 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta$$
$$= 24\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= 24\left[\frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 0\right]$$
$$= 24 \times \frac{\pi}{2}$$
$$= 12\pi$$

ধরি,
$x = 4\sin\theta$

$\therefore dx = 4\cos\theta \, d\theta$

$x = 0$ হলে, $\theta = 0$

$x = 4$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{2}$

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 12π বর্গ একক।

MCQ

১. নিচের কোনটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স?

(ক) $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

(খ) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

(গ) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ ✔

(ঘ) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

Solve:

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_2}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

MCQ

২. যদি $a = b = c = 0$ হয় তবে $\begin{bmatrix} a & -h & -g \\ h & b & -f \\ g & f & c \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি কোন প্রকারের ম্যাট্রিক্স ?

(ক) কর্ণ ম্যাট্রিক্স

(খ) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স

(গ) বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স ✔

(ঘ) শূন্য ম্যাট্রিক্স

Solve:

$$\text{ধরি, } A = \begin{bmatrix} a & -h & -g \\ h & b & -f \\ g & f & c \end{bmatrix}$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 0 & h & g \\ -h & 0 & f \\ -g & -f & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -h & -g \\ h & 0 & -f \\ g & f & 0 \end{bmatrix} = -A$$

$\therefore A^T = -A$, সুতরাং A ম্যাট্রিক্সটি বিপ্রতিসম।

MCQ

৩. তিনটি ম্যাট্রিক্স $[x \quad y]$ $\begin{bmatrix} a & b \\ b & b \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ এর গুণফলের মান হবে -?

(ক) $[x^2a + xyh \quad xyh + y^2b]$

(খ) $[x^2a + 2xyh + y^2b]$

(গ) $\begin{bmatrix} x^2a + xyh \\ xyh + y^2b \end{bmatrix}$

(ঘ) $[2x^2a + 2xyh + y^2b]$

Solve:

$$[xy]\begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [ax + hy . hx + by]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= [x(ax + hy) + y(hx + by)]$$

$$= [x_2a + xyh + xyh + y^2b]$$

$$= [x^2a + 2xyh + y^2b]$$

MCQ

8. যদি ম্যাট্রিক্স $A = [-2 \quad -1 \quad 3]$ হয় এবং I একটি 3×3 ইউনিক ম্যাট্রিক্স হয় তাহলে $AI = ?$ [JU '11-12]

(ক) 0

(খ) $[-2 \quad -1 \quad 3]$

(গ) $[0 \quad 0 \quad 0]$

(ঘ) সংজ্ঞায়িত

Solve:

(1×3) ক্রম $\times$ (3×3) ক্রম $=$ (1×3) ক্রম

$A = [-2 \quad -1 \quad 3]$

$AI = [-2 \quad -1 \quad 3]$

MCQ

৫. A, B এবং C ম্যাট্রিক্সগুলির আকার যথাক্রমে $4 \times 5, 5 \times 4$ এবং 4×2 হলে $(A^t + B)C$ ম্যাট্রিক্সটির আকার হবে-

(ক) 5×4

(খ) 4×2

(গ) 5×2 ✓

(ঘ) 2×5

Solve:

A ম্যাট্রিক্সের আকার 4×5. অতএব, A^T ম্যাট্রিক্সের আকার হবে 5×4

$A^T + B$ ম্যাট্রিক্সের আকার 5×4

আবার, C ম্যাট্রিক্সের আকার 4×2

অতএব $(A^T + B)C$ ম্যাট্রিক্সের আকার 5×2

MCQ

৬. $\begin{vmatrix} \beta - 2 & 1 \\ -5 & \beta + 4 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের মান শূন্য হলে, β এর মান কত? [JnU. 05-06; DU '01-02]

(ক) $-2,1$

(খ) $-3, or\ 1$ ✔

(গ) $0,2$

(ঘ) কোনটি নয়

Solve:

নির্ণায়কের মান শূন্য হলে $(\beta - 2)(\beta + 4) + 5 = 0$

$$\Rightarrow \beta^2 + 4\beta - 2\beta - 8 + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \beta^2 + 2\beta - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \beta^2 + 3\beta - \beta - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \beta = -3,1$$

MCQ

৭. 3×3 আকারের একটি কর্ন ম্যাট্রিক্স D এর জন্য $|D| = 20$ হলে $|(2D)^{-1}|$ এর মান কত? [SUST: '15-16]

(ক) $\frac{1}{160}$ ✓

(খ) $\frac{1}{40}$

(গ) $\frac{1}{10}$

(ঘ) $-\frac{1}{160}$

Solve:

$$\therefore |(2D)^{-1}| = \frac{1}{|2D|}$$
$$= \frac{1}{160}$$

MCQ

৮. কোন ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুসমূহ $(1, -2), (2,5)$ এবং $(3,10)$ হলে তার ক্ষেত্রফল? [SUST: '15-16]

(ক) $10\ sq.units$

(খ) $15\ sq.units$

(গ) $4\ sq.units$

(ঘ) $18\ sq.units$

Solve:

$A \equiv (-1,-2), B \equiv (2,5),\ C \equiv (3,10)$ (Vanishing Method)

$\equiv 0,0 \qquad \equiv 3,7 \qquad \equiv 4,12$

$\Delta \equiv \frac{1}{2}(36 - 28)$

$= \frac{1}{2} \times 8$

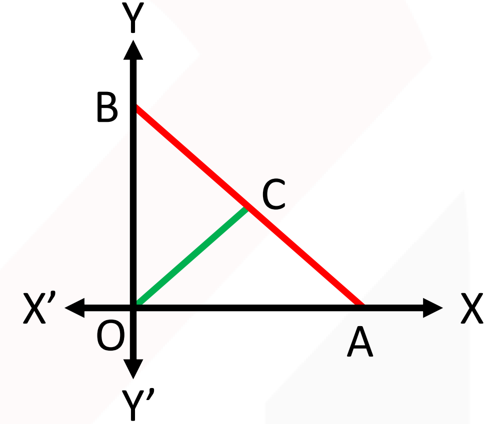
$= 4$ বর্গ একক

MCQ

নিচের উদ্দীপকে আলোকে ৯, ১০ ও ১১ নং প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

চিত্রের AB রেখার সমীকরণ

$x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ এবং $OC \perp AB$



৯. নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) $\angle OAB = \alpha$

(খ) $\angle OAB = \alpha$

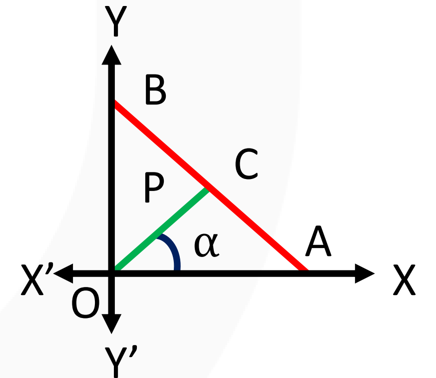
(গ) $\angle AOC = \alpha$

(ঘ) $\angle OCB = \alpha$

Solve:

মূলবিন্দু হতে কোন সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য P এবং লম্বটি x অক্ষের ধনাত্তক দিকের সাথে α কোণ উৎপন্ন করলে রেখাটির সমীকরণ হবে

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$$

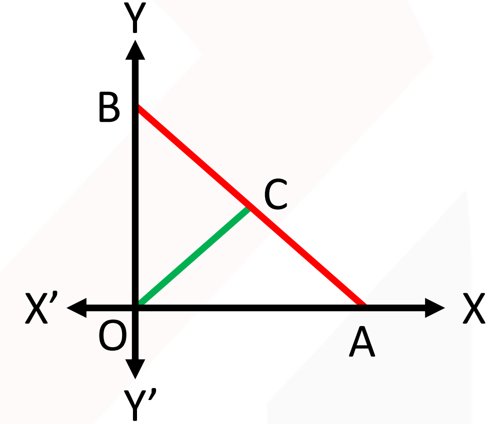


MCQ

নিচের উদ্দীপকে আলোকে ৯, ১০ ও ১১ নং প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

চিত্রের AB রেখার সমীকরণ

$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ এবং $OC \perp AB$



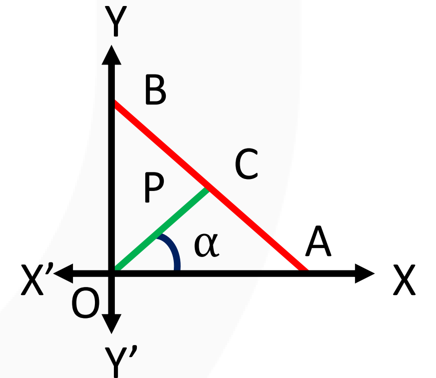
১০. $P = ?$

(ক) OA (খ) OC (গ) OB (ঘ) AB

Solve:

মূলবিন্দু হতে কোন সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য P এবং লম্বটি x অক্ষের ধনাত্তক দিকের সাথে α কোণ উৎপন্ন করলে রেখাটির সমীকরণ হবে

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$$



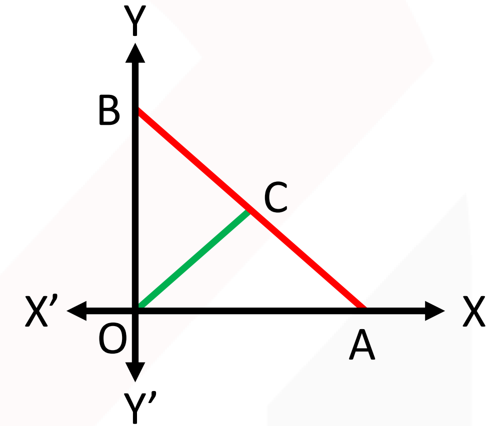
MCQ

নিচের উদ্দীপকে আলোকে ৯, ১০ ও ১১ নং প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

[DU: '03-04; HSTU: '04-05; RU: '10-11]

চিত্রের AB রেখার সমীকরণ

$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ এবং $OC \perp AB$



১১. AB রেখার ঢাল কত?

(ক) a (খ) $\tan a$ (গ) $-\cot a$ (ঘ) $-a$

Solve:

$$y\sin\alpha = -x\cos\alpha + p$$

বা, $y = \frac{-\cos a}{\sin a}x + \frac{p}{\sin a}$

$$\therefore y = (-\cot a)x + \frac{p}{\sin a}$$

MCQ

১২. $2x - y + 1 = 0$ ও $4x - y - 1 = 0$ রেখাদ্বয়ের-

(i) ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $(2x - y + 1) + k(4x - y - 1) = 0$

(ii) অন্তর্ভুক্ত সুক্ষকোণ $= \tan^{-1}\frac{2}{9}$

(iii)) অন্তর্ভুক্ত স্থুলকোণ $= 180°$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii ✓ (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

Solve :

(i) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ও $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $= \left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_2}\right)$ এবং ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $(a_1x + b_1y + c_1) + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0$

(ii) সুক্ষকোণ নির্ণয় করতে হলে [+চিহ্ন নিয়ে] $\tan\theta = \left(-\frac{2}{9}\right) \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(-\frac{2}{9}) \quad \therefore \theta = 192.53°$

(iii) $2x - y + 1 =$ এর ঢাল, $m_1 = 2$ ও $4x - y - 1 = 0$ এর ঢাল, $m_2 = 4.$

রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ Q হলে, $\tan\theta = \pm\frac{2-4}{1+8} = \pm(-\frac{2}{9})$

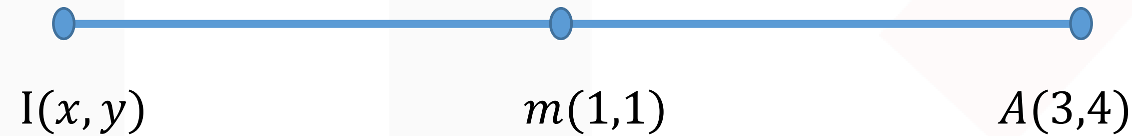
$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right) = 12.53°$ [স্থুল কোণ – চিহ্ন নিয়ে]

MCQ

১৩. $(1, 1)$ বিন্দুর সাপেক্ষে $(3, 4)$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব কোনটি? **[RU '13-14]**

(ক) $(-2, -3)$ (খ) $(-3, -4)$ (গ) $(-3, -4)$ (ঘ) $(-1, -2)$ ✔

Solve:



$$\frac{x+3}{2} = 1$$

বা, $x = -1$

$$\frac{y+4}{2} = 1$$

বা, $y = -2$

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \equiv (\mathbf{-1}, \mathbf{-2})$$

MCQ

১৪. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1} = ?$

[JnU. 12-13; CU ‘15-16]

(ক) 1

(খ) x

(গ) 2 ✔

(ঘ) 0

Solve:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1} = ?$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}$$ [La Hospital Rule]

$$= \lim_{x \to 0} 2\sqrt{1+x}$$

$$= 2$$

DOWNLOAD THE APP

MCQ

10 MINUTE SCHOOL

১৫. $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ হলে $\frac{dy}{dx}=?$ [JnU. 06-07,07-08]

(ক) $\frac{1}{x^2+1}$

(খ) $\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}$

(গ) $\frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$

(ঘ) $\frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}$

Solve:

$$y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

বা, $$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{x^2+1}\times 1-x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$=\frac{\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$=\frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}$$

MCQ

১৬. মান নির্ণয় করঃ $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

[DU. 12-13 ; RU: '15-16, 02-03, 08-09, 09-10; NU: '09-10, 05-06, 09-10]

(ক) 1 ✔

(খ) -1

(গ) 2

(ঘ) 3

Solve:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{l} \quad \text{[La Hospital Rule]}$$

$$= e^0$$

$$= 1$$

MCQ

১৭. $x^3 - 3xy + y^3 = 3$ বক্ররেখাটির $(2, 1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল- [MBSTU: '13-14, BSMRSTU: '15-16]

(ক) 3 ✓ (খ) $\frac{1}{3}$

(গ) $\sqrt{3}$ (ঘ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Solve:

$$3x^2 - 3y - 3x\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

বা, $\frac{dy}{dx}(3y^2 - 3x)3x - 3x^2$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x^2}{y^2-x}$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,1)} = \frac{1-4}{1-2} = 3$$

DOWNLOAD THE APP

MCQ

10 MINUTE SCHOOL

নিচের উদ্দীপকে আলোকে ১৮ ও ১৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

$y = e^{2x}, z = e^{-2x}$

১৮. $\frac{d}{dx}(y + z) =$কত?

(ক) $2y + 2z$

(খ) $y + x$

(গ) $z - y$

(ঘ) $2y - 2z$ ✔

Solve:

$$\frac{d}{dx}(y + z) = \frac{d}{dx}(e^{2x} + e^{-2r})$$

$$= 2(e^{2x} - e^{-2x})$$

$$= 2(y - z)$$

MCQ

নিচের উদ্দীপকে আলোকে ১৮ ও ১৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

$y = e^{2x}, z = e^{-2x}$

১৯. x এর সাপেক্ষে yz এর অন্তরজ কত?

(ক) 0 ✔

(খ) 1

(গ) $-4e^{-2x}$

(ঘ) অসংজ্ঞায়িত

Solve:

$$yz = e^{2x}e^{-2x}$$
$$= e^{2x-2x}$$
$$= e^{0}$$
$$= l$$
$$\frac{d}{dx}(yz) = 0$$

DOWNLOAD THE APP

MCQ

10 MINUTE SCHOOL

২০. $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)} dx$ সমান-

[DU. 07-08, 11-12]

(ক) $\sin(xe^x) + c$

(খ) $\tan(xe^x) + c$

(গ) $\cot(xe^x) + c$

(ঘ) $sec(xe^x) + c$

Solve:

ধরি, $xe^x = z$

$\therefore e^x(x+1)dx = dz$

$\therefore \int \frac{dz}{\cos^2 z} = \int \sec^2 z \, dz$

$= \tan z + c$

$= tan(xe^x) + c$

DOWNLOAD THE APP

MCQ

10 MINUTE SCHOOL

২১. $\int(3x-7)^7\ dx$ নির্ণয়ে যোগজ হলো- [KU. 11-12]

(ক) $\frac{4x}{10}$

(খ) $\frac{(3x-7)^8}{24}$ ✔

(গ) $\frac{3x}{7}$

(ঘ) $\frac{4}{3x}$

Solve:

$$\int (3x-7)^7 dx = \frac{1}{3} z^2 dz$$

$$= \frac{1}{24} z^8$$

$$= \frac{1}{24}(3x-7)^8$$

ধরি,

$3x - 7 = z$

বা, $dx = 3dx$

বা, $dx = \frac{dz}{3}$

MCQ

২২. $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = ?$

(ক) $2(e+1)$ (খ) $2(1-e)$ (গ) $e+1$ ✔ (ঘ) $2(e-1)$

Solve:

$$\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

ধরি, $\sqrt{x} = z$

বা, $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dz$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2dz$

$\therefore 2\int_0^1 e^2\,dz = 2[e^z]_0^1$

$= 2(e-1)$

x	0	1
z	0	1

MCQ

২৩. $y = x^2$ এবং $y = 2x$ দ্বারা আবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল কত? [PUST. 14-15]

(ক) $4\ unit^2$

(খ) $\frac{4}{3}\ unit^2$ ✓

(গ) $\frac{3}{4}\ unit^2$

(ঘ) $3\ unit^2$

Solve:

$y = x^2$ এবং $y = 2x$

$\therefore 2x = x^2$

$\therefore x = 0, 2$

$$\int_0^2 (x^2 - 2x)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right]_0^2$$

$$= \left[\frac{8}{3} - 4\right]$$

$$= \frac{4}{3}\ unit^2$$

MCQ

২৪. $y^2 = 4ax$ এবং $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত দুটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কোনটি? [IU. 15-16]

(ক) $\frac{16a^2}{3}$ $unit^2$ ✓

(খ) $\frac{18a^2}{8}$ $unit^2$

(গ) $\frac{18a^2}{3}$ $unit^2$

(ঘ) $\frac{28a^2}{8}$ $unit^2$

Solve:

$$y^2 = 4ax \text{ এবং } x^2 = 4ay$$

পরাবৃত্ত দুটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{4a \times 4a}{3} = \frac{16a^2}{3}$

DOWNLOAD THE APP

MCQ

10 MINUTE SCHOOL

[দি.বো '১৭]

২৫. $\frac{d^n}{dx^n}(x^n)$ এর মান কোন কোনটি?

(ক) $n!$

(খ) x

(গ) 1

(ঘ) 0

Solve:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(x^n) = n(n-1)x^{n-2}$$

$$\frac{d^3}{dx^3}(x^n) = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^n) = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots3.2\cdot x^{n-n}$$

$$= n(n-1)(n-2)\ldots\ldots3.2.1 = n!$$

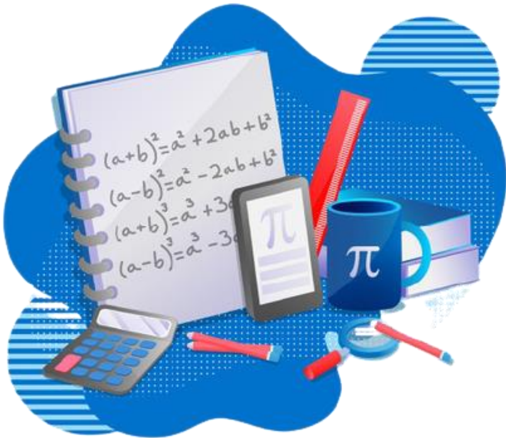




উচ্চতর গনিত ২য় পত্র

সেট-২

Solve





CQ

০১. $h(x) = px^2 + qx + 1, g(x) = qx^2 + px + 1$ এবং $f(x) = ax^2 + bx + c.$

ক) $f(x) = 0$ এর মূল ও সহগ এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

খ) $h(x) = 0$ এবং $g(x) = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে অপর মূলদ্বয় বিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় কর।

গ) $f(x) = 0$ এর একটি মূল $cx^2 + bx + a = 0$ এর একটি মূলের দ্বিগুণ হলে, দেখাও যে, $2a = c$ অথবা $2a + c \pm \sqrt{2}b.$

CQ

০১. $h(x) = px^2 + qx + 1, g(x) = qx^2 + px + 1$ এবং $f(x) = ax^2 + bx + c.$

ক) $f(x) = 0$ এর মূল ও সহগ এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

ক) $f(x) = 0$

$\therefore \quad ax^2 + bx + c = 0$

বা, $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

ধরি,

(1) নং সমীকরণের মূল দুইটি α ও β

তাহলে, (1) সমিকরনের সমতুল্য দুইটি উৎপাদক $(x - \alpha), (x - \beta)$

শর্তানুসারে, $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - \alpha)\ (x - \beta)$

বা, $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$

CQ

০১. $h(x) = px^2 + qx + 1, g(x) = qx^2 + px + 1$ এবং $f(x) = ax^2 + bx + c.$

ক) $f(x) = 0$ এর মূল ও সহগ এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

ক) উভয়পক্ষ থেকে x এর সহগ এবং ধ্রুবক পদ সমিকৃত করে পাই,

$-(\alpha + \beta) = \frac{b}{a}$

বা, $\alpha + \beta = (-1)\frac{b}{a} = -\frac{b}{a}$ Ges $\alpha\beta = (-1)^2\frac{c}{a} = \frac{c}{a}$

সুতরাং, $f(x)$ এর মূল ও সহগের মধ্যে সম্পর্ক, $\alpha + \beta = \frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

CQ

০১. $h(x) = px^2 + qx + 1, g(x) = qx^2 + px + 1$ এবং $f(x) = ax^2 + bx + c.$

খ) $h(x) = 0$ এবং $g(x) = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে অপর মূলদ্বয় বিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় কর।

খ) প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় $h(x) = 0$

বা, $px^2 + qx + 1 = 0$..(1)

বা, $g(x) = 0$

বা, $qx^2 + px + 1 = 0$..(2)

ধরি, (1) এবং (2) নং সমিকরণের মূল α যা দ্বারা উভয় সমিকরণদ্বয় সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ $p\alpha^2 + q\alpha + 1 = 0$ Ges $q\alpha^2 + p\alpha + 1 = 0$ সমীকরণ হতে বজ্রগুনন করে পাই,

$$\frac{\alpha^2}{q-p} = \frac{\alpha}{q-p} = \frac{1}{p^2-q^2}$$

অর্থাৎ, $\alpha = \frac{q-p}{q-p} = 1$ $\therefore \alpha = 1$

CQ

০১. $h(x) = px^2 + qx + 1, g(x) = qx^2 + px + 1$ এবং $f(x) = ax^2 + bx + c.$

খ) $h(x) = 0$ এবং $g(x) = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে অপর মূলদ্বয় বিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় কর।

খ) এবং $\alpha = \frac{q-p}{q^2-p^2} = 1$

$\therefore \frac{q-p}{q^2-p^2} = 1$

বা, $p^2 - q^2 = q - p$

বা, $(p+q)(p-q) = q - p$

বা, $p + q = \frac{q-p}{p-q}$

বা, $p + q = \frac{-(p-q)}{(p-q)}$

$\therefore p + q = -1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

আবার ধরি, (1) ও (2) নং সসমীকরণের অপর মূলদ্বয় যথাক্রমে α ও β

$\therefore \alpha\beta = \frac{1}{p}$

বা, $1.\beta = \frac{1}{p}$

CQ

০১. $h(x) = px^2 + qx + 1, g(x) = qx^2 + px + 1$ এবং $f(x) = ax^2 + bx + c.$

খ) $h(x) = 0$ এবং $g(x) = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে অপর মূলদ্বয় বিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় কর।

খ) এবং $\alpha\gamma = \frac{1}{q}$ ev, $1.\gamma = \frac{1}{q}$

$\therefore \ \gamma = \frac{1}{q}$

এখন, α ও β দ্বারা গঠিত সমীকরণ

$x^2 - (\beta + \gamma)x + \frac{1}{p}.\frac{1}{q} = 0$

বা, $x^2 - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)x + \frac{1}{p}.\frac{1}{q} = 0$

বা, $pqx^2 - \left(\frac{p+q}{pq}\right)x + \frac{1}{pq} = 0$

নির্ণেয় সমীকরণ , $pqx^2 - (p + q)x + 1 = 0$

CQ

০১. $h(x) = px^2 + qx + 1, g(x) = qx^2 + px + 1$ এবং $f(x) = ax^2 + bx + c.$

গ) $f(x) = 0$ এর একটি মূল $cx^2 + bx + a = 0$ এর একটি মূলের দ্বিগুণ হলে, দেখাও যে, $2a = c$ অথবা $2a + c \pm \sqrt{2}b.$

গ) দেওয়া আছে, $f(x) = 0$ ev $ax^2 + bx + c = 0$.............(1)

এবং $cx^2 + bx + a = 0$.............(2)

মনেকরি, (2) নং সমিকরণের একটি মূল α.

তাহলে, (1) নং সমিকরণের একটি মূল 2α.

(1) নং এ $x = 2\alpha$ এবং (2) নং এ $x = \alpha$ বসিয়ে পাই,

$4a\alpha^2 + 2b\alpha + c = 0$ Ges $c\alpha^2 + b\alpha + a = 0$

বজ্রগুনন করে পাই, $\frac{\alpha^2}{2ab-bc} = \frac{\alpha}{c^2-4a^2} = \frac{1}{4ab-2bc}$

$\therefore \alpha = \frac{2ab-bc}{c^2-4a}$ এবং $\alpha = \frac{2ab-bc}{c^2-4a}$

CQ

০১. $h(x) = px^2 + qx + 1, g(x) = qx^2 + px + 1$ এবং $f(x) = ax^2 + bx + c$.

গ) $f(x) = 0$ এর একটি মূল $cx^2 + bx + a = 0$ এর একটি মূলের দ্বিগুণ হলে, দেখাও যে, $2a = c$ অথবা $2a + c \pm \sqrt{2}b$.

গ) এখন, $\frac{2ab-bc}{c^2-4a^2} = \frac{c^2-4a^2}{4ab-2bc}$

বা, $(c^2 - 4a^2)^2 = (2ab - bc)(4ab - 2bc)$

বা, $\{(c + 2a)(c - 2a)\}^2 = b(2a - c).2b(2a - c)$

বা, $(2a - c)^2(c + 2a)^2 = 2b^2(2a - c)^2$

বা, $(2a - c)^2\{(c + 2a)^2 - 2b^2\} = 0$

বা, $(2a - c)^2\{(c + 2a)^2 - 2b^2\} = 0$

$\therefore (2a - c)^2 = 0$ অথবা, $(c + 2a)^2 - 2b^2 = 0$

বা,$2a = c$ বা, $(2a + c)^2 = 2b^2 = 0$

$2a + c = \pm\sqrt{2b}$

সুতরাং, $2a = c$ অথবা $2a + c = \pm\sqrt{2b}$ (দেখানো হল)

CQ

০২.

$i)$ $x^4 - 5x^3 + 7x + 13 = 0$ এর একটি মূল $3 + 2i$

$ii)$ $x^2 + (4k + 1)x + 2k + 3 = 0$ এর মূলদ্বয়ের পার্থক্য 1.

ক) $2x^2 + x + 3 = 0$ সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর।

খ) (i) সমীকরণটি সমাধান কর।

গ) (ii) সমীকরণ থেকে k এর মান নির্ণয় কর।

CQ

০২. $i)$ $x^4 - 5x^3 + 7x + 13 = 0$ এর একটি মূল $3 + 2i$

$ii)$ $x^2 + (4k + 1)x + 2k + 3 = 0$ এর মূলদ্বয়ের পার্থক্য 1.

ক) $2x^2 + x + 3 = 0$ সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর।

খ) (i) সমীকরণটি সমাধান কর।

ক) প্রদত্ত সমীকরণ, $2x^2 + x + 3 = 0$

$\therefore$ পৃথায়ক $= 1^2 - 4.2.3$

$= 1 - 24 = -23 < 0$ এবং ঋণাত্মক

সুতরাং সমীকরণটির মূলদ্বয় অবাস্তব অর্থাৎ জটিল ও একে অপরের অনুবন্ধী হবে।

খ) (i) নং সমীকরণ $x^4 - 5x^3 + 7x + 13 = 0$; এখানে সমীকরণটির একটি মূল হবে $3 - 2i$ মূল দুইটি দ্বারা গঠিত

সমিকরণ, $x^2 - (3 + 2i + 3) - 2i)x + (3 + 2i)(3 - 2i) - 0$

বা, $x^2 - 6x + 3^2 - (2i)^2 = 0$

CQ

০২. $i)$ $x^4 - 5x^3 + 7x + 13 = 0$ এর একটি মূল $3 + 2i$

$ii)$ $x^2 + (4k + 1)x + 2k + 3 = 0$ এর মূলদ্বয়ের পার্থক্য 1.

খ) (i) সমীকরণটি সমাধান কর।

বা, $x^2 - 6x + 9 - 4 = 0$

বা, $x^2 - 6x + 13 = 0$

$\therefore (i)$ নং সমীকরণের একটি উৎপাদক হবে, $x^2 - 6x + 13$

$\therefore x^4 - 5x^3 + 8x^2 + 13 = 0$

বা, $x^4 - 6x^3 + 13x^2 + x^3 - 6x^2 + 13x + x^2 - 6x + 13 = 0$

বা, $x^2(x^2 - 6x + 13) + x(x^2 - 6x + 13) + 1(x^2 - 6x + 13) = 0$

বা, $(x^2 - 6x + 13) + (x^2 + x = 1) = 0$

$\therefore x^2 + x + 1 = 0$

বা, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.1}}{2.1}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

নির্ণেয় মূলগুলো $x = 3 + 2i, 3 - 2i, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

CQ

০২. $i)$ $x^4 - 5x^3 + 7x + 13 = 0$ এর একটি মূল $3 + 2i$

$ii)$ $x^2 + (4k + 1)x + 2k + 3 = 0$ এর মূলদ্বয়ের পার্থক্য 1.

গ) (ii) সমীকরণ থেকে k এর মান নির্ণয় কর।

গ) (ii) নং সমীকরণ, $x^2 + (4k + 1)x + 2k + 3 = 0$

ধরি, সমীকরণটির মূলদ্বয় α ও β

$\therefore$ মূলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha + \beta = 1(4k + 1)x + 2k + 3 = 0$ এবং মূলদ্বয়ের গুণফল $\alpha\beta = 2k + 3$

শর্তানুসারে,

$|\alpha - \beta| = 1$

বা, $(\alpha - \beta)^2 = 1$ [eM© K‡i]

বা $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1$

বা $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1$

বা $\{-(4k + 1)^2 - 4.(2k + 3) = 1$

বা, $\{-(4k + 1)^2 - 4.(2k + 3) = 1$

CQ

০২. $i)$ $x^4 - 5x^3 + 7x + 13 = 0$ এর একটি মূল $3 + 2i$

$ii)$ $x^2 + (4k + 1)x + 2k + 3 = 0$ এর মূলদ্বয়ের পার্থক্য 1.

গ) (ii) সমীকরণ থেকে k এর মান নির্ণয় কর।

বা $(4k + 1)^2 - 8k - 12 = 1$

বা, $6k^2 + 8k + 1 - 8k - 12 = 1$

বা $6k^2 = 12$

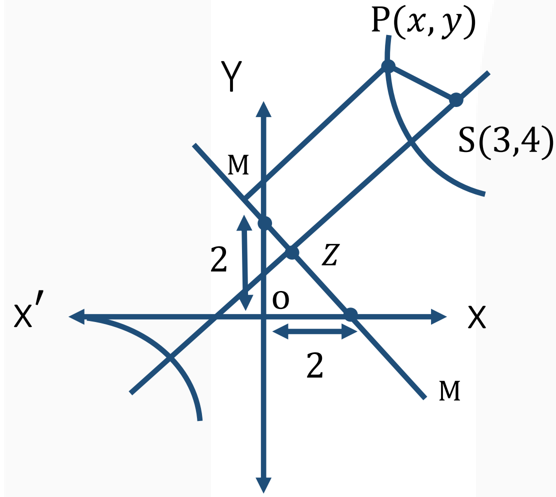
বা $k^2 = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

বা $k^2 = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$ $\therefore$ $k = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

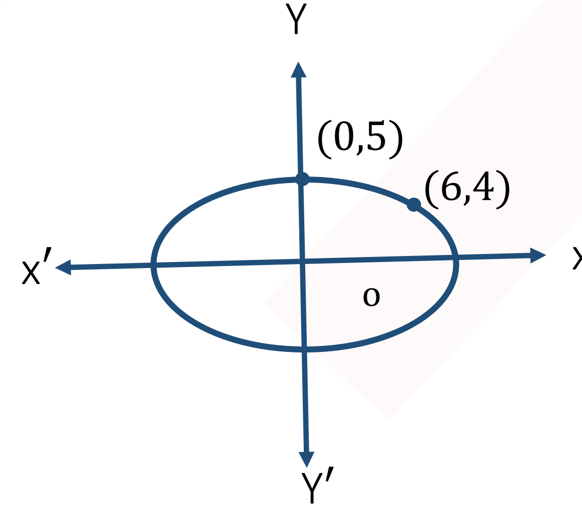
নির্ণেয় মান = $k = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$।

CQ

০৩. উদ্দীপকের আলোকে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:



দৃশ্যকল্প-১



দৃশ্যকল্প-২

ক) $y^2 = 6x$ পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

খ) দৃশ্যকল্প-১ এ $e = \frac{1}{3}$ হলে, P বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

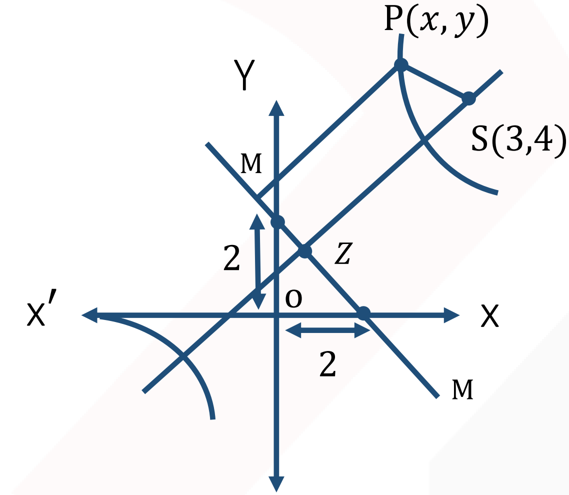
গ) দৃশ্যকল্প-২ এর কণিকটির উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

CQ

০৩. উদ্দীপকের আলোকে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

ক) $y^2 = 6x$ পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

খ) দৃশ্যকল্প-১ এ $e = \frac{1}{3}$ হলে, P বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।



দৃশ্যকল্প-১

ক) প্রদত্ত পরাবৃত্তের সমীকরণ, $y^2 = 6x$

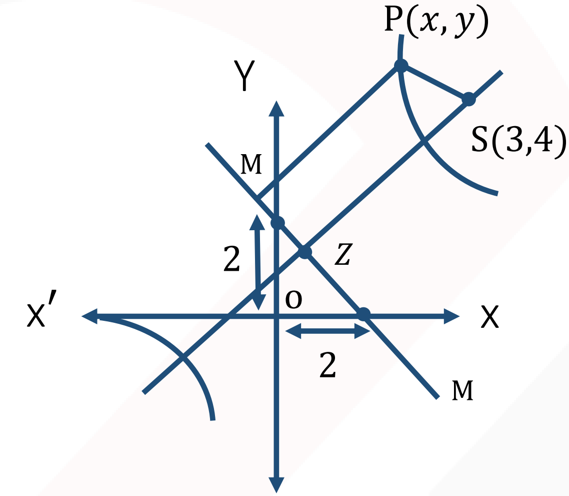
বা, $y^2 = 4.\frac{3}{2}x$ কে পরাবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ $y^2 = 4ax$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = \frac{3}{2}$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য = $|4a|$একক= 6একক

খ) এখানে $e = \frac{1}{3}$ হলে, $e < 1$ হয়। সুতরাং P বিন্দুর সঞ্চার পথটি একটি উপবৃত্ত হবে।

MZ নিয়ামক রেখাটি x – অক্ষকে $(2,0)$এবং y অক্ষকে$(0,2)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

CQ



০৩. উদ্দীপকের আলোকে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

খ) দৃশ্যকল্প-১ এ $e = \frac{1}{3}$ হলে, P বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

$\therefore$ নিয়ামক রেখার সমীকরণ,

$$\frac{x-2}{2-0} = \frac{y-0}{0-2}$$

বা $\frac{x-2}{2-0} = \frac{y}{-2}$

বা, $y + x - 2 = 0$

এখানে, উপকেন্দ্র $S(3,4)$, উপবৃত্তের উপর একটি বিন্দু $P(x, y)$ এবং নিয়ামক রেখা $x + y - 2 = 0$

নিয়ামক রেখার সমিকরণ,

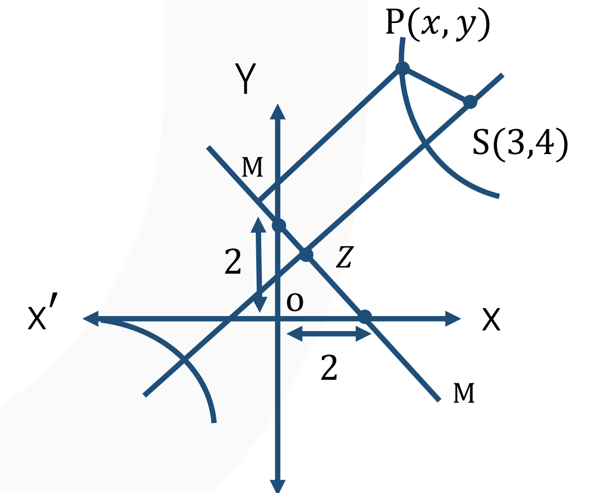
$$SP = ePM$$

বা $\sqrt{(x-3)^2 + y - 4)^2} = \frac{1}{3}\left|\frac{x+y-2}{\sqrt{1^2+1^2}}\right|$

বা $(x-3)^2 + (y-4)^2 = \frac{1}{9}\frac{(x+y-2)^2}{1+1}$

$\therefore 17(x^2 + y^2) + 2xy - 104x - 140y + 446 = 0$

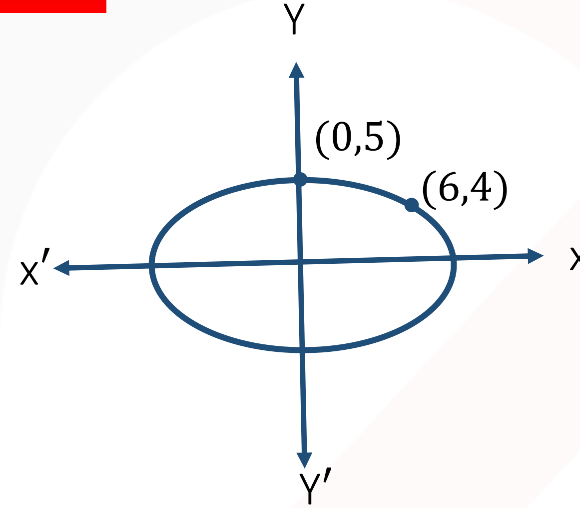
যা নির্ণেয় P বিন্দুর সঞ্চার পথের সমীকরণ.



CQ

০৩. উদ্দীপকের আলোকে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

গ) দৃশ্যকল্প-২ এর কণিকটির উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।



দৃশ্যকল্প-২

গ) এখানে, এর কণিকটি একটি উপবৃত্ত।

ধরি, উপবৃত্তটির সমীকরণ,

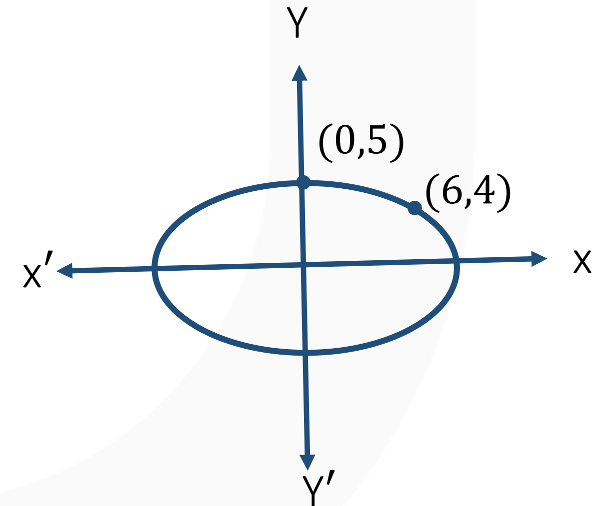
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

উপবৃত্তটি $(6,4)$ এবং $(0,5)$ বিন্দুগামী

$$\therefore \frac{36}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

এবং $\frac{0}{a^2}+\frac{25}{b^2}=1 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

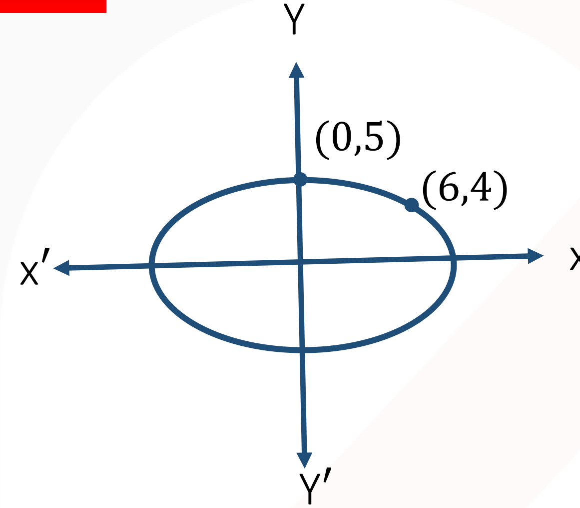
বা, $\frac{25}{b^2}=1 \quad \therefore \quad b^2=25$



CQ

০৩. উদ্দীপকের আলোকে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

গ) দৃশ্যকল্প-২ এর কণিকটির উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।



দৃশ্যকল্প-২

গ) $\frac{x^2}{100} + \frac{y}{25} = 1$

বা, $\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ কে উপবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 10, b = 5;$

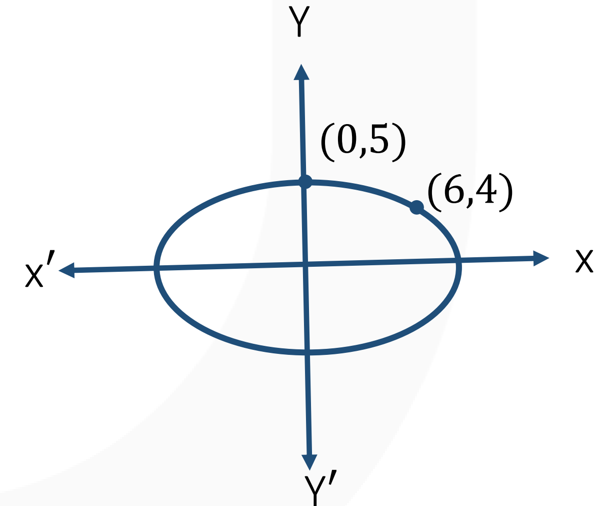
এখানে, $a > b$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{25}{100}} = \sqrt{\frac{75}{100}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ উপবৃত্তকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাংক = $(\pm ae, 0)$

= $\left(\pm 10.\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) = (\pm 5\sqrt{3}, 0)$

$\therefore$ দৃশ্যকল্প-২ এর কণিকটির উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(\pm 5\sqrt{3}, 0)$



CQ

8. $A = x, \quad B = y, \quad a = 2, \quad b = 3.$

ক) শীর্ষ $(-2,1)$ এবং উপকেন্দ্র $(1,1)$ বিশিষ্ট পরাবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

খ) $\frac{A^2}{a^2} + \frac{B^2}{b^2} = b - a$ উপবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্ব নির্ণয় কর। (চিত্র আবশ্যক)

গ) $(-a, b)$ উপকেন্দ্র, উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{a}$এবং $aA - bB = ab$ নিয়ামক বিশিষ্ট অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। (চিত্র আবশ্যক)

8. $A = x, \quad B = y, \quad a = 2, \quad b = 3.$

ক) শীর্ষ $(-2,1)$ এবং উপকেন্দ্র $(1,1)$ বিশিষ্ট পরাবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

ক) পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্র $S(1,1)$ এবং শীর্ষবিন্দু $A(-2,1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাটি তার অক্ষরেখা।

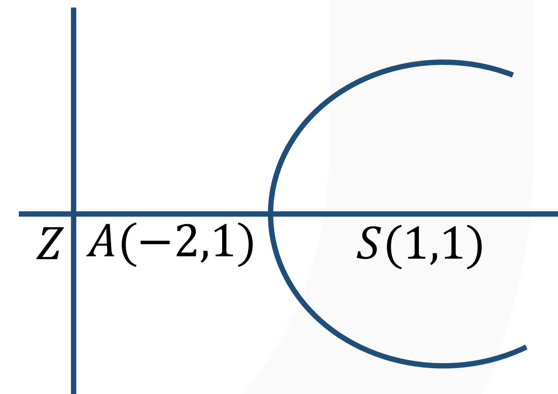
মনে করি, অক্ষরেখাটি নিয়ামকরেখাকে $Z(\alpha, \beta)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

যেহেতু $AS = AZ$

$\therefore \quad -2 = \frac{\alpha+1}{2}$ এবং $1 = \frac{\beta+1}{2}$

বা, $\alpha + 1 = -4$ বা, $\beta + 1 = 2$

$\therefore \quad \alpha = -5$ বা, $\beta = 1$



$\therefore Z$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-5,1)$

অক্ষরেখার ঢাল$= \frac{1-1}{1+2} = \frac{0}{3} = 0$

নিয়ামক রেখার সমীকণ,

$y - 1 = 0(x+5)$ বা, $y - 1 = 0$

8. $A = x, \quad B = y, \quad a = 2, \quad b = 3.$

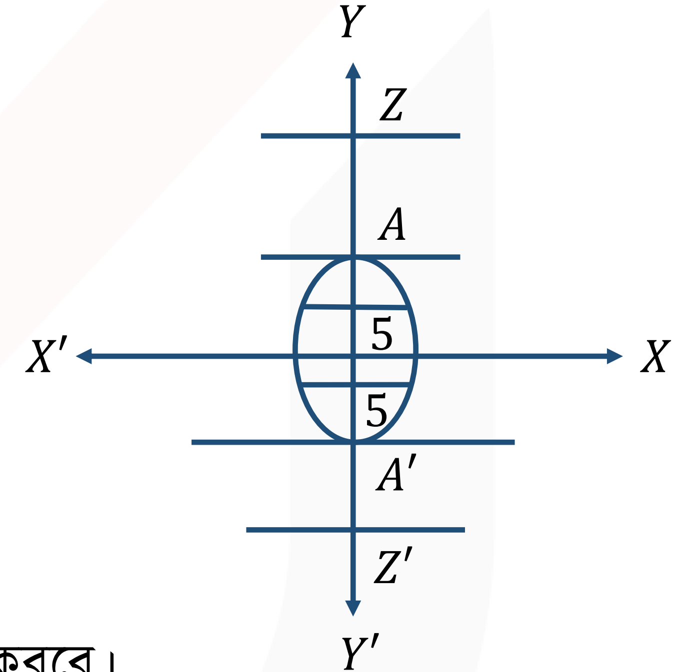
খ) $\frac{A^2}{a^2} + \frac{B^2}{b^2} = b - a$ উপবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্ব নির্ণয় কর। (চিত্র আবশ্যক)

খ) এখানে, $\frac{A^2}{a^2} + \frac{B^2}{b^2} = b - a$

$A = x, B = y, a = 2, b = 3$,

$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 3 - 2$

বা, $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ এখানে, $b > a$



সুতরাং উপবৃত্তটির বৃহদাক্ষটিy - অক্ষ বরাবর এবং ক্ষুদ্রাক্ষটি x-অক্ষ বরাবর অবস্থান করবে।

এক্ষেত্রে উপবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্ব = $\frac{2a^2}{b} = \frac{2.2^2}{3} = \frac{8}{3}$ একক

CQ

৫. $f(x) = sin^{-1}x, g(x) = cos^{-1}x, h(x) = tan^{-1}x$

ক) প্রমাণ কর যে, $f(\sqrt{2}\sin\theta) + f(\sqrt{\cos 2\theta}) = \frac{\pi}{2}$

খ) প্রমাণ কর যে, $g(\frac{1}{\sqrt{5}}) - \frac{1}{2}f(\frac{3}{5}) + h\left(\frac{1}{3}\right) = h(2)$

গ) $tan(\pi \cot\theta) = cot(\pi \tan\theta)$ হলে দেখাও যে, $tan\,\theta = \frac{1}{4}(2n + 1 \pm \sqrt{4n - 15})$ যেখানে $n \in \mathbb{Z}$ এবং $n < -2$ অথবা $n > 1$.

CQ

৫ . $f(x) = sin^{-1}x, g(x) = cos^{-1}x, h(x) = tan^{-1}x$

ক) প্রমাণ কর যে, $f(\sqrt{2}\sin\theta) + f(\sqrt{\cos 2\theta}) = \frac{\pi}{2}$

ক) $L.H.S. = \sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta) + \sin^{-1}(\sqrt{\cos 2\theta})$

$= \cos^{-1}\sqrt{1-(\sqrt{2}\sin\theta)^2} + \sin^{-1}(\sqrt{\cos 2\theta})$ $[\sin^{-1}x = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2}]$

$= \cos^{-1}\sqrt{1-2\sin^2\theta} + \sin^{-1}(\sqrt{\cos 2\theta})$

$= \cos^{-1}(\sqrt{\cos 2\theta}) + \sin^{-1}(\cos\theta)$

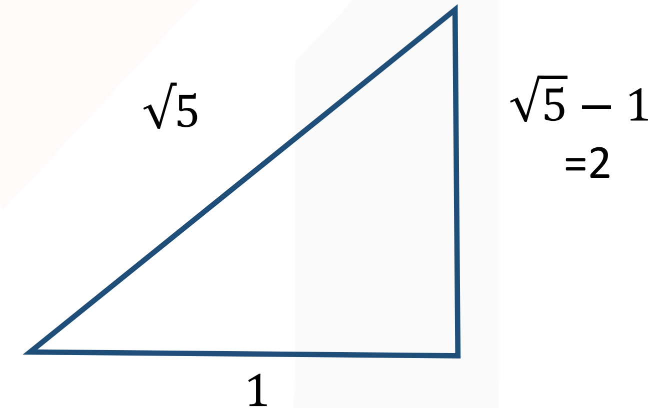
$= \frac{\pi}{2} = R.H.S.$ $[\sin^{-1}x = \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}]$

৫. $f(x) = sin^{-1}x, g(x) = cos^{-1}x, h(x) = tan^{-1}x$

খ) প্রমাণ কর যে, $g(\frac{1}{\sqrt{5}}) - \frac{1}{2}f(\frac{3}{5}) + h\left(\frac{1}{3}\right) = h(2)$

খ)

উপরের চিত্র হতে পাই $cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} = tan^{-1}2$



মনেকরি, , $\frac{1}{2}sin^{-1}\frac{3}{5} = \theta$ | তাহলে, $sin\,2\,\theta = \frac{3}{5}$

$tan\,\theta = \frac{sin\,\theta}{cos\,\theta} = \frac{2\,sin\,\theta}{2\,sin\,\theta\,cos\,\theta} = \frac{1-cos\,2\theta}{sin\,2\theta}$

$= \frac{1-\sqrt{1-sin^2 2\theta}}{sin\,2\theta} = \frac{1-\sqrt{1-\frac{9}{25}}}{\frac{3}{5}} = \frac{1-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$

$\therefore \theta = tan^{-1}\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{2}sin^{-1}\frac{3}{5} = tan^{-1}\frac{1}{3}$

$L.H.S. = cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} - sin^{-1}\frac{3}{5} + tan^{-1} = tan^{-1}2 - tan^{-1}\frac{1}{3} = + tan^{-1}\frac{1}{3} = tan^{-1}2 = R.H.S.$

CQ

৫. $f(x) = sin^{-1}x, g(x) = cos^{-1}x, h(x) = tan^{-1}x$

গ) $tan(\pi \cot\theta) = cot(\pi \tan\theta)$ হলে দেখাও যে, $\tan\theta = \frac{1}{4}\left(2n + 1 \pm \sqrt{4n - 15}\right)$ যেখানে $n \in {}_{\mathbb{Z}}$এবং $n < -2$ অথবা $n > 1.$

গ) দেওয়া আছে,

$$\tan(\pi \cot\theta) = \cot(\pi \tan\theta)$$

$$\Rightarrow \cot(\pi \tan\theta) = \tan(\pi \cot\theta)$$

$$\Rightarrow \quad \cot(\pi \tan\theta) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \pi \cot\theta\right) \pi \tan\theta \quad = n\pi + \frac{\pi}{2} - \pi \cot\theta$$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta + \cot\theta = n + \frac{1}{2} = (2n+1)\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} - \frac{1}{2}(2n+1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tan^2\theta - \frac{1}{2}(2n+1)\tan\theta + 1 = 0$$

CQ

৫. $f(x) = sin^{-1}x, g(x) = cos^{-1}x, h(x) = tan^{-1}x$

গ) $tan(\pi\cot\theta) = cot(\pi\tan\theta)$ হলে দেখাও যে, $\tan\theta = \frac{1}{4}\left(2n + 1 \pm \sqrt{4n - 15}\right)$ যেখানে $n \in {}_{\mathbb{Z}}$এবং $n < -2$ অথবা $n > 1$.

গ)

$$\therefore \tan\theta = \frac{\frac{1}{2}(2n+1) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(4n^2+4n+1) - 4.1.1}}{2.1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(2n+1) \pm \frac{1}{2}\sqrt{4n^2+4n+1-16}}{2}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{1}{2}(2n+1) \pm \sqrt{4n^2+4n-15} \text{ (Showed)}$$

CQ

৬. দৃশ্যকল্প-১: $f(a) = \sec^{-1}\frac{1}{a} + \sec^{-1}\frac{1}{b}$

দৃশ্যকল্প-২: $g(\alpha) = sin(\pi\, cos\, \alpha) - cos\, (\pi\, sin\, \alpha)$

ক. $\cot^{-1}(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}})$ এর মান নির্ণয় কর

খ. দৃশ্যকল্প-২ হতে যদি $g(\alpha) = 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $\alpha = \pm\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$.

গ. দৃশ্যকল্প-১ হতে $f(a) = \alpha$ হলে প্রমাণ কর যে, $\sin\alpha = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$.

CQ

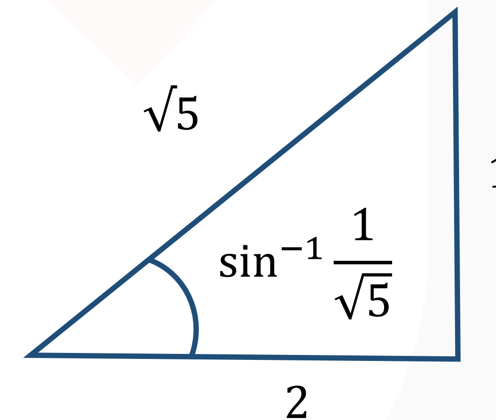
৬. দৃশ্যকল্প-১: $f(a) = \sec^{-1}\frac{1}{a} + \sec^{-1}\frac{1}{b}$

দৃশ্যকল্প-২: $g(\alpha) = \sin(\pi \cos\alpha) - \cos(\pi \sin\alpha)$

ক. $\cot^{-1}(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}})$ এর মান নির্ণয় কর

ক। প্রদত্ত রাশি, $= \cot(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} = \cot(\cot^{-1} 2) = 2$

$$\therefore \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} = \cot^{-2}\frac{2}{1} = \cot^{-1} 2$$



নির্ণেয় মান= 2

CQ

৬. দৃশ্যকল্প-১: $f(a) = \sec^{-1}\frac{1}{a} + \sec^{-1}\frac{1}{b}$

দৃশ্যকল্প-২: $g(\alpha) = sin(\pi\, cos\, \alpha) - cos\,(\pi\, sin\, \alpha)$

খ. দৃশ্যকল্প-২ হতে যদি $g(\alpha) = 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $\alpha = \pm\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$.

খ। দেওয়া আছে,

$g(\alpha) = \sin(\pi cos\alpha) - \cos(\pi sin\alpha)$

$g(\alpha) = 0$ হলে, $\sin(\pi cos\alpha) - \cos(\pi sin\alpha) = 0$

$\Rightarrow \sin(\pi cos\alpha) = \cos(\pi sin\alpha)$

$\Rightarrow \sin(\pi cos\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \pi sin\alpha\right)$

$\Rightarrow \pi cos\alpha = \left(\frac{\pi}{2} \pm \pi sin\alpha\right)$

$\Rightarrow cos\alpha = \left(\frac{1}{2} \pm sin\alpha\right)$

$\Rightarrow cos\alpha \pm sin\alpha = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow (cos\alpha \pm sin\alpha)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\Rightarrow \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \pm 2\cos\alpha\sin\alpha = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow 1 \pm sin2\alpha = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \pm sin2\alpha = \frac{1}{4} - 1$

$\Rightarrow \pm sin2\alpha = \frac{-3}{4}$

$\Rightarrow sin2\alpha = \pm\frac{-3}{4}$

$\Rightarrow 2\alpha = \pm\sin^{-1}\frac{-3}{4}$

$\therefore \alpha = \pm\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{-3}{4}$ (দেখানো হল)

CQ

৬. দৃশ্যকল্প-১: $f(a) = \sec^{-1}\frac{1}{a} + \sec^{-1}\frac{1}{b}$

দৃশ্যকল্প-২: $g(\alpha) = sin(\pi\, cos\, \alpha) - cos\, (\pi\, sin\, \alpha)$

গ. দৃশ্যকল্প-১ হতে $f(a) = \alpha$ হলে প্রমাণ কর যে, $\sin\alpha = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$

গ। দেওয়া আছে, $f(a) = \sec^{-1}\frac{1}{a} + \sec^{-1}\frac{1}{b}$

$f(a) = \alpha$ হলে, $\sec^{-1}\frac{1}{a} + \sec^{-1}\frac{1}{b} = \alpha$

$\Rightarrow \cos^{-1}a + \cos^{-1}b = \alpha$

$\Rightarrow \cos^{-1}\left\{ab - \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\right\} = \alpha$

$\Rightarrow ab - \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} = cos\alpha$

$\Rightarrow ab - cos\alpha = \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}$

$\Rightarrow (ab - cos\alpha)^2 = (1-a^2)(1-b^2)$

$\Rightarrow a^2b^2 - 2abcos\alpha + \cos^2\alpha = 1 - b^2 - a^2 + a^2b^2$

$\Rightarrow a^2b^2 - 2abcos\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$\Rightarrow a^2b^2 - 2abcos\alpha = \sin^2\alpha$

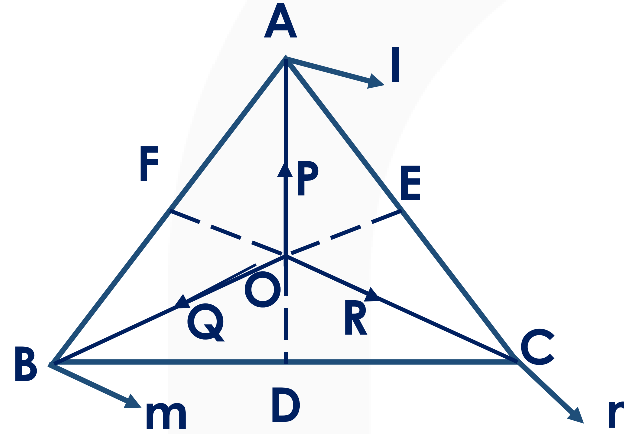
$\Rightarrow \sin^2\alpha = a^2\, b^2 - 2abcos\alpha$

$\Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{a^2b^2 - 2abcos\alpha}$

$\therefore \sin\alpha = \sqrt{a^2b^2 - 2abcos\alpha}$ (প্রমানিত)

CQ

০৭.



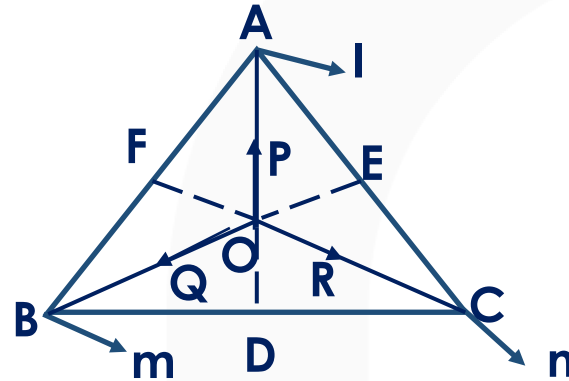
ক) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P, Q বলদ্বয়ের লব্ধি তাদের সমষ্টির এক-তৃতীয়াংশ হলে প্রমাণ কর যে, বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ $\alpha = cos^{-1}\frac{PQ-4(P^2+Q^2)}{9PQ}$.

খ) উদ্দীপকে উল্লেখিত সমবিন্দুগামী বলগুলো ত্রিভুজ ABC এর অন্তঃকেন্দ্র O তে সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করলে প্রমাণ কর যে, $P:Q:R = cos\frac{A}{2}:cos\frac{B}{2}:cos\frac{C}{2}$.

গ) উদ্দীপকে উল্লেখিত সদৃশ সমান্তরাল বলগুলো লব্ধি ত্রিভুজ ABCএর পরিকেন্দ্র o তে ক্রিয়াশীল হলে প্রমাণ কর যে, $l:m:n = sin\,2\,A:sin\,2\,B:sin\,2\,C$

CQ

০৭.



ক) কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P, Q বলদ্বয়ের লব্ধি তাদের সমষ্টির এক-তৃতীয়াংশ হলে প্রমাণ কর যে, বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ $\alpha = cos^{-1}\frac{PQ-4(P^2+Q^2)}{9PQ}$.

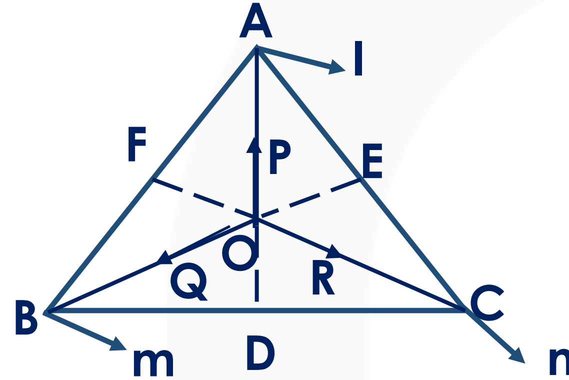
ক) প্রশ্ন মতে, $\left(\frac{P+Q}{3}\right)^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

বা, $\cos\alpha = \frac{(P+Q)^2-9(P^2+Q^2)}{18PQ} = \frac{2PQ-8(P^2+Q^2)}{18PQ}$

$\therefore \alpha = cos^{-1}\frac{PQ-4(P^2+Q^2)}{9PQ}$.

CQ

০৭.



খ) উদ্দীপকে উল্লেখিত সমবিন্দুগামী বলগুলো ত্রিভুজ ABC এর অন্তঃকেন্দ্র O তে সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করলে প্রমাণ কর যে, $P:Q:R = \cos\frac{A}{2}:\cos\frac{B}{2}:\cos\frac{C}{2}$.

খ) ABC ত্রিভুজের কেন্দ্র O, OA, OB, OC রেখায় যথাক্রমে A, B, C কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে OA, B, C বরাবরP, Q, R বলত্রয় ভারসাম্যে আছে।

লমির সূত্রানুসারে পাই, $\frac{P}{\sin BOC} = \frac{Q}{\sin COA} = \frac{R}{\sin AOB}$

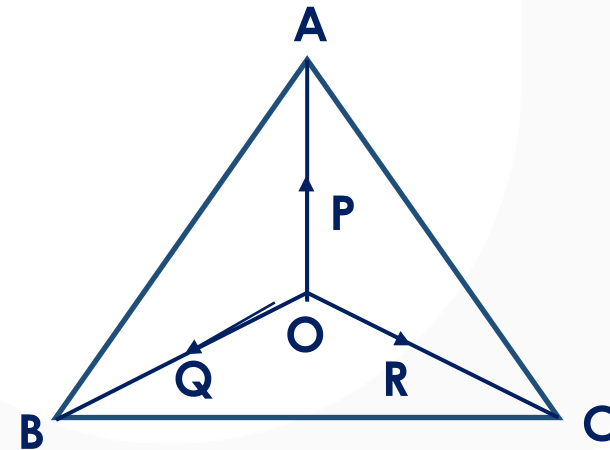
এখন, $\angle BOC = \pi - \frac{B}{2} - \frac{C}{2} = \pi - \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)$

$= \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)$

$= \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}$

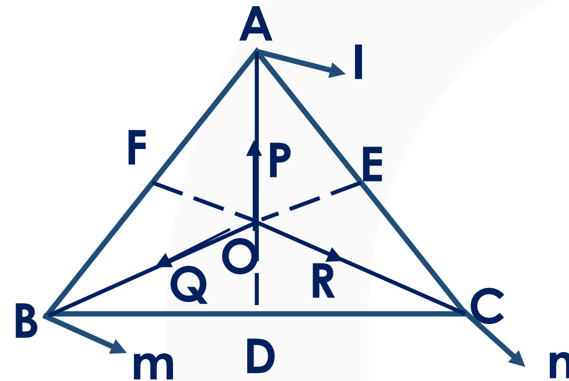
$\therefore A + B + C = \pi$

বা, $\frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$



CQ

০৭.



খ) উদ্দীপকে উল্লেখিত সমবিন্দুগামী বলগুলো ত্রিভুজ ABC এর অন্তঃকেন্দ্র O তে সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করলে প্রমাণ কর যে, $P:Q:R = cos\frac{A}{2}:cos\frac{B}{2}:cos\frac{C}{2}$.

একইভাবে $\angle COA = \frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}$Ges $\angle AOB = \frac{\pi}{2} + \frac{C}{2}$

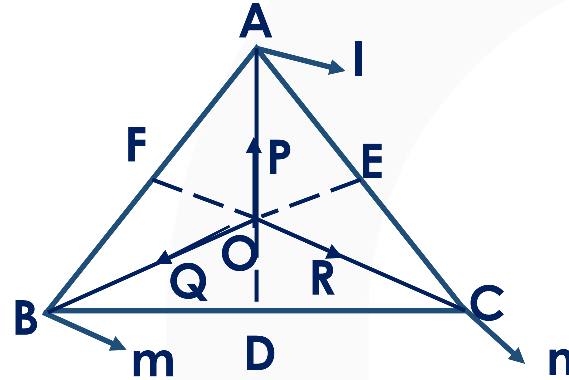
$\therefore \quad \frac{P}{sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}\right)} = \frac{Q}{sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{B}{2}\right)} = \frac{R}{sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{C}{2}\right)}$

বা, $\frac{P}{cos\frac{A}{2}} = \frac{Q}{cos\frac{B}{2}} = \frac{R}{cos\frac{C}{2}}$

$\therefore \quad P:Q:R = cos\frac{A}{2}:cos\frac{B}{2}:cos\frac{C}{2}$. (প্রমাণিত)

CQ

০৭.

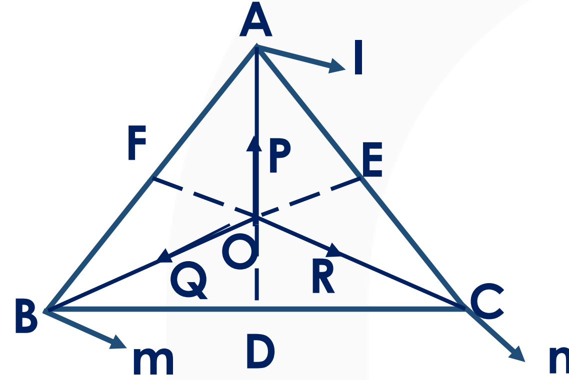


গ) উদ্দীপকে উল্লেখিত সদৃশ সমান্তরাল বলগুলো লব্ধি ত্রিভুজ ABC এর পরিকেন্দ্র o তে ক্রিয়াশীল হলে প্রমাণ কর যে, $l: m: n = sin\, 2\, A: sin\, 2\, B: sin\, 2\, C$

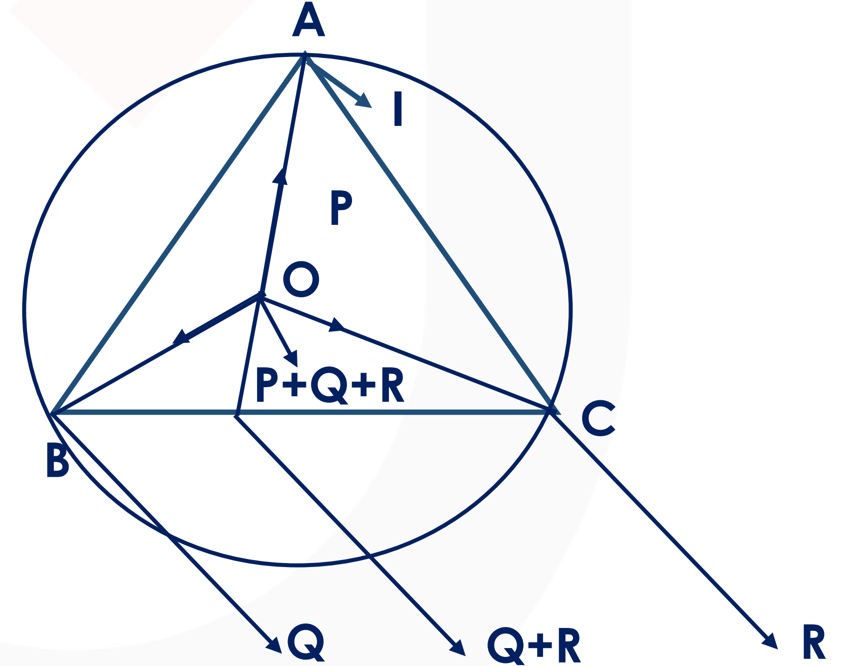
গ) ধরি. ABC ত্রিভূজের পরিকেন্দ্র এবং যোগ করি যেন BC রেখার উপর বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত হয়।
যেহেতু, I, m, n সদৃশ সমান্তরাল বল তিনটির লব্ধি বিন্দুগামী। সেহেতু B ও C বিন্দুগামী ক্রিয়াশীল m ও n বলের লব্ধি $(m + n)$ অবশ্যই BC রেখা ও বর্ধিত AD রেখার ছেদবিন্দু D বিন্দুগামী হবে।

CQ

০৭.



গ) উদ্দীপকে উল্লেখিত সদৃশ সমান্তরাল বলগুলো লব্ধি ত্রিভুজ ABC এর পরিকেন্দ্র O তে ক্রিয়াশীল হলে প্রমাণ কর যে, $l : m : n = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$



$\therefore \quad m.BD = n.CD$

বা, $\frac{m}{n} = \frac{CD/OD}{BD/OD} = \frac{BD/\sin\angle COD}{OD/\sin\angle OCD}$

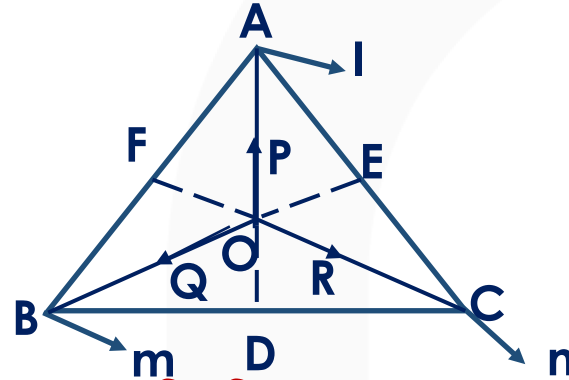
বা, $\frac{m}{n} = \frac{CD/OD}{BD/OD} = \frac{BD/\sin\angle BOD}{OD/\sin\angle OBD}$

বা, $\frac{m}{n} = \frac{\sin\angle COD/\sin\angle OCD}{\sin\angle BOD/\sin\angle OBD}$

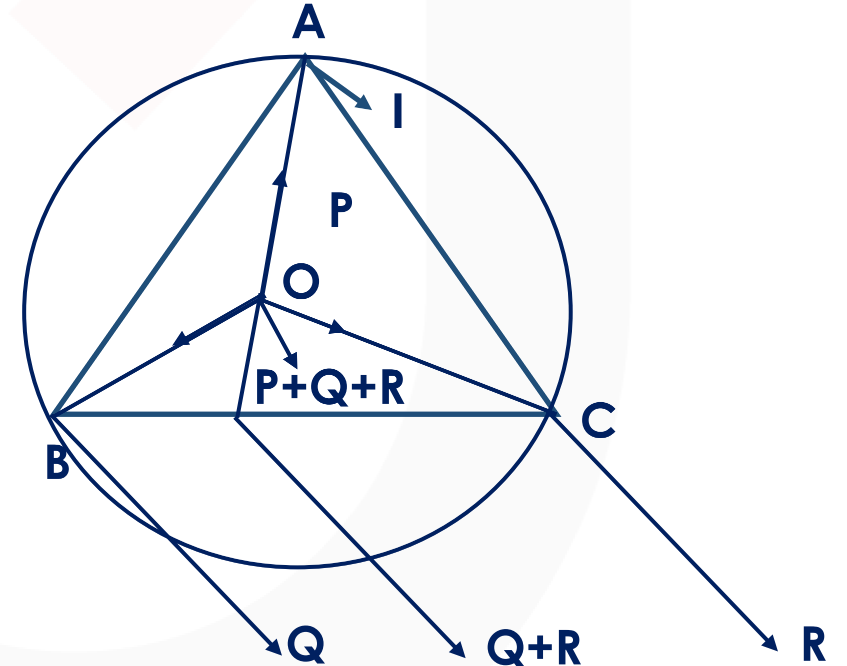
বা, $\frac{m}{n} = \frac{\sin\angle COD}{\sin\angle BOD}$ [$OC = OB$ এবং $\angle OCD = \angle OBD$]

CQ

০৭.



গ) উদ্দীপকে উল্লেখিত সদৃশ সমান্তরাল বলগুলো লব্ধি ত্রিভুজ ABC এর পরিকেন্দ্র o তে ক্রিয়াশীল হলে প্রমাণ কর যে, $l : m : n = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$



বা, $\frac{m}{n} = \frac{\sin 2B}{\sin 2C}$

বা, $\frac{m}{n} = \frac{\sin\{\pi - \angle AOC\}}{\sin\{\pi - \angle AOB\}}$

অর্থাৎ একই বৃত্তচাপের উপর কেন্দ্রস্থ কোণ=2 (পরিধিস্থ কোণ)

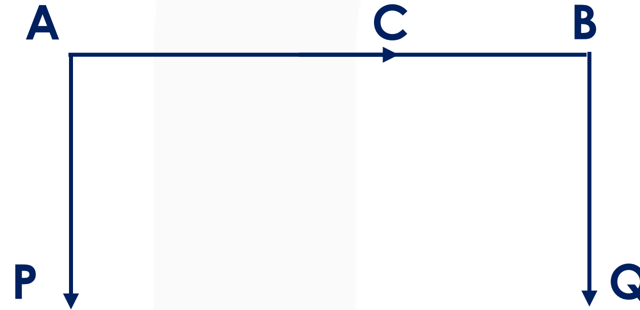
$\therefore m : n = \sin 2B : \sin 2C$

অনুরূপভাবে l : m = sin 2A : sin 2B

$\therefore l$: m: n = sin 2A : sin 2B: sin 2C. (প্রমানিত)

CQ

০৮. P, Q ও R মানের তিনটি বল একই সময়ে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে। P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণকে এক-তৃতীয়াংশে বিভক্ত করে।



চিত্র : ১

ক) সাম্যাবস্থায় ত্রিভুজ সূত্রটি লেখ এবং প্রমাণ কর ।

খ) উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে, বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের পরিমাণ $3\cos^{-2}\frac{P}{2Q}$ এবং $\frac{P^2-Q^2}{Q}$

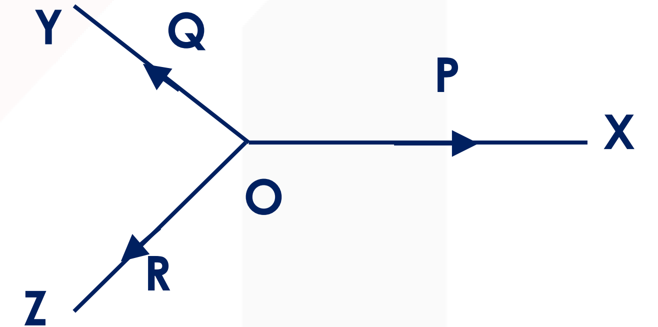
গ) চিত্র-১ হতে দেখাও যে, P বলটির ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল রেখে তার ক্রিয়াবিন্দুকে দূরে সরালে এদের লব্ধি $\frac{Px}{P+Q}$ সরে যাবে।

CQ

০৮. P, Q ও R মানের তিনটি বল একই সময়ে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে। P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণকে এক-তৃতীয়াংশে বিভক্ত করে।

ক) সাম্যাবস্থায় ত্রিভুজ সূত্রটি লেখ এবং প্রমাণ কর ।

ক) যদি একবিন্দুতে কার্যরত তিনটি বলের মান ও দিক যথাক্রমে একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা একই ক্রমে সূচিত করা যায়, তবে বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকবে।

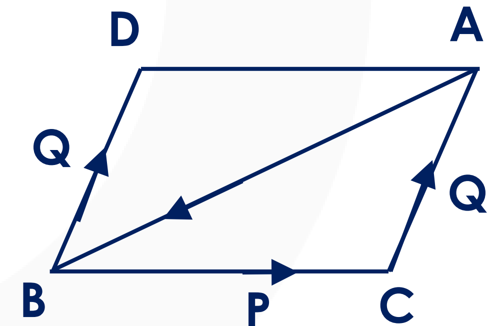


প্রমাণঃ O মূলবিন্দু, OX, OY এবং OZ বরাবর $\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = 0$

$BCAD$ সামান্তরিকটি পূর্ণ করি।

CA ও BD সমান ও সমান্তরাল বলে টিকে BD দ্বারা সুচিত করা যায়।

বলের সামান্তরিক সূত্র অনুযায়ী BC ও BD বলদ্বয়ের লব্ধি কর্ণ BA দ্বারা সূচিত হবে।



এখন , $\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB}$ $\quad [\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}]$

$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = 0$ $\quad [\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}]$

অতএব, বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকবে। (প্রমাণিত)

CQ

০৮. P, Q ও R মানের তিনটি বল একই সময়ে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে। P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণকে এক-তৃতীয়াংশে বিভক্ত করে।

খ) উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে, বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের পরিমাণ $3\cos^{-2}\frac{P}{2Q}$ এবং $\frac{P^2-Q^2}{Q}$

খ) মনে করি, বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ = 3α| 3a তাহলে লব্ধ R বল P সাথে α কোণ উৎপন্ন করে।

R বরাবর বলগুলোর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$$R\cos\theta^o = Q\cos 2\alpha + P\cos(-\alpha)$$

$$\therefore R = Q(2\cos^2\alpha - 1) + P\cos\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

এবং, $R\sin\theta^o = Q\sin 2\alpha + P\sin(-\alpha)$

বা, $0 = Q(2\sin\alpha\cos\alpha) - P\sin\alpha$

বা, $2Q\cos\alpha - \alpha - P = 0$

বা, $\cos\alpha = \frac{P}{2Q}$

$\therefore \alpha\cos^{-1} = \frac{P}{2Q}$

বা, $3\alpha = 3\cos^{-1}\frac{P}{2Q}$

CQ

০৮. P, Q ও R মানের তিনটি বল একই সময়ে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে। P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণকে এক-তৃতীয়াংশে বিভক্ত করে।

খ) উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে, বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের পরিমাণ $3\cos^{-2}\frac{P}{2Q}$ এবং $\frac{P^2-Q^2}{Q}$

খ) সমীকরণ (1) হতে পাই,

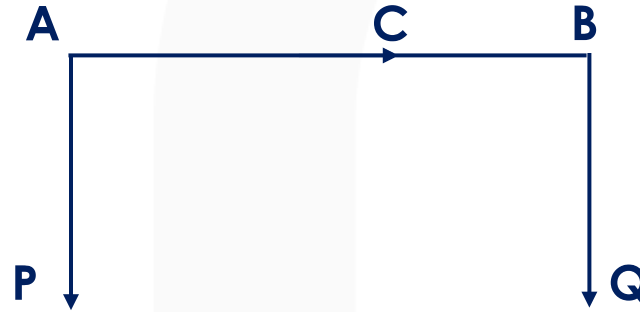
$$R = 2Q\left(\frac{P^2}{4Q}\right) - Q + P\left(\frac{P}{2Q}\right)$$

$$= \frac{P^2}{2Q} - Q + \frac{P^2}{2Q} = \frac{P^2}{Q} - Q = \frac{P^2-Q^2}{Q}$$

$\therefore$ বল দুইটির অন্তর্গত কোণ $3\cos^{-1}\frac{P}{2Q}$ এবং লব্ধির মান $\frac{P^2-Q^2}{Q}$. (দেখানো হলো)

CQ

০৮. P, Q ও R মানের তিনটি বল একই সময়ে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে। P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণকে এক-তৃতীয়াংশে বিভক্ত করে।



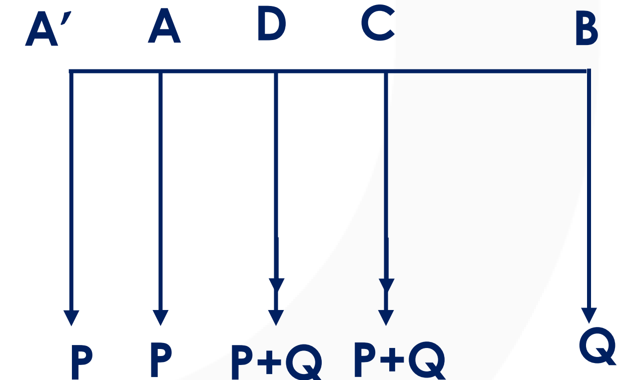
চিত্র : ১

গ) এখানে, একটি অনড় বস্তু AB এর AB বিন্দুতেP ও Q দুইটি সমমুখী সমান্তরাল বল কার্যরত। এদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু C ।

$\therefore\ P, AC = Q.BC$

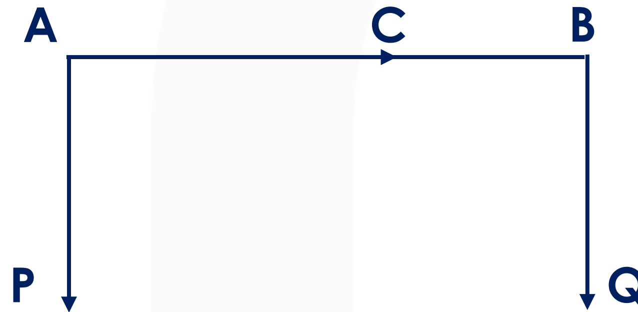
বা , $P.AC = (AB - AC)$

বা , $AC = \frac{Q}{P+Q} AB$



CQ

০৮. P, Q ও R মানের তিনটি বল একই সময়ে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে। P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণকে এক-তৃতীয়াংশে বিভক্ত করে।



চিত্র : ১

আবার, P বিন্দুর ক্রিয়ারেখাকে সমান্তরাল রেখে Pএর ক্রিয়াবিন্দুকে X দুরেA' বিন্দুতে সরালে ধরি লব্ধি C থেকে Dবিন্দুতে সরে যায়।

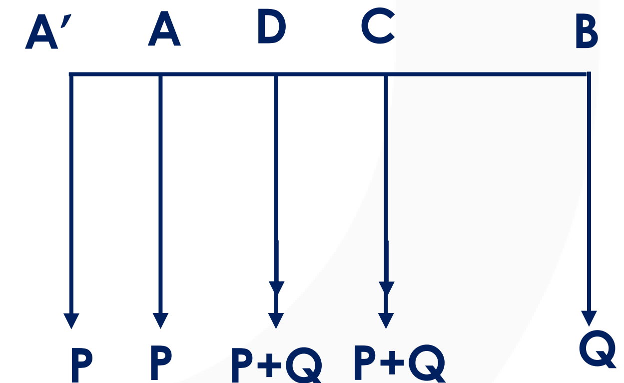
$\therefore P.A'D = Q.BD$

বা , $P.A'D = Q(AB - AD)$

বা , $P(AA' + AD) = Q.AB - Q.AD$

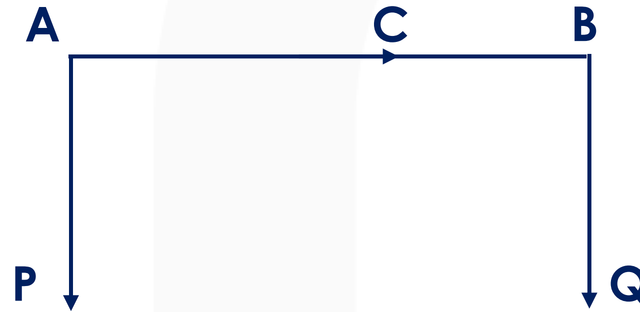
বা , $P.X + P.AD = Q.AB - Q.AD = Q.(AB - AD)$

বা , $(P + Q)AD = Q.AB - PX$



CQ

০৮. P, Q ও R মানের তিনটি বল একই সময়ে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে। P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণকে এক-তৃতীয়াংশে বিভক্ত করে।



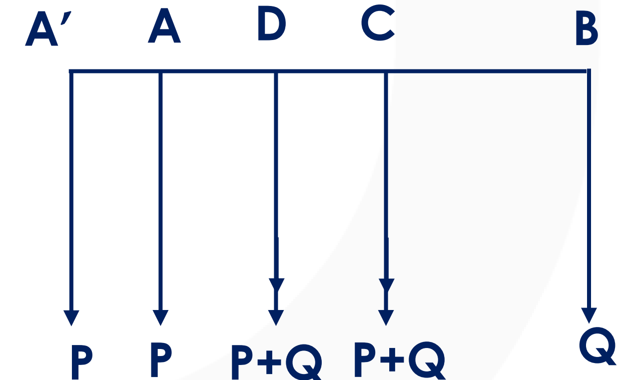
চিত্র : ১

বা , $AD \frac{Q.AB-PX}{P+Q}$

এখন $CD = AC - AD$

$$= \frac{Q}{P+Q}AB - \frac{Q.AB}{P+Q} + \frac{PX}{P+Q} = \frac{PX}{P+Q}$$

অতএব, লব্ধি $\frac{PX}{P+Q}$ দূরে সরে যাবে। **(দেখানো হলো)**



MCQ

(1) k এর মান কত হলে $(k+1)^2 + 2(k+3)x + 2k + 3$ রাশি টি একটি পূর্ণ বর্গ হবে?

A. 3, 2

B. -3,-2

C. 3,-2

D. -3,2

Solve:

নিশ্চয়ক, $D = \{2(k+3)\}^2 - 4(k+1)(2k+3)$

$= 4k^2 + 24k + 36 - 8k^2 - 20k - 12$

$= -4k^2 + 4k + 24 = -4(k^2 - k - 6) = -4(k-3)(k+2)$

রাশি টি পূর্ণ বর্গ হবে যদি নিশ্চয়ক এর মান 0 হয়।

$\therefore -4(k-3)(k+2) = 0 \quad \therefore k = 3, -2$

MCQ

(2) $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের ক্ষেত্রে $9ac = 2b^2$ হলে তার মূল দ্বয় এর ধরন হবে-

A. উভয়েই অবাস্তব

B. উভয়েই সমান

C. একটি অপরটির $\frac{3}{2}$ গুণ

D. একটি অপরটির 2 গুণ ✔

Solve:

$$2b^2 = 9ac \therefore 2(b^2 - 4ac) = 2b^2 - 8ac = 9ac - 8ac = ac = \frac{2}{9}b^2$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \frac{b}{3}}{2a} = \frac{b}{2a}\left(-1 \pm \frac{1}{3}\right)$$

$$\therefore x = -\frac{2}{3} \times \frac{b}{2a}, -\frac{4}{3} \times \frac{b}{2a}$$

মানে মুলগুলো একটি অপরটির দ্বিগুণ।

[বুদ্ধির কাজ হল অপশন এর মান বসিয়ে check. মানে সুবিধামত a, b, c ধরা ।
যেমন , $a = 1, c = 8, b = 6$ ধরলে,
$x^2 + 6x + 8 = 0$ এর মূল দ্বয় -2, -4 একে উপরের দ্বিগুণ।]

MCQ

(3) $2x^2 - 7x + 5 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β, এবং $x^2 - 4x + 3 = 0$ সমীকরণের মূল দ্বয় β এবং γ হলে $(\gamma + \alpha):(\gamma - \alpha) = ?$

A. 6:5

B. 5:6

C. 11:1 ✔

D. 1:6

Solve:

প্রদত্ত সমীকরণ,

$$2x^2 - 7x + 5 = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

(i) নং সমীকরণের মূলদ্বয়, α ও β

$\therefore \alpha + \beta = \frac{7}{2}$ এবং $\alpha\beta = \frac{5}{2}$; সুতরাং $\alpha - \beta = \frac{3}{2}$

অর্থাৎ (i) নং সমীকরণের জন্য $\alpha = \frac{5}{2}$ এবং $\beta = 1$;

(ii) নং সমীকরণের মূলদ্বয়, β ও γ

$\therefore \beta + \gamma = 4$ এবং $\beta\gamma = 3$; সুতরাং $\beta - \gamma = 2$

অর্থাৎ (ii) নং সমীকরণের জন্য $\gamma = 3$ এবং $\beta = 1$;

এখন, দুই সমীকরণের সাধারণ মূল হওয়ায় তার মান একই।

$$\therefore \frac{\gamma + \alpha}{\gamma - \alpha} = \frac{3 + \frac{5}{2}}{2 - \frac{5}{2}} = \frac{11}{1} = \mathbf{11:1}$$

MCQ

(4) একটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $\frac{1}{3-i\sqrt{2}}$ হলে অপর মূলটি কোনটি?

A. $\frac{3}{11} - i\frac{\sqrt{2}}{11}$ ✓

B. $\frac{3}{11} + i\frac{\sqrt{2}}{11}$

C. $\frac{3i}{11} - \frac{\sqrt{2}}{11}$

D. $\frac{3i}{11} + \frac{\sqrt{2}}{11}$

Solve:

$$\frac{1}{3-i\sqrt{2}} = \frac{3+i\sqrt{2}}{3^2-(i\sqrt{2})^2} = \frac{3+i\sqrt{2}}{9+2} = \frac{3}{11} + i\frac{\sqrt{2}}{11}$$

∴অপর মূল $\frac{3}{11} - i\frac{\sqrt{2}}{11}$

MCQ

(5) $6x^3 - x + 13 = 0$ সমীকরণের মূলগুলি α, β, γ হলে $\sum(\alpha - \beta)^2$ এর মান কত?

A. $-\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{6}$

C. 1 ✔

D. -1

Solve:

$$\sum(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2$$
$$= 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) = 2[\{\alpha + \beta + \gamma\}^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)]$$
$$= 2\left(0^2 - 3.-\frac{1}{6}\right) = 2.\frac{1}{2} = 1$$

MCQ

(6) $13x^2 - 6x - 7 = 0$ এর মূলদ্বয় α ও β হলে $\alpha^{-1} + 1$ ও $\beta^{-1} + 1$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি?

A. $7x^2 - 8x - 12 = 0$ B. $7x^2 - 20x = 0$ C. $7x^2 + 8x - 12 = 0$ D. $7x^2 + 8x = 0$

Solve:

মূল দ্বয়ের যোগফল, $= \alpha^{-1} + 1 + \beta^{-1} + 1 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 2 = \frac{\frac{6}{12}}{\frac{-7}{13}} + 2 = \frac{8}{7}$

গুণফল $= (\alpha^{-1}+1)(\beta^{-1} + 1) = \alpha^{-1}\beta^{-1} + \alpha^{-1} + \beta^{-1} + 1$

$= (\alpha\beta)^{-1} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 1 = -\frac{13}{7} - \frac{6}{7} + 1 = -\frac{12}{7}$

সমীকরণ:$x^2 - \frac{8}{7}x - \frac{12}{7} = 0 \quad \therefore 7x^2 - 8x - 12 = 0$

MCQ

(7) $2x^2 - x + 2$ এর ন্যুনতম মান কত?

A. 2

B. $\frac{15}{8}$ ✓

C. $\frac{3}{8}$

D. $\frac{17}{8}$

Solve:

ন্যুনতম মান , $= c - \frac{b^2}{4a} = 2 - \frac{(-1)^2}{4(2)}$ [এখানে $a = 2, b = -1, c = 2$]

$= 2 - \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$

MCQ

(8) যদি $\frac{x+p}{(x-1)(x-3)} = \frac{q}{x-1} + \frac{2}{x-3}$ হয়, যেখানে p ও q ধ্রুবক তবে p ও q এর মান -

A. $p = -2, q = 1$

B. $p = 2. q = 1$

C. $p = 1, q = -1$ ✔

D. $p = 1, q = 1$

Solve:

$\frac{x+p}{(x-1)(x-3)} = \frac{q}{x-1} + \frac{2}{x-3} \Rightarrow x + p \equiv q(x-3) + 2(x-1) \equiv qx - 3q + 2x - 2$

x এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $1 = q + 2 \quad \therefore q = -1$

ধ্রুবক গুলো সমীকৃত করে পাই, $p = -3q - 2 = -3(-1) - 2 = 1$

MCQ

(9) $x^2 + kx - 6k = 0$ এবং $x^2 - 2x - k = 0$ সমীকরণের একটি সাধারণ মূল থাকলে k এর মান কত ?

A. $1, \frac{1}{2}, 3$

B. $2, 8, 3$

C. $0, 3, 8$

D. $2, -\frac{3}{2}, 1$

Solve:

$x^2 + kx - 6k = 0$ ……………… (i)

$x^2 - 2x - k = 0$ ……………… (ii)

(i) ও (ii) এর সাধারণ মূল $= \alpha$

$\therefore \alpha^2 + k\alpha - 6k = 0$ …………… (iii)

$\alpha^2 - 2\alpha - k = 0$ ………… (iv)

(iii) ও (iv) বজ্রগুনন করে, $\frac{\alpha^2}{-k^2-12k} = \frac{\alpha}{-6k+k} = \frac{1}{-2-k}$

বা, $\frac{\alpha^2}{k(k+12)} = \frac{\alpha}{5k} = \frac{1}{k+2}$ $\therefore (5k)^2 = k(k+12)(k+2) = 0$

বা, $k = 0$ এবং $25k = (k+12)(k+2)$

বা, $25k = k^2 + 14k + 24,$

বা, $k^2 - 11k + 24 = 0$

$\therefore \boldsymbol{k = 3, 8}$

MCQ

(10)

i. $cosec^{-1}x + \sec^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

ii. $2\cot^{-1}x \cot^{-1}\frac{x^2-1}{2x}$

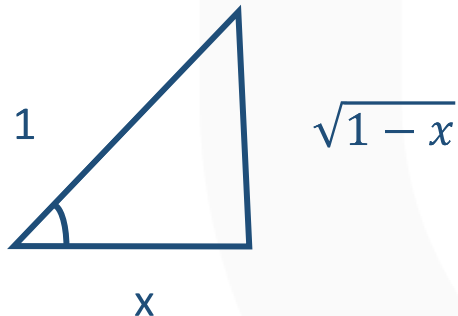
iii. $\cos^{-1}x = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

A. i, ii ✓ B. ii, iii C. i, iii D. i, ii, iii

Solve: (i) সঠিক (সূত্র)

(ii) সঠিক (সূত্র)



$\therefore \cos^{-1}x = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x}}{x}$

∴সঠিক নয়।

MCQ

(11) $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{2\pi}{3}$ হলে x এর মান -

A. 0

B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

C. $\sqrt{3}$

D. 1

Solve:

$$\tan^{-1} x + 2\cot^{-1} x = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1} x + \cot^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} + \cot^{-1} x = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \cot^{-1} x = \frac{\pi}{6} \quad \therefore x = \sqrt{3}$$

MCQ

(12) $y = 2\cos^{-1} x$ এবং $y = 2\sin^{-1} x$ বক্ররেখা দ্বয়ের ছেদবিন্দু কোনটি?

A. $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4}\right)$

B. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{6}\right)$

C. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{3}\right)$

D. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{2}\right)$ ✓

Solve:

$y = 2\cos^{-1} x = 2\sin^{-1} x \quad \cos^{-1} x = \sin^{-1} x$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x = \sin^{-1} x \quad \therefore 2\sin^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

$\therefore x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং $y = 2.\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

MCQ

(13) $\cos\left\{2\left(\sin^{-1}\frac{3x}{2}+\cos^{-1}\frac{3x}{2}\right)\right\}=P$ হলে P এর মান কত?

A. 0

B. 1

C. -1 ✔

D. $\frac{\pi}{2}$

Solve:

$$\cos\left\{2\left(\sin^{-1}\frac{3x}{2}+\cos^{-1}\frac{3x}{2}\right)\right\}=P$$

$$\Rightarrow \cos\left\{2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}=P \ \left[\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}\right.$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\cos}\,\pi = P \quad \therefore P=-1$$

MCQ

(14.) $y^2 - 4y - x^2 + 6x = 12$ সমীকরণটি কোন ধরনের কনিক?

A. বৃত্ত (Circle)

B. উপবৃত্ত (Ellipse)

C. পরাবৃত্ত (Parabola)

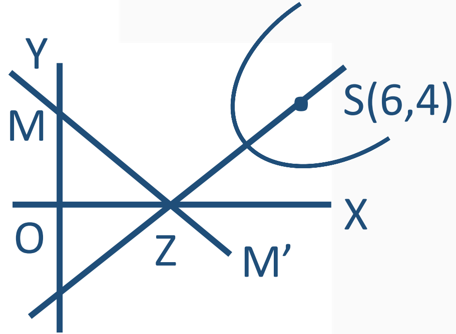
D. অধীবৃত্ত (Hyperbola) ✔

Solve:

x^2 ও y^2 এর সহগ ও চিহ্ন ভিন্ন এবং xy পদ অনুপ

$\therefore$ কণিক টি অধিবৃত্ত।

MCQ



(15) উদ্দীপকের পরাবৃত্ত এর দিকাক্ষের সমীকরণ $x + y - 2 = 0$ হলে শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক কত?

A. (2,0) B. (4,0) C. (2,4) D. (0,2)

Solve:

$$\boldsymbol{MZM' : x + y - 2 = 0}$$

বা, $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$

$\therefore Z(2.0); S(6,4)$

শীর্ষবিন্দু SZ এর মুলবিন্দু।

$\therefore$শীর্ষবিন্দু $\left(\frac{2+6}{2}, \frac{0+4}{2}\right)$বা, $(4, 2)$

MCQ

(16) নিচের তথ্যের আলোকে প্রশ্নের উত্তর দাও :
$y^2 - 4y - 4x + 16 = 0$ একটি প্যারা বোলা র সমীকরণ। অক্ষের সমীকরণ কোনটি?

A. $x - 3 = 0$

B. $y - 2 = 0$

C. $x = 2$

D. $y = 0$

Solve: অক্ষের সমীকরণ, $y - 2 = 0$

MCQ

(17) $x^2 - 4y = 0$ কনিকের নিয়ামক এর সমীকরণ টি কোনটি ?

A. $y + 1 = 0$ B. $y - 1 = 0$ C. $x + 1 = 0$ D. $x - 1 = 0$

Solve:

$\mathbf{x^2 - 4y = 0}$

বা, $x^2 = 4(1)y \quad \therefore a = 1$

নিয়ামকের সমীকরণ : $y = -a$

বা, $y = -1 \quad \therefore y + 1 = 0$

MCQ

(18) $y^2 = -2x$ পরাবৃত্তের -

(i) উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $2x = 1$
(ii) উপকেন্দ্রীক লম্বের দৈর্ঘ্য 2 একক
(iii) উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

নিচের কোনটি সঠিক?

A. i, ii B. ii, iii C. i, iii D. i, ii, iii

Solve:

$$\boldsymbol{y^2 = -2x \Rightarrow y^2 = 4\left(-\frac{1}{2}\right)x \quad \therefore a = -\frac{1}{2}}$$

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ: $x = a \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x = -1$

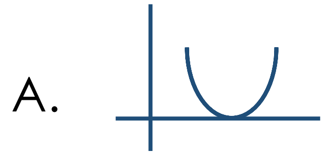
উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a| = \left|4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\right| = 2$ একক

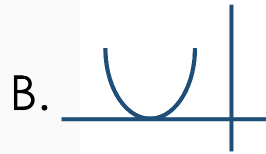
উপকেন্দ্রিক স্থানাঙ্ক $(a, 0)$ বা $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

(i) সঠিক নয় (ii) ও (iii) সঠিক।

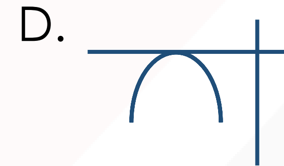
MCQ

(19) $y = (x + 2)^2$ পরাবৃত্তের লেখচিত্র কোনটি?

A. 

B. 

C. 

D. 

Solve:

শীর্ষবিন্দু তে, $x + 2 = 0$ এবং $y = 0$

$\therefore x = -2$

$\therefore$ শীর্ষবিন্দু $(-2, 0)$

$\therefore y = (x + 2)^2$

$\therefore y$ অধনাত্মক

MCQ

(20) অধিবৃত্তের ক্ষেত্রে নিচের কোনটি সঠিক ?

A. $e=0$ B. $e=1$ C. $0<e<1$ D. $e>1$

Solve:

(i)উৎকেন্দ্রিকতা, $e=0$ হলে সঞ্চার পথকে বৃত্ত বলে।
(ii) উৎকেন্দ্রিকতা, $e=1$ হলে সঞ্চার পথ কে পরাবৃত্ত বলে।
(iii) উৎকেন্দ্রিকতা, $0<e<1$ হলে সঞ্চার পথ কে উপবৃত্ত বলে।
(iv) উৎকেন্দ্রিকতা, $e>1$ হলে সঞ্চার পথ কে অধিবৃত্ত বলে।

MCQ

(21) $4N$ এবং $5N$ বল দুইটির মধ্যবর্তী কোণ কত হলে লব্ধি $9N$ হবে?

A. $45°$

B. $0°$

C. $30°$

D. $60°$

Solve:

$9^2 = 4^2 + 5^2 + 2.4.5.\,cos\alpha$

$\Rightarrow 40\; cos\;\alpha = 40 \Rightarrow cos\;\alpha = 1$

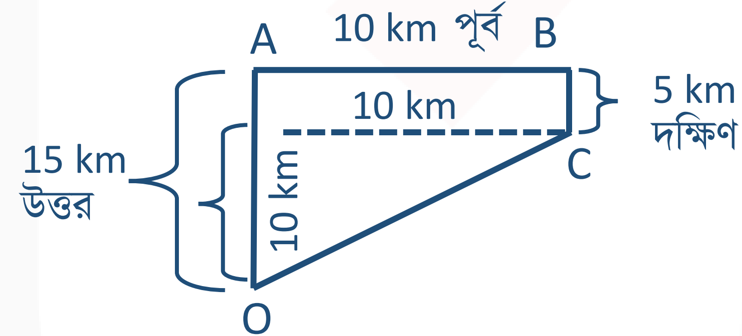
$\therefore \alpha = 0°$

MCQ

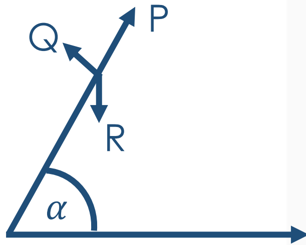
(22) একজন লোক কোন নির্দিষ্ট স্থান থেকে 15 কি. মি. উত্তর দিকে গেল এবং সেখানে থেকে 10 কি. মি. পূর্ব দিকে যাওয়ার পর 5 কি. মি. দক্ষিণ দিকে গেল। লোকটি যাত্রা স্থান থেকে কত কি. মি. দূরে অবস্থান করছে?

A. 10 B. 20 C. 30 D. $10\sqrt{2}$ E. $5\sqrt{14}$

Solve: চিত্র হতে $OC = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$



MCQ



(23) উদ্দীপকের Q ও R বলের মধ্যবর্তী কোণ কত?

A. $90° - \alpha$

B. $180° - \alpha$

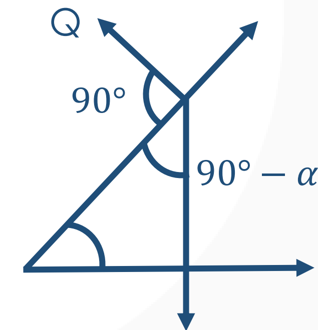
C. $90° + \alpha$

D. $180° + \alpha$

Solve:

Q ও R এর মধ্যবর্তী কোণ $= 90° + 90° - \alpha$

$= 180° - \alpha$



MCQ

(24) P, Q, R বলত্রয় যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহু বরাবর ক্রিয়া করে। তাদের লব্ধির ক্রিয়া রেখা ভরকেন্দ্র দিয়ে গেলে -

A. $\frac{P}{sinA} = \frac{Q}{sinB} = 0$

B. $\frac{R}{sinC} = \frac{PQ}{\sin(A+B)}$

C. $\frac{P}{sinA} = \frac{Q}{sinB} = \frac{R}{sinC}$

D. $PQR = 0$

Solve:

যেকোন ত্রিভুজের তিনটি বহু বরাবর ক্রিয়ারত বলত্রয়ের লব্ধির ক্রিয়ারেখা ঐ ত্রিভুজের -

(i) ভরকেন্দ্র দিয়ে গেলে $=\frac{P}{sinA} = \frac{Q}{sinB} = \frac{R}{sinC}=0$

অথবা, $\frac{P}{a} + \frac{Q}{b} + \frac{R}{c} = 0$

(ii) অন্তকেন্দ্র দিয়ে গেলে, $P + Q + R = 0$

(iii) পরিকেন্দ্র দিয়ে গেলে $PcosA + QcosB + RcosC = 0$

(iv) লম্ব কেন্দ্র দিয়ে গেলে $\frac{P}{cosA} = \frac{Q}{cosB} = \frac{R}{cosC} = 0$

MCQ

(25) 3 একক দূরত্বে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত 6 ও 3 একক মানের সমান্তরাল বলদ্বয় -

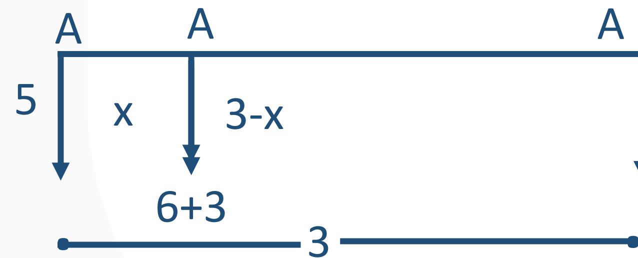
(i) সদৃশ হলে, লব্ধির মান 9 একক
(ii) বিসদৃশ হলে, লব্ধির মান 3 একক
(iii) সদৃশ এবং লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়ারত হলে, AC=1 একক

নিচের কোনটি সঠিক?

A. i, ii B. ii, iii C. i, iii D. i, ii, iii

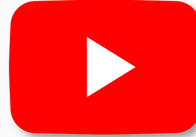
Solve:

সদৃশ হলে লব্ধি $= 6 + 3 = 9$ একক
বিসদৃশ হলে লব্ধি $= 6 - 3 = 3$ একক
চিত্র থেকে , $\frac{3}{x} = \frac{6+3}{3}$
বা, $9x = 9 \quad \therefore x = 1$
∴ (i), (ii) ও (iii) সঠিক।



Higher Math 1st Paper

এইচ এস সি ২১ শর্ট সিলেবাসের উচ্চতর গনিত ১ম পত্রের ক্লাস গুলো পেতে নিচের বাটনে ক্লিক করো



Higher Math 2nd Paper

এইচ এস সি ২১ শর্ট সিলেবাসের উচ্চতর গনিত ২য় পত্রের ক্লাস গুলো পেতে নিচের বাটনে ক্লিক করো

